

A MIA MADRE

BIBLIOTECA DI FILOSOFIA E DI PEDAGOGIA

LUIGI BOTTI

“

=L' INFINITO=



A. F. FORMIGGINI

EDITORE IN GENOVA

—
1912

PROPRIETÀ LETTERARIA

*Ogni esemplare dovrà portare impressa a secco nel frontispizio
l'impresa editoriale.*

Modena - Tipografia Editrice Moderna Blondi e Parmeggiani
Viale Margherita

Il concetto che io mi son venuto formando della filosofia, non è unicamente quello di una sistemazione definitiva del sapere. L'abitudine alla ricerca psicologica, da me intrapresa e proseguita per molti anni nell'Istituto di Psicologia di Torino sotto la guida paterna e sapiente di Federico Kiesow, che mi incoraggiò e mi sospinse pure al presente lavoro, mi ha persuaso non soltanto che la psicologia, come scienza intermedia tra le scienze della natura e le discipline morali, debba aiutarci a passare dalle prime alle seconde, ma ancora che essa, come scienza della più immediata esperienza, è la più adatta ad assumersi il compito preparatorio per la interpretazione filosofica finale. Difatti essa sola, e molto bene lo ha dimostrato il Wundt, può condurci alla gran legge dello sviluppo spirituale, che regola il divenire e il succedersi delle creazioni autonome dello spirito; ed essa sola, in fondo, è la chiave per la conoscenza e la interpretazione del mondo dei concetti in genere e della genesi della filosofia della natura.

D'altra parte ai nostri giorni le nuove filosofie dei valori e dell'azione, l'intuizionismo del Bergson, il contingentismo del Boutroux, le idee relativistiche e pragmatistiche, hanno dimostrato la necessità di attingere le spiegazioni finali non tanto a rigidi schemi intellettuali o a leggi esterne aventi valore oggettivo immutabile, quanto piuttosto alle intime esigenze della coscienza, che non s'appaga di un puro intellettualismo senza efficacia nel mondo dei valori e della pratica.

Sicché, o io m'inganno, o ciascuna trattazione teoretica deve condursi in ordine ad un fine ideale, anzi al più ideale dei fini, la soddisfazione di tutte quante le esigenze dello spirito e della suprema fra esse, lo sviluppo autonomo e progressivo della sua attività. Per questo il compito della filosofia è ogni volta rinnovato e sempre più incompiuto. Trattando di un tema speciale, l'« Infinito », io ho voluto attenermi a questo criterio generale, sebbene del compito mi sentissi indegno.

(RECAP)

L. B.

765762

50
1502

L' INFINITO

I. - CENNI STORICI.

« Lo spirito umano », dice il Cohn ¹⁾, « ha due tendenze fondamentali; l'una ad afferrare, concepire, limitare ogni oggetto della conoscenza; l'altra a proseguire senza posa le operazioni mentali al di là di ogni limite, nella quantità, nello spazio, nel tempo, nella causalità ». Così come vi è un « grande » e un « piccolo », vi è anche un « infinitamente grande » e un « infinitamente piccolo », ossia una infinita estensione e divisione. L'infinitamente grande si connette con la questione del tempo e di ciò che avviene nel tempo, e con quella della estensione del mondo nello spazio. L'infinitamente piccolo si connette invece con la questione della divisibilità infinita e dalla composizione infinita, e con la continuità di ogni estensione, tempo e movimento. Alla serie degli avvenimenti nel tempo si collega anche il riferimento dell'effetto alla sua causa.

Ora tutte le difficoltà nascenti dal contrapporre al finito l'infinito hanno preoccupato sin da tempi antichi le menti

¹⁾ IONAS COHN, *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant*, Leipzig, 1896. Per la bibliografia, cfr., fra le molte opere di carattere generale, WINDELBAND, *Geschichte der alten Philosophie*, I. v. Müllers Handbuch d. klassisch. Altertumswissenschaft, Bd. V, 1, 2 Aufl., 1894; ZELLER, *Die Philos. d. Griechen*; STOECKL, *Gesch. d. Philos. d. Mittelalters*, Bd. I, II, 1864-65; MORITZ CANTOR, *Vorlesungen üb. d. Gesch. d. Mathematik*; H. COHEN, *Die Infinitesimalmethode u. seine Geschichte*; l'op. sopra citata del COHN, ecc.

dei filosofi, e prima ancora si sono affacciate alla speculazione teologica. La filosofia stessa si ricongiunge sempre ai primi modi di pensare del popolo e de' suoi capi nell'epoca pre-filosofica. Il popolo, prima di cominciare a filosofare sistematicamente, ha già pensato all'enigma del mondo e deposto i risultati di questo pensiero in rappresentazioni religiose. Ma anche l'uomo singolo, il bambino, l'adulto incolto, son dei pre-filosofi. Max Müller dice che ogni religione ha origine dalla pressione dell'infinito sul finito: « la sua essenza è espressa nella tendenza verso l'infinito »: così si esprime appunto il Müller, che parte dalla considerazione della religione cristiana ed indiana. — In sè e per sè l'uomo non pensa al di là de' confini de' suoi sensi: ma certe esperienze lo costringono a varcarli, come la morte de' suoi simili, che non può concepire a guisa di un'annientamento, giacchè il morto riapparve e rivive nei sogni. Questa reviviscenza ha luogo in quanto dura nel pensiero dell'uomo: quando i pensieri d'oltre tomba si sviluppano più chiaramente, l'anima è concepita immortale in modi diversi; talora è ammessa per tutta l'anima o per una parte di essa una seconda morte. Per i Polinesi è eterno il regno infernale; e solo una parte dell'anima vive la vita eterna. Oltre che l'allargamento dell'immagine del mondo dalla parte del futuro, vi ha quello dalla parte del passato; e l'esperienza immediata che favorisce il pensiero del passato è ancora la morte ossia il pensiero del futuro, che non sfugge ad alcun popolo selvaggio. Perciò le idee della creazione presuppongono un più alto grado di riflessione e si servono per lo più di un materiale, raccolto in altre occasioni, di rappresentazioni mitologiche. Un esempio primitivo si ha nel dio Ukunlunkulu dei Cafri, e nelle Saghe degli Indiani dell'America del Nord, di cui alcuni pensarono un dio nato dalla terra e preceduto da un altro dio. Gli abitanti di Samoa Pô, usando già di un altro grado di astrazione, designarono la notte come il substrato ignoto da cui tutto derivò. Ciò fa pensare al concetto ebraico della eternità, espresso con la parola « olam », che in origine

indica ciò che è nascosto, occultato. Invece l'Indiano pensa inconcepibile la rappresentazione di un assoluto principio o cominciamento: un principio ne produce un secondo, ma esso può nuovamente venir prodotto dal secondo.

Un primo tentativo di oltrepassare i confini naturali del mondo fu — secondo il Cohn — solo di un ramo di Polinesesi, che aveva molto sviluppato il pensiero religioso. Gli Indiani ben presto andarono molto innanzi. Nelle canzoni vediche vi è una dea chiamata Aditi, cioè libertà, estensione illimitata, infinita (interminabilità). Secondo l'opinione di Max Müller, questa dea è una vecchia formazione mitologica, che significherebbe la porta di un ignoto mondo. Il concetto di infinito si sarebbe qui mitologicamente sviluppato. — La tendenza indiana all'immenso e al mistico fu ignota ai Greci. Però tra questi vi fu, prima della filosofia, un periodo di speculazione cosmogonica e teogonica, che sviluppò il concetto del caos, ossia di una materia originaria senza forma, da cui trasse origine il mondo. È probabile che questo concetto sia stato pei filosofi il punto di partenza per la loro materia originaria infinita e informe.

Ma, come facilmente si comprende, il problema dell'infinito, come del resto ogni altro, è e non può non essere trattato all'infuori di un criterio sistematico; e questa condizione è divenuta anche la legge del suo sviluppo storico. Venendo nella storia propriamente alle concezioni sistematiche, già si rintracciano pensieri precisi ed ordinati e persino trattazioni, matematiche attinenti al concetto di infinito in popoli antichi, di cui un riflesso intellettuale si riverberò sulla Grecia. I numeri parte interi, parte frazionarii, erano noti all'antico Egitto: lo zero non era considerato numero; il calcolo pare si facesse con le dita; la geometria aveva avuto inizio. Da parecchi passi degli scritti biblici, che sembrano aver avuto origine sotto l'influsso della coltura babilonese, pare che col 1000 e il 10.000 fossero indicate le massime pluralità (Saul abbattè 1000, Davide molti di più, cioè

10.000); ma si parlava anche di 1000 volte 1000, 10.000 volte 10.000 o 1000, come è detto nei salmi, oppure anche di un inconcepibile identificato con un 100.000 centinaia o col numero inesauribile delle stelle. — In Cina il popolo augura all'imperatore 10.000 anni di salute. — La parola « tma » dell'antico slavo significa tanto 10.000 che « oscuro », e più tardi passò a significare soltanto « oscuro ». In India (importanti a questo proposito le opere del Colebrooke, Rodet, ecc.) era nota la elevazione di un numero alla seconda e terza potenza, l'estrazione di radice quadrata e cubica. Già sin dall'epoca contraddistinta da Brahmaguptas si era trattato del calcolo con lo zero: zero diviso zero è niente: numeri divisi per zero non si alterano pure aggiungendo o togliendo loro qualche cosa: quanto più si diminuisce il divisore (così il commentatore Krishna), tanto maggiore è il quoziente sino all'estremo; però anche giunti all'ingrandimento estremo, si può dar sempre un numero maggiore di quello trovato, onde quel quoziente è di grandezza indeterminata è perciò è detto infinito. — Un primo accenno di teoria dell'infinito in Grecia troviamo in Anassimandro da Mileto, che pel primo, sembra, pose il principio del mondo illimitato ($\alpha\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$) temporalmente e spazialmente ¹⁾. Tra gli altri filosofi ionici, Anassimene e Diogene di Apollonia pare che, rispetto all'idea dell'infinito,

¹⁾ Cfr., per più ampie notizie, le opere fondamentali di ZELLER, *Die Philos. d. Griechen*, I Theil, 5 Aufl., Leipzig, 1892, S. 171 ff.; BURNET, *Early Greek philosophy*, London, 1892, pag. 8 sgg.; DIELS, *Die Fragmente d. Vorsokratiker*, I, S. 12 ff.; ecc. — Anche Anassimene e Diogene col principio dell'aria, e Talete con quello dell'acqua presentano forse un nesso coll'inesauribile, $\alpha\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$, di Anassimandro, in quanto forse tutti e tre mirano a intendere l' $\alpha\rho\chi\eta$, il principio, così chiamato da Aristotele (*Metaph.*, Lib. I, cap. III). — SIMPLICIO (*Phys.*, 24, 26) dice che Anassimene pone egli pure come Anassimandro la soggetta materia una ed infinita, non però indeterminata, ma determinata, chiamandola aria. — SCHLEIERMACHER dimostrò che $\alpha\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$ non è un elemento incorporeo, ma la materia infinita; è insomma un predicato, e per di più non soltanto l'illimitato nello spazio, ma il qualitativamente indeterminato, secondo disse TEICHMÜLLER. — SIMPLICIO (*De cælo*, 273 b 38), GIOVANNI

si riferissero ad Anassimandro. — Eraclito ammise un movimento infinito e una serie infinita di mondi susseguentisi. I quattro elementi e le due forze originarie sono nel pensiero di Empedocle non divenuti e non scomparibili, mentre per lui il nostro mondo è soggetto ad un'origine e ad un tramonto. Anassagora pone le sue omeomerie (semi delle cose) infinite per numero e differenza, divisibili senza limite; per lui il mondo è limitato ma circondato di materia infinita. — Gli Atomisti pongono gli atomi non più divisibili, ma infiniti di numero, e stabiliscono molte forme infinitamente diverse. Secondo loro tutto il possibile può realizzarsi. Ma per gli Atomisti non solo è interminabile la quantità degli atomi, ma in modo analogo si formano innumerevoli mondi, l'uno vicino all'altro, e l'uno dopo l'altro, e sono pur essi come gli atomi infinitamente varii. Tra codesti pensatori ricordiamo Leucippo e Democrito. In quest'ultimo pare anche si trovi un accenno alla conoscenza della natura problematica dell'infinito.

Ma il vero e proprio problema dell'infinito si iniziò con Pitagora ¹⁾ e con la scoperta matematica dell'irrazionale (v. il rapporto di un lato del quadrato con la sua dia-

FILOPONO (*Phys.*, 432,15), ecc., sembrano avvalorare l'ipotesi di Anassimandro asserendo che soltanto l'infinito non si esaurisce nelle continue produzioni. Ora un frammento dello stesso ANASSIMANDRO (DIELS, op. cit., I, S. 13) dice: διδόναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσις ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν τοῦ χρόνου τάξιν da cui si potrebbe arguire che egli argomentasse l'infinito mediante la considerazione del tempo; il che è pensato pure dal DÖRING (*Gesch. d. griech. Philos.*, Leipzig, 1903, B. I, S. 31). — AEZIO (*De plac.* I. 3, 3) rimprovera poi ad Anassimandro la preferenza accordata alla materia, essendo l'infinito null'altro che materia. — V. Riv. di Filos. 1909, I, 1.

¹⁾ Secondo lo SCHRÖDER (*Pythagoras u. d. Inder*, Leipzig, 1884) Pitagora dipenderebbe dalla filosofia indiana Sâmkhya, specialmente per quanto riguarda il numero irrazionale $\sqrt{2}$ e Crâutasûtras, di cui il più antico sarebbe da ascriversi all'8° sec. a. C. (cfr. anche M. CANTOR, *Vorles. u. d. Geschichte d. Mathematik*, I, S. 510). — Importante è anche a questo proposito l'indice antico dei matematici riferito da PRO-CLO nel suo commentario ad EUCLIDE, e specialmente il commentario, a lui attribuito, al decimo libro degli elementi di Euclide.

gonale; rapporto che non può esprimersi in numeri interi, e che il Wundt considera come esempio di una veduta matematica ottenuta per via induttiva). Si osservò allora come le figure geometriche non si possano esprimere sempre in numeri interi o nei loro rapporti. Se il numero intero è il rappresentante dell'attività separatrice, discreta, concepibile, si può pur dire che qui per la prima volta si trovarono in conflitto il concetto sceveratore e la intuizione continuativa. Da ciò trassero origine due diverse correnti di pensiero: da una parte Zenone l'Eleata, dall'altra lo sviluppo e i progressi della matematica. Nella scuola Eleatica Senofane ¹⁾ non pare abbia considerata la questione della limitazione dell'essere; ma Parmenide disse l'essere « limitato », e ne escluse la varietà, il movimento e la molteplicità. Zenone ²⁾, appoggiandosi a Parmenide, trovò argomenti contro la molteplicità, tra gli altri le difficoltà del concetto del moto, dell'infinito, dell'infinita divisibilità, dell'infinita estensione, la quale ultima lo trae ad ammettere la inesistenza dello spazio (aporie di Zenone). Per Zenone ogni pluralità è un numero di unità, e una reale unità è indivisibile: le parti, per non esser nulle, dovrebbero avere una grandezza, ed esser separate da altre, e così via in infinito; noto è il paradosso di Achille e della tartaruga. Insomma non possono darsi l'infinitesimo e il non essere. — Del problema dell'infinito toccarono ancora Melisso della Scuola eleatica, Gorgia Sofista, Diodoro Krono della Scuola Socratica Megarese. — Venendo alle trattazioni matematiche, va ricordato che tra gli scritti perduti di Democrito si nominano due libri « Sopra linee irrazionali e oggetti spessi »: in un suo frammento si pone il quesito se le due superfici comba-

¹⁾ Cfr. TANNERY, *Histoire du concept de l'infini au VI^e siècle avant Jésus Christ*, Rev. philos., vol. 14, pag. 618, 1892.

²⁾ V. ARISTOTELE, *Phvs.*, IV, 3, 210 b, 22 (ex recensione I. Beckeri edidit academia regia Borussica. Berlin 1831); SIMPL., *Phys.*, ecc.: così pure cfr. UEBERWEG-HEINZE, *Grundriss d. Gesch. d. Philos.*, 7 Aufl., 1886, Bd. I, § 20, ecc.

cianti di una sfera tagliata siano eguali tra loro come quelle di un cilindro; il che fa certo preludere alle questioni della scienza esatta dell'epoca moderna, come a quelle della continuità, ecc. — Già nella seconda metà del V. secolo avanti Cristo i matematici erano giunti ad occuparsi dall'approssimazione infinitesima e precisamente della misura e quadratura del circolo, e ne trattarono di poi continuamente (Antifonte, Brisone, Ippocrate da Chio, Archimede). E ricordiamo che nel secolo di Pericle ebbe grande importanza la sezione aurea. — Dalla scuola pitagorica derivò anche la mistica filosofica. E qui pure il pensiero dell'infinito trovò sostenitori. I numeri son l'essenza delle cose: essi sono pari e dispari, illimitati e limitati; inoltre pare che il *κενόν* (il vuoto) fosse l'*ἄπειρον* (l'infinito), intendendosi però con *ἄπειρον* non si sa bene se la mancanza di limitazione determinata oppure l'infinito spaziale, ecc. Poi, sotto il rispetto etico-estetico, si designò il dispari o il limitato come il Buono, il pari o illimitato come il Male, ciò che può dirsi corrisponda allo spirito greco amante dell'ordine e della misura. — Una influenza di questo spirito pitagorico si fece sentire in Platone ¹⁾ (ultimo periodo: v. specialmente il « Filebo »). In questo dialogo si nomina l'illimitato, suscettibile all'infinito di *τὸ μᾶλλον τε καὶ ἧττον* (aumento e diminuzione), la limitazione consistendo nelle determinazioni numeriche. Nel « Parmenide » Platone ammette il « molto » che è illimitato ed è ordinato solo dall'uno. L'illimitato è senza valore giacchè l'ordine viene col limite: il primo è la materia designata anche come « grande » e « piccolo »: il mondo invece è limitato (v. il « Timeo »). In quest'ultimo dialogo si dice che il tempo è l'immagine eternamente corrente dell'eternità riposante nella unità: quindi il tempo è nato insieme col cielo, con l'universo (cfr. Agostino). — Un più sistematico pensiero dell'infinito ebbe Aristotele ²⁾.

¹⁾ Ed. Stephanus, e ed. Becher, London, 1826.

²⁾ *Phys.*, III, VI, VIII, ecc.; *De Coelo*, I, ecc. (ediz. citata). — STÖLZLE, *Die Lehre vom Unendlichen bei Aristoteles*, Programm d. kathol. Studien-Anstalt St. Stephan in Augsburg, 1882.

Aristotele esamina i concetti del continuo (συνεχές) e dell'illimitato (ἄπειρον). Di contro a Democrito, il quale ammetteva estensione infinita e divisibilità limitata, Aristotele ammette estensione limitata e divisibilità senza limiti. Per lui l'infinito non è, come nei platonici-pitagorei, sostanza, ma soltanto uno stato del numero o della grandezza, e consiste nella « possibilità » di un illimitato progresso non mai esauribile. Inoltre egli pone la continuità, ossia ciò che è divisibile in parti sempre nuovamente divisibili come lo spazio, il tempo, il movimento: e, combattendo Zenone, nega che in un indivisibile momento di un movimento il corpo mosso si trovi in riposo; perchè — secondo lui — un tutto continuo, e quindi anche il tempo, non è composto di parti inestese e indivisibili, ma di momenti divisibili illimitatamente in altri momenti. L'infinito sussiste solo in potenza (δυνάμει) e non in realtà (ἐντελεχείᾳ): così è della continuità. Alla proprietà dei processi qualitativi Aristotele ascrive la discontinuità della sensazione. I quattro elementi non sono per Aristotele illimitati, nè lo è ciò che si muove di moto uniforme circolare, il qual moto è in sè stesso circoscritto (τελεία): nemmeno egli crede dimostrativa per la reale esistenza dell'infinito la illimitatezza del nostro pensiero, giacchè noi possiamo pensarci ciascuna cosa più grande che non sia. Riguardo all'estensione, Aristotele nega anche l'infinito potenziale; e, mentre lo ammette nella divisibilità della materia, rispetto al numero dice infinito solo l'accrescimento, non la divisione: è numero reale solo il numero intero, e l'unità è indivisibile. Aristotele rigetta la ipotesi di varî mondi esistenti l'uno accanto all'altro nello spazio, giacchè tutto lo spazio è incluso nel movimento circolare del cielo. Così non ammette molteplici mondi nascenti e decadenti l'uno dopo l'altro nel tempo: il nostro mondo non è divenuto e non è distruttibile. Il tempo è illimitato, e in esso lo è il movimento: ma questo ha una causa prima e suprema, che non è più mossa, non ha grandezza e non consta di parti, e la cui forza agente dev'essere sconfinata, giacchè produce il movimento durante il

tempo illimitato; nel che Aristotele esce dalla concezione della grandezza limitata per spingersi verso l'ipotesi di un infinito. — Teofrasto, discepolo di Aristotele, corresse la concezione aristotelica, manchevole rispetto allo spazio.

Morto Alessandro il Grande, fiorirono ancora assai in Alessandria gli studî matematici, specie dal 300 al 200 e fino al 50 a. C. (Tolomeo Sotera assunse il titolo di re nel 305). I famosi Elementi (« Στοιχεῖα ») di Euclide contengono nel X. libro « l'incommensurabile » (« ἀσύμμετρον »): se si hanno due grandezze disuguali e dalla più grande si porta via più della metà, e poi dal resto si toglie nuovamente più della metà e così di seguito, si giunge a un resto più piccolo di qualsiasi grandezza data per quanto piccola. Famoso è rimasto il metodo di esaustione. Di fronte al razionale, vien posto il numero irrazionale (di contro al ῥητὸν l'ἄλογον): irrazionale è quello che non si misura nè in sè nè nella potenza, ossia nè con l'unità di lunghezza nè con la sua superficie quadrata; come è razionale a e $\sqrt{a}$, è irrazionale $a\sqrt{b}$. — Archimede (v. l'ediz. Torelli o Heiberg), valendosi di metodi dimostrativi indiretti, si servì della seguente proposizione ausiliaria: la differenza di spazi disuguali della quale il maggiore supera il minore, può, aggiunta a sè stessa, superare qualunque spazio dato. Archimede è rimasto famoso per il postulato che piglia il suo nome, e secondo cui, date due grandezze finite, è sempre possibile una moltiplicazione finita, capace di rendere l'una di quelle grandezze maggiore dell'altra. Il calcolo fondato sul principio della sabbia (« ψαμμίτης », arenarius), consisteva nell'andare alla ricerca di quel numero che fosse più grande del numero di granelli di sabbia che può contenere una sfera avente per diametro la distanza del centro della terra dal cielo delle stelle fisse, ossia dalla sfera del mondo (in ciò è un riferimento alle idee astronomiche di Aristarco di Samo). Archimede non solo dice questo, ma fa il rapporto sempre più grande, giungendo a parlare di mille miriadi dell'ottavo periodo, ecc.; in modo che qualunque numero per quanto

grande può esser superato e fatto divenir sin troppo vicino anzichè remoto, come accade p. es. quando lo stesso Archimede dice che non solo può esser superato il numero dei granelli di sabbia di un mucchio che abbia la grandezza della terra, ma ancora quello dei granelli di un mucchio equivalente in grandezza all'universo.

Nella filosofia greca post-aristotelica, Stoici ed Epicurei si accostarono ai vecchi filosofi della natura, o a Eraclito, o agli Atomisti, ecc. Tra gli Epicurei Lucrezio tramandò ai pensatori dei secoli XVI-XVII lo spirito di Democrito: per lui la materia consta di indivisibili atomi, al di là dei quali esiste solo lo spazio vuoto, e senza di cui si dovrebbe ammettere ogni particella di un corpo composta di un infinito numero di parti, e non ci sarebbe più differenza tra il più piccolo e il più grande. Il mondo per lui è composto di atomi e di spazi intermedi ed è infinito. In confronto dei primi atomisti ha sviluppato il pensiero della continuità: il concetto dei limiti è relativo, un limite assoluto è un controsenso. — Altro epicureo fu Metrodoro di Lampsaco. — In alcuni Epicurei si dà un numero limitato di forme degli atomi, un numero illimitato di mondi, la scomparsa dei mondi singoli come il nostro. — Gli Stoici ammettono infinitamente divisibili spazio, tempo e materia: il mondo è limitato, come lo sono lo spazio e i corpi; invece il vuoto è sconfinato, e il mondo è, contrariamente alla dottrina aristotelica, perituro. Seneca ammette la fine del mondo, sostituendo all'incendio l'annegamento. Altri Stoici (Boezio, ecc.) si attenero alla dottrina di Aristotele riguardo all'eternità del mondo.

I Platonici posteriori combattono la mancanza di un cominciamento nel mondo, per non danneggiare la onnipotenza divina: ciò che nel medio-evo diede origine a controversie sulla eternità del mondo. — I Neo-Platonici ammisero invece la eternità. — Nel rispetto astronomico, Aristarco di Samo fin dal 280 av. C. ammise il movimento della terra intorno al sole, e disse che la via percorsa dalla terra è inosservabilmente piccola in confronto col mondo delle stelle fisse.

Gli Scettici, sull'esempio dei Sofisti e dei Megaresi, si giovarono delle difficoltà dell'infinito. Carneade, ad es., sostiene che ciascuna prova dev'esser provata da una seconda, e questa da una terza, ecc., per non condurre quindi mai ad un risultato sicuro (v. anche Agrippa e Sesto Empirico). — Quanto alla matematica, nel 100 av. C. Erone di Alessandria trattò della radice quadrata da numero negativo, nel « γεηρονικὸν βιβλίον ». — Da una tale epoca in poi il pensiero s'indebolisce, si intralcia; si inclina a porre la divinità, di cui si ha sempre più bisogno, come inconoscibile, assolutamente trascendente, infinita. Perfino nell'estetica, l'ideale non è più la forma perfetta, ma l'indeterminato, l'inafferrabile, l'infinito. Quindi l'idea dell'infinito assume un valore diverso: è la divinità che assume l'attributo di infinito. Ma anche questa determinazione della divinità deriva da speciali considerazioni della filosofia greca classica. Già Aristotele aveva ammesso la forza illimitata del primo motore. Platone nel suo « Parmenide », mentre in generale dice « l'uno » principio limitante, in un luogo lo definisce non costituito di parti, senza principio nè fine, quindi illimitato. Per Platone Dio è eterno e il mondo temporaneo: da ciò non era difficile un passaggio alla dottrina dell'infinità di Dio. Contemporaneamente si fece sentir l'influenza di dottrine orientali. Così si spiega il pensiero dell'alessandrino Filone Giudeo.

Nel Vecchio Testamento si trova qualche accenno all'eternità di Dio: sembra anzi che questa eternità la si ponesse in relazione con la inconoscibilità. Il pensiero orientale assimilò l'elemento platonico della filosofia greca. Filone pone Dio trascendente, privo di proprietà (« ἄποιος »), e la materia infinita. Per altri la divinità è inesprimibile, incommensurabile. — Plotino ¹⁾ pone l'assoluta trascendenza di Dio. Per lui vi sono quattro gradazioni capitali: l'uno o il bene, il Nus e il mondo intelligibile delle idee che è in quello, poi il mondo delle anime, e finalmente quello

¹⁾ Cfr. ZELLER, op. cit., III, 2₃, ecc.

dei fenomeni, a cui sta a fondamento la materia come un assoluto non essere; questa materia è illimitata (« ἄπειρον ») in sè e per sè (« παρ' αὐτῆς »), ed è spiegata come il male; il cosmo è limitato. La sconfinatezza della materia è una pura negazione; è interminabile perchè è nulla: invece l'infinità dell' uno o del bene è in altissima misura positiva, ed è infinita perchè elevata al di sopra di tutte le rappresentazioni. L' infinito è dinamico: l' « uno » lo si deve concepire come infinito non perchè non misurabile in grandezza e numero, ma perchè la sua potenza è inafferrabile. — I Neo-platonici posteriori moltiplicano il numero delle gradazioni plotiniane. — Proclo dice assolutamente infinito solo il più alto grado: anche per lui l' infinito è dinamico. — Damascio pone la trascendenza dell' altissimo a tal punto da non poter esser più espressa dalla « non scienza », ma da una « super non scienza » (« ὑπεράνοια »).

All'epoca dei Padri della Chiesa, nel primo medio-evo, si ebbe un pensiero filosofico dipendente in parte dal sistema religioso, in parte da tradizioni della antica filosofia. Vi fu un'azione persistente del pensiero greco in forme religiose. — Fra i vecchi apologeti, Giustino Martire e i suoi prossimi seguaci si rappresentarono Dio come una sostanza elevata inafferrabile (« ἄρρητον, ἀκατάληπτον, ἀγέννητος, παντοκράτωρ »): il mondo è invece limitato spazialmente. — Origene dice che ove non è limite non è possibile l' afferrare: quindi Dio creò il mondo secondo quantità e numero limitato, ossia con principio e fine: prima e dopo di esso però Dio continua a creare altri mondi ¹⁾. Ma questa dottrina fu tacciata di eretica, e ca. nel 540 d. C. venne condannata da Giustiniano. — Di contro a Origene levossi Agostino ²⁾. Mentre Origene negava anche a Dio la possibilità di concepire l' infinito, Agostino pensa che non si possa qui procedere secondo l'umana

¹⁾ *De principiis*, ed. Redepenning; cfr. HUBER, *Die Philos. d. Kirchenväter*, München 1859.

²⁾ *Civ. Dei*, XI, XII, ecc.; e *Conf.*, XI.

misura: la mente divina può afferrare ogni infinito (« cujuslibet infinitatis capacem »); anche il numero è interminabile, e Dio ne afferra tutta l'infinita serie, quindi esso ha un intelletto infinito. Inoltre Agostino sostiene che lo spazio è soltanto là ove è il mondo: così pure il tempo non esiste prima del mondo ma è stato creato insieme con esso; il che fa pensare a Platone anzichè ad Aristotele. Il mondo fu creato insieme col tempo da Dio, che non è nel tempo ma nella eternità ed è eterno creatore; anche gli angeli sono sempre stati, cioè furono creati insieme col tempo. Agostino ancora combatte l'ipotesi della corporeità di Dio, ammessa da Tertulliano, lasciata indecisa da Origene e Lattanzio: difatti egli dice che se fosse corporeo, Dio avrebbe, per quanto sia infinito, parti limitate, e quindi in tutte le sue parti non potrebbe formare un tutto infinito. Dio è per Agostino trascendente; è infinito per potenza, scienza, santità, bontà, giustizia. — Altri Padri della Chiesa combatterono la dottrina della eternità del mondo. Si diffuse il pensiero che Dio sia infinito e concepibile solo mediante predicati negativi (v. i libri attribuiti a Dionisio Areopagita: cfr. anche Massimo Confessore). — Giovanni Damasceno ¹⁾ (intorno al 700 d. C.) disse che la sola cosa che si può afferrare di Dio è la sua infinitudine e inconcepibilità. — Al cominciare della filosofia propriamente medioevale si presenta Giovanni Scoto Erigena ²⁾, neoplatonico cristiano. Per lui Dio possiede il « non esse » o il « superesse », e oltrepassa la potenza umana di concepire: ha coscienza infinita, è senza principio nè fine, senza spazio, nè tempo, nè moto. — Anselmo d'Aosta, vescovo di Canterbury, dice che Dio, conformemente alla sua natura, sorpassa ogni condizione di spazialità e temporalità, ossia è in ogni spazio e tempo, oppure in nessun spazio e tempo. — Abelardo pone la potenza di Dio limitata dalla sua bontà. — Pel mistico Riccardo di S. Vittore Dio è un essere semplice infinito.

¹⁾ *De orthodoxa fide.*

²⁾ *De divisione naturae.*

Pietro Lombardo ¹⁾ dice Dio onnipotente in ciascuna delle tre persone; e però non c'è che una sola onnipotenza illimitata. Ciò che non può egli, lo può nelle sue creature, e ciò che in lui manca non è imperfezione ma forza sua: sa tanto le cose temporali che le eterne: è dappertutto e in ogni tempo, ma non si muove nello spazio e nel tempo. — Gli Arabi medioevali si attennero ad Aristotele. Tra i Giudei, Ibn - Gabirol pone l'infinitudine illimitata di Dio. — Maimonide nega che ci sia un punto di paragone tra finito e infinito. Tra gli scolastici cristiani, conoscitori e seguaci di Aristotele, Alberto Magno dice: Dio è conoscibile secondo la sua natura e proprietà, giacchè è il principio di ogni conoscenza; può però, come principio primo e finale di tutte le cose, essere attinto, non afferrato e compreso. — Tomaso d'Aquino ²⁾ dice che, giacchè è conoscibile tutto ciò che esiste « actu », Dio come « actus purus » è in sè il meglio conoscibile, sebbene l'intelletto non lo possa ben afferrare; e però la infinità di Dio si fa conoscere per lo più come forma non inquinata dalla materia, essendo la materia, senza forma, sconosciuta. In conclusione per S. Tomaso l'inconoscibilità in stretto senso vien mantenuta solo per l'infinità della materia, mentre l'infinità di Dio è conoscibile, se pure non in modo adeguato a motivo della debolezza umana. Dio è negativamente infinito, perchè la sua essenza da nulla è limitata: ogni perfezione si fonda sulla parte formale dell'essere, e Dio è perfetto perchè forma illimitata (« infinita ») senza materia limitante, mentre la materia infinita senza la forma è imperfetta. — Per Duns Scoto, Dio è la più alta causa agente, l'ultima causa finale e la più alta perfezione, ed è infinito in codeste tre direzioni; il che è articolo di fede e non di dimostrazione filosofica. — Raimondo Lullo ritiene invece ciò razionalisticamente dimostrabile. — Guglielmo Occam combatte questa razionalizzazione. — La tesi aristotelica

¹⁾ *Libri sententiarum IV.*

²⁾ *Summa theol.*, opp. iussu impensaue Leonis XIII edita.

della eternità del mondo diede occasione a dispute, specialmente nella filosofia araba: Ibn-Sina si attenne ad Aristotele, opponendosi alla dottrina religiosa dell'inizio del mondo nel tempo. — Gazali (Algazel) combattè la dottrina della eternità del mondo e della materia. — Fra gli aristotelici spagnuoli Ibn-Roschd (Averroës) sostiene invece l'eternità del movimento e del mondo: il movimento è l'attuazione della materia mediante la forma: il tempo pure è eterno. Egli poi nega l'immortalità delle anime individuali. — L'aristotelismo arabico, introdotto nelle scuole cristiane, fu considerato pericoloso dalla Chiesa: e, come Aristotele, fu condannato Averroës. — Ruggero Bacone, valendosi della matematica, dimostra la terminabilità del mondo. — Duns Scoto lascia indecisa la questione del principio del mondo, di fronte alla ragione naturale. — Bonaventura nega la durata senza inizio. — Lullo pone il principio del mondo, Guglielmo Occam lo ritiene indimostrabile. — Nel medio-evo, ci si servì della impossibilità logica di un regresso all'infinito, sostenuta già da Zenone, per dimostrare la necessità di una causa ultima, Dio. Così fecero Ugo di S. Vittore, Averroës, Tomaso d'Aquino, Duns Scoto; mentre vi si oppose Guglielmo Occam. Del resto Aristotele stesso aveva ammesso un primo motore. — Candido¹⁾, uno scolaro di Alcuino, aveva detto che Dio precede il tempo, non per età (per il tempo) ma per l'eccellenza sua. Tomaso d'Aquino dice che l'eternità è la misura dell'essere stesso, il tempo la misura del movimento: nell'eternità non c'è successione perchè essa esiste affatto contemporaneamente, insieme; tra il tempo e le eternità c'è l'« evo » dei corpi celesti e degli angeli. — Nel medio-evo ancora è trattata la questione della continuità: geometria e astrologia si occupano di grandezze continue, l'aritmetica di grandezze discrete o numeri, e la musica fa altrettanto coi toni. Contese nacquero intorno all'atomistica e alla discontinuità che è

¹⁾ *Candidi dicta de imaginatione Dei*, in Hauréau, (*Histoire de la philos. scolast.*), vol. I, 132 e 135, 1872.

inclusa in essa, e che fu assai combattuta dagli aristotelici arabi, i quali, per esempio, dimostrarono che secondo gli atomisti il lato e la diagonale di un quadrato, constando di un egual numero di punti, dovrebbero esser eguali. — Ruggero Bacone¹⁾ pure ammette la continuità. — Tomaso di Bradwardina dice che è vera quella scienza in cui non si ammette che il continuo sia composto di indivisibili: il continuo può contenere indivisibili ma non risultarne composto: grandezze di una data dimensione consistono a lor volta di grandezze della stessa dimensione.

Già Platone e, prima ancora i Pitagorici avevano posto in grande onore la matematica, rispetto alla filosofia: e ciò avvenne pure nel tempo della rinascenza, nel quale si mirò a scuotere il principio di autorità e a liberare il pensiero. Nuovo incremento ebbero la matematica, l'astronomia, la fisica. Mentre nel medio-evo il mondo è caduco e limitato rispetto all'infinità di Dio, ora i suoi confini si allargano, come si amplifica lo spirito umano. — Nicolò Cusano²⁾, è, si può dire, l'antesignano dei nuovi tempi. Famosi sono i suoi dialoghi dell'Idiota, ecc. In lui vi è un'unione di teologia mistica e di ricerca naturale e matematica. Nel « *De docta ignorantia* » designa la verità come un infinito da presupporre, non mai afferrabile dalla nostra conoscenza finita. A noi è solo concessa la graduale approssimazione delle nostre congetture: persino il singolo finito non possiamo concepirlo completamente, ma continuamente solo per approssimazione: due cose non sono mai interamente eguali, e la nostra conoscenza essendo un misurare e un paragonare, è solo approssimativa e però tale che, mediante supposizioni sempre più probabili cerca di avvicinarsi sempre più al vero. Ma pel Cusano l'infinito è anche un mezzo di conoscenza

¹⁾ *Rogeri Baconis opp. quaedam*, ecc. I. ed. I. S. Brewer, 1859.

²⁾ N. v. C. wichtigste Schriften, deutsch von SCHARPPF, Opp., ed. di Basilea del 1565 (*De docta ignorantia*, *De possess.*, *Idiota*, *De ludo globi*, ecc.); cfr. FALCKENBERG, *Grundzüge d. Philos. d. N. C.*, Breslau, 1880.

essendo ogni cosa derivata da esso. L'assoluto infinito è Dio; e in ciò il Cusano si appoggia a Dionigi Areopagita. Per lui tutti gli attributi positivi di Dio son puri simboli: in Dio cessano tutti i predicati e tutte le opposizioni, come cessano nell'infinito matematico. Anche il mondo è infinito, ma privatamente, nel senso che non ha limiti: non sarebbe nè finito nè infinito: esso non ha centro, nè una quiete assoluta, nè un movimento massimo, giacchè i contrarii massimi sono in Dio solo. La terra è in movimento, contrariamente al sistema tolemaico. Il mondo sarebbe limitato, solo che i suoi limiti non si conoscono. Da una parte il Cusano è tratto ad ammettere che un punto, staccato da un corpo o da una superficie o da una linea, non vien trovato perchè è il principio intimo della indivisibilità; e difatti matematicamente il concetto dell'infinito porta a ciò, che la linea infinita è insieme triangolo, cerchio e sfera. D'altra parte c'è in lui la tendenza mistico-teologica, che lo porta ad un ulteriore sviluppo del pensiero matematico. Gli scritti matematici del Cusano sono quindi quasi in opposizione a quelli metafisici. Importante è il fatto che l'introduzione del minimo come mezzo di conoscenza è in pieno accordo con il suo pensiero generale, secondo cui la conoscenza è un' approssimazione alla verità posta in infinito. Egli combatte l'atomistica e però ammette che tutto, nell'ordine spaziale e temporale, proviene da uno svolgimento dell'unità. Analogamente, il continuo si scinde in parti sempre alla lor volta divisibili, ma nelle parti reali si giunge a un indivisibile attuale, detto atomo, il quale perciò è una quantità indivisibile « actu ». In conclusione, per il Cusano la concezione del mondo si ingigantisce, in quanto non lo considera più nel senso pessimistico medioevale, ma come la manifestazione dell'Altissimo, quindi divino, quindi infinito; inoltre egli aprì la via ai futuri nuovi metodi della matematica mettendo in valore l'infinitamente piccolo, e concepì la conoscenza come un processo approssimativo di fronte alla verità infinita. Il Cusano è un precursore di Coper-

nico¹⁾, ed entrambi può dirsi che promuovono la dottrina dell'infinito di Giordano Bruno. Difatti Bruno estese le conclusioni copernicane sul sistema planetario eliocentrico anche alle stelle fisse, mentre Copernico stesso concepiva ancora l'universo come sferico, racchiudente la sfera delle stelle fisse, immobile nella sua totalità, e però parlava dell'infinitamente piccolo nel senso di così piccolo da non potersi rilevare, come è per esempio degli atomi che non sono corpi visibili ma che associati in una grande quantità formano un corpo ben visibile. — Giordano Bruno è preceduto da alcuni italiani celebri, come Pico della Mirandola, che nega ogni predicato di Dio perchè questi come infinito non può aver nulla in comune col finito. Ficino ritiene il mondo invece perfettissimo in Dio; Cardano pone Dio uno e infinito di potenza infinita ²⁾; Palingenio ³⁾ pone il mondo limitato, ma al di là di esso uno spazio infinito di luce incorporea, e rammenta Lucrezio. — Bernardino Telesio ⁴⁾ combatte la filosofia aristotelica della natura, e definisce lo spazio come una certa capacità di assumere dei corpi, isolandolo dai corpi stessi, anzi supponendo possibile anche lo spazio affatto vuoto, e preparando così il concetto matematico puro dello spazio e la futura intuizione kantiana. — Patrizio ⁵⁾ si riattacca alla dottrina di Palingenio e, analogamente alla concezione di Giordano Bruno, fa il finito contenuto nell'infinito, il quale ultimo corrisponde all'infinita potenza e bontà di Dio che non può creare se non l'infinito, essendo questo più eccellente che non il finito: inoltre egli fa coincidere il mondo infinito con lo spazio, che è capacità di contenere corpi. — Ma il concetto dell'infinito ebbe il suo pieno svolgimento nel pensiero di Giordano

¹⁾ *De revolutionibus orbium coelestium* ed. Societas Copernicana Thorunenses, Thoruni 1873.

²⁾ *De arcanis aeternitatis*, Opp., ed. di Lione 1663.

³⁾ *Zodiacus vitae*.

⁴⁾ *De rerum natura*; cfr. FIORENTINO, B. T.

⁵⁾ *Nova de universis philos.*; *Pancosmia*.

Bruno ¹⁾, che ne fa il caposaldo della sua filosofia, e che perciò va considerato con uno speciale riguardo. Certamente egli subì l'influenza grandissima di Nicolò Cusano, con elementi che serbano qualche traccia di neoplatonismo; si riattacca in parte all'antica atomistica come si presentava nel pensiero di Lucrezio, e in gran parte fu impressionato e deciso dalle scoperte copernicane. Con Giordano Bruno l'attributo di « infinito » non spetta più soltanto a Dio come tale, ma a tutto quanto l'universo che ne risulta divinizzato. Mentre Aristotele diceva che il mondo finito è una conseguenza della sua perfezione, ora il concetto è capovolto e suona così: perfetto è l'infinito, anzi è l'infinito la più alta perfezione, perchè in esso si trovano innumerevoli perfetti. Giordano Bruno rappresenta, più che un sistema, una idea e l'entusiasmo per una idea. Dai documenti del processo veneto, che sembra essere stato il quarto, cronologicamente, dei processi intentati contro di lui, risulta che egli si credeva convinto che la dottrina da lui insegnata valesse a distruggere quella volgare che tiene le menti nella ignoranza. Questa sua nuova dottrina, era suo convincimento che non dovesse mutare, comunque possano mutare i luoghi, le vicende o i tempi: anzi egli ringraziava Iddio che accende in cuore fiamme perenni

« pectusque meum consurgere tanto
Lumine jussisti tantoque calescere ab igne ».

Persino egli pregava di esser trasformato nell'uno e di

¹⁾ Opp. lat. ed. Fiorentino, 1879-1891; Opp. italiane ristampate da Paolo de Lagarde, Gottinga, Kaestner, 1882.; id. id. ediz. Laterza, Bari, 1907-1909 (oltre che la primitiva ediz. di A. Wagner, Lipsia, 1830); cfr. Tocco, G. B. (Confer., Firenze 1886) e *Le opp. lat. di G. B. esposte e confrontate con le italiane*, Firenze 1889; cfr. ancora le opere intorno a Bruno di BERTI, RIEHL, BARACH, ecc. — Del Bruno v. specialmente: *De la causa, principio et uno*; *De l'infinito, universo et mondi*; *De triplici minimo et mensura*; *De monade, numero et figura*.

essere uno per poter vedere il di sopra, il di sotto, il di dentro, il di fuori, il presente, il futuro ed il passato. Kepler, lo scopritore della famosa legge delle orbite, il quale concepì una grande ammirazione per il Bruno e si lagnò che Galileo non avesse costui lodevolmente commemorato nel suo « Nunzio Sidereo », lasciò scritto che anche al momento del suo supplizio Bruno asserì che tutte le religioni sono vane e che Iddio s'immedesima col mondo, col circolo e col punto. E la stessa fede si trova asserita negli atti del processo veneto su ricordato, ove, nella denuncia che Giovanni Mocenigo fa del Bruno al padre inquisitore di Venezia (23 maggio 1592) lo stesso Mocenigo scrive che era opinione del Bruno « che non vi è distinzioni in dio di persone, et che questo sarebbe imperfetion in dio, che il mondo è eterno, et che sono infiniti mondi, et che Dio ne fa infiniti continuamente, ecc. ». Ma questo suo pensiero non è un risultato esploso inaspettatamente ad un dato punto avanzato della sua esistenza, perchè sin dall'età di 18 anni cominciò a dubitare dei dogmi principali della Chiesa e specialmente del mistero della Trinità, giacchè per lui non poteva essere in Dio altra distinzione che quella razionale o logica de'suoi attributi. Dopo alcuni primi lavori giovanili, nel trattato « De sphaera » affrontò alcuni problemi cosmologici. Lo preoccupava la dottrina copernicana, la grandezza e distanza infinita degli astri, la loro abitabilità, la pluralità e infinità dei mondi: e perciò sentì l'affinità del proprio ingegno più con quelli del Lullo, del Cusano, del Copernico, che non con la mente di Aristotele e S. Tomaso. Da Raimondo Lullo trasse però più lo spirito di sottigliezza e di distinzione, rimproveratogli anche dal Leibniz, che non la profondità e la novità del pensiero. Questa gli venne, oltre che per le sue attitudini, anche per l'assiduo studio delle opere del Cusano, di cui si professa discepolo ed ammiratore, e si riflette maggiormente nei suoi libri italiani. Col Cusano aveva comune l'amore alla matematica e alla metafisica, e come lui pensava che ciascuna cosa contiene

tutte le altre e da queste è contenuta; che il massimo ed il minimo coincidono e che i contrarî non fanno che una cosa sola: idee che dovevano più tardi riflettersi anche nel pensiero matematico più recente. Onde la necessità di distinguere nel Bruno due tendenze essenziali: lo spirito dialettico e l'ammirazione pel Lullo, lo spirito metafisico e lo studio del Cusano. Oltre queste influenze, come vedemmo, subì quella delle dottrine copernicane, man mano che si andava liberando dalle dottrine peripatetiche e da tutte quelle in generale che non lo lasciavano uscire dal mondo de' sensi, dei mobili e dei motori. Così gradatamente si faceva strada nel suo intelletto la idea dell'infinito, dalla cui esplicazione per mezzo della matematica e dell'astronomia si aprivano nuovi orizzonti a tutte le scienze. Ma il pensiero dominante era per il Bruno soprattutto il concetto metafisico della identità del reale e dell'ideale, del finito e dell'infinito, del tempo e dell'eternità. Per questo egli non poteva trovar fortuna in Ginevra, ove per gli evangelici la riforma mirava alla innovazione nel dogma, mentre egli vagheggiava una religione naturale, nella quale avrebbe voluto veder sparire tutte quante le forme religiose come altrettanti simboli transitori di quell'infinito ed uno che poggia esclusivamente su un fondamento razionale. Dallo studio del « De Anima » di Aristotele fu indotto egli pure a scrivere un libro « De Anima ». Come sempre, insegnava e componeva insieme: insegnò liberamente filosofia in luoghi disparatissimi, a Tolosa, poi a Parigi, Londra, Oxford, Wittemberg, Praga, Zurigo, Francoforte, pur tacendo delle sue venture in Italia. E, anche nel trattare di Dio e de'suoi trenta attributi divini come veggonsi distribuiti nella prima parte della Somma di S. Tomaso, faceva accenni alla sua propria dottrina, parlando ¹⁾ di Dio non incluso nel tutto e neppure da esso escluso, mezzo di congiunzione e di distinzione, non misurabile nè comparabile, che non è in nessuno neanche

¹⁾ V. anche il *De triplici minimo et mensura*.

in sè stesso perchè è la semplicità medesima, eppure è sè. Nella commedia « Il Candelaio » mirò a deridere la magia, l'alchimia, la pedanteria. Ad Oxford si attirò le antipatie di quei dottori, per insegnar dottrine contraddicenti del tutto alle loro. Difatti egli insegnava che l'anima e il corpo sono entrambi immortali, che il corpo si dissolve e trasforma e l'anima si « transcorpora »; che l'anima è la medesima, in essenza specifica e generica, che quella delle mosche, delle piante e di ogni essere animato, e uno è quindi lo spirito che anima e muove la pianta, l'animale e l'uomo, sebbene diversi sian gli strumenti corporei di cui si vale operando. Egli giunse persino a dire che se si mutassero gli organi di un dato animale in organi umani, quello ragionerebbe come un perfetto uomo, perchè non sarebbe altro che un uomo, e così un uomo si comporterebbe come quell'animale nel caso reciproco: e tutto ciò perchè per lui esiste un'anima immortale che assume ora un corpo ora un altro, ed è una monade semplicissima, la quale ora avvolge attorno a sè gli atomi per agglomerazione ed ora invece li abbandona. Con non minor sicurezza egli andava parlando di abitanti di altri mondi, come di gente non dissimile da noi e in luogo non peggiore del nostro, e vedeva nella sua mente migliaia e migliaia di mondi, i quali ci aiutano a scoprire l'infinito effetto della infinita causa. Dio, pensa Bruno, è presso e dentro di noi come è presso e dentro gli abitanti dei singoli astri; e per tal modo l'anima umana, uscendo dal carcere in cui è, rimira l'infinito universo. Nei dialogi della « Cena de le ceneri » torna il Bruno a sostenere il moto della terra, la pluralità dei soli, l'abitabilità degli astri, e anche l'abbozzo di una sua teoria sull'abbassamento dei monti, ma, soprattutto, l'infinità dell'universo. Esplicitamente l'autore vi ripete che l'universo è infinito, che consta di un'immensa eterea ragione, che in esso sono corpi innumerabili, che esso è « vero soggetto et infinita materia della infinita diuina potenza attuale », e confessa che sente sè stesso animato dalla « infinita unità » verso una

specie di rinnovamento filosofico, a quella guisa che Calvino, Lutero, Knox si credevan chiamati a rinnovar le idee religiose. Uno scritto di capitale importanza del Bruno è quello dei dialogi « De la causa, principio et uno », come pure lo è, e forse in maggior misura, il libro famoso « De l'infinito, universo et mondi », i quali due lavori insieme presi integrano tutto il pensiero filosofico del Nolano e lo fanno eccellere. Specialmente nell'ultimo si rivela l'ingegno sublime di lui. Vi domina l'idea dell'infinito, come quella che in sè accoglie tutta la varietà e verità de' suoi concetti. Difatti l'infinito è Dio, cioè sovrano a cui conviene infinita corte di esseri, perchè vuol essere glorificato non in un sole unico ma in soli innumerabili, non in una terra o in un mondo, ma in dieci, in centomila, in infiniti. Analogamente l'uomo percorre la infinita vicenda degli esseri; nè v'è male da cui non esca, nè bene che non consegua. Nè per l'uomo nè per sostanza alcuna non si dà morte, giacchè nulla essenzialmente può diminuirsi, ma tutto per l'infinito spazio scorrendo cangia l'aspetto. Interlocutori in codesto dialogo sono il Fracastoro e Alberico Gentile. È facile vedere quanto profonda fosse la concezione del Bruno, la quale non è affatto lontana dalle conclusioni della scienza dei nostri giorni. Nè meno efficace fu il Nolano nello « Spaccio de la Bestia trionfante », libro d'indole non più metafisica ma morale, in cui proclama la religione naturale e nega tutte le religioni positive, mettendo in un fascio paganesimo, giudaismo, cristianesimo, maomettanismo. Suo pensiero è che tutte le religioni debbano sottostare alla ragione, poichè gli dei sono inabili e la sola verità non invecchia, ma dura immortale, sorretta dalla sua ancella la filosofia: nume universale è adunque la ragione, la quale sola può giudicare e comparare, sostituendosi alle religioni e spogliandole dei nomi e delle forme individuate. La semplice divinità si rinviene in tutte le cose, riluce in diversi soggetti e prende nomi diversi. E questi pensieri riescono ad accordarsi colla idea suprema dell'uno infinito e razionale. — A Parigi il Bruno

trovò nel 1586 un difensore strenuo delle sue tesi in Giovanni Hennequin, il quale, secondo lo spirito del maestro, vuole a fondamento di tutto lo scibile la dottrina dell'infinito secondo i recenti studi astronomici, accenna anch'egli agli infiniti mondi in confronto di cui la terra è un piccolo atomo sospeso nell'immensità dello spazio, e accoppia alla metafisica l'interesse destato dall'astronomia. — A Wittemberg il Bruno, pur dovendo leggere in pubblico astronomia, fisica, matematica, e commenti all'« Organon » aristotelico, si lascia ancora andare a parlar di miriadi di mondi, di sinodo di stelle, di abitanti ragionevoli disseminati per tutti i mondi, della terra come atomo che non eccelle affatto sulle innumerevoli altre terre moventisi nello spazio etereo infinito, dell'ordine perfetto della metafisica e della natura, e delle leggi uguali e costanti che determinano tutto. E anche lì si pone in contraddizione con la dottrina cristiana, che conferisce alla nostra terra un posto di preminenza come a quella che è teatro della redenzione dell'uomo e dell'opera di Gesù Cristo; perchè convinzione del Bruno era che le verità scoperte da Copernico, e contrastate tanto da teologi che da peripatetici, dovessero suggerire una nuova filosofia, e quindi anche teologia e religione nuova. Egli predicava esservi una fisica ed astronomia nuova, e così pure una nuova matematica, le quali sono vere scienze perfette e perciò esigono anche una filosofia e una teologia religiosa che non le contraddica, come invece accadeva della filosofia e della religione imperanti. Per questo reclamava la libertà filosofica, nel senso che l'opinione è giudice di sè stessa e quindi, se può combattersi, non deve esser sottoposta a una specie di magistratura suprema teologica. Nondimeno quest'uomo, che combatteva tanto energicamente le idee aristoteliche, insegnava le categorie, la ermeneja, gli analitici, i topici e la confutazione dei sofisti di Aristotele. Se il soggiorno in Inghilterra aveva fruttato due suoi capitali lavori filosofici, quello posteriore del Bruno in Francoforte dopo la partenza da Wittemberg, ci diede il « De triplici

minimo et mensura », che è pur ricco di concetti filosofici; indi il « De monade, numero et figura » diviso in tre libri, e il « De imaginum et idearum compositione ». Soprattutto il secondo, il « De monade », è importante, perchè può dirsi riassuma tutta la sua dottrina. In quest'opera, gettata in forma metrica a imitazione degli antichi e specialmente di Lucrezio, è una profondità singolare d'ingegno e la fede sicura nel rinnovamento scientifico, politico e religioso del mondo. L'autore vi parla del suo immenso affetto per la sua donna, la sofia, la verità, ed ha frequenti accenni ai travagli suoi e di coloro che tutto sacrificano per attingere senno e dottrina alle fonti di sofia. — Venuto finalmente il Bruno in Venezia nell'ultimo decennio di sua vita, vi trovò, come è noto, dapprima la benevolenza e di poi il malo animo di Giovanni Mocenigo. Non lungi era lo Studio di Padova, ove convenivano uomini quali Realdo Colombo, l'Acquapendente, il Falloppio, Pomponazzo, Fracastoro, Santorio, Galileo e altri moltissimi, fra cui il Valliero, Francesco Patrizi, Bembo, Telesio, Giovio, Campanella, Sidney, Tasso, Sagredo. Il Bruno vi accorreva spesso, ma forse non poté assistere alle lezioni di Galileo. A Venezia compose fra l'altro il « Libro delle sette arti liberali » e quello « Predicamenti di Dio ». Tradotto dinanzi al tribunale inquisitore, egli fu costretto a esplicare il proprio pensiero, mentre venivano sottoposte ad esame le sue dottrine. Fondandosi sul fatto che già in Italia in pieno secolo XVI più che la teologia di un S. Bonaventura, o S. Tomaso, o S. Anselmo, o Pietro Lombardo, fiorivano le filosofie di Platone e di Aristotele, che giusta l'opinione del Cremonini e di altri la stessa filosofia aristotelica si dipartiva dal dogma, e che già da alcune decine d'anni si disputava intorno all'immortalità dell'anima ancor prima della comparsa dell'opera del Pomponazzo, rispose il Bruno ai giudici veneziani che la sua filosofia si allontanava dalla fede non meno che quella di Aristotele e di Platone. Confermò inoltre di credere in un universo infinito sia in grandezza che per moltitudine di mondi, i quali sono

simili al nostro; disse che l'universo è governato da una legge generale e costante, la Provvidenza, che i tre principali attributi di Dio sono mente o potenza, intelletto, e amore, in virtù di cui le cose hanno prima l'essere, poi l'essere ordinato e distinto, poi la concordia e simmetria. Creazione è la dipendenza del mondo dalla prima causa; spirito divino è per lui, nei termini della ragione naturale, l'anima dell'universo, ecc. Di altre sue opinioni, che più sapevano di eresia, come quella che Gesù Cristo avesse fatto miracoli apparenti, che non vi è punizione di peccati, che le anime passano da un corpo all'altro e nascono da corruzione come tutti gli altri animali, che era necessaria una riforma generale, e di tante altre, sembra si sia mostrato dolente. Tradotto a Roma per volontà del Pontefice e dinanzi al Sant'Uffizio, il processo andò molto per le lunghe. Gli si imputavano come capi di eresia le opinioni contrarie al dogma della verginità di Maria e della transustanziazione, e le affermazioni (tolte dai libri che egli aveva riconosciuti per suoi, e in parte soltanto dalle denunce del Mocenigo), che le anime passano non solo dall'un corpo all'altro ma dall'uno all'altro mondo, che la stessa anima può informare due corpi, che lo Spirito Santo equivale all'anima del mondo, che questo è eterno, che Cristo non è Dio. La pluralità dei mondi, sostenuta dal Nolano, contraddiceva a quella astronomia teologica che derivava la sua forza dal sistema tolemaico e poggiava anche sull'autorità della dottrina di S. Tomaso. Dante nel « Convito » ci ricorda egli pure questa concezione astronomica di un empireo, quieto e pacifico cielo. Una tale astronomia conservava la terra al centro del mondo, si estendeva all'ottavo cielo, comprendeva il primo mobile; e la teologia se l'era immesimata completamente. Ora il parlar di mondi innumerevoli in base a scoperte scientifiche, il dedurre la idea metafisica dell'infinito e di infiniti sistemi planetari affini al nostro, facenti capo ad un solo sistema, a quella guisa che gli abitanti degli infiniti mondi formano un solo universo

intellettuale, in modo che l'infinito fisico e l'infinito delle intelligenze si toccano e confondono nell'infinito essere cioè Dio o la monade universale (anticipazione della monade leibniziana), era una contraddizione non solo di fronte al dogma, ma ancora alla scienza assorbita nella teologia; era un opporre alla astronomia teologica una teologia scientifica astronomica. E tanto innanzi egli era andato, che Kepler, ricordando a Galileo i meriti del Bruno, gli faceva osservare come alcune delle verità illustrate nel « Saggiatore » si trovassero già nei libri del Bruno, i quali poi alla lor volta molto dovevano alla teoria di Copernico. Soprattutto l'Inquisizione avversava, assai più che non la teoria del moto della terra, quella degli infiniti sistemi di mondi, come opinione panteistica contraria ai dogmi; opinione che però fu sostenuta allora dalle menti più elette, come per esempio dal Campanella, che la indovinava nei dialogi di Galileo intorno ai due massimi sistemi tolemaico e copernicano, e da quelli che erano in grado d'intendere le grandiose visioni di un Copernico, di Bruno, Galileo, Kepler, soverchianti i sistemi teologici e tolemaici che potevan star benissimo racchiusi, come diceva lo stesso Bruno, nello stretto cervello di Aristotele. L'Inquisizione non comprendeva che, come diceva Galileo, era maggior gloria per Iddio creatore l'adornarsi di codesti mondi innumerevoli che non del misero sistema tolemaico. Strano è però che, data questa grande affinità intellettuale tra il Bruno e il Galilei, quest'ultimo non lo menzioni mai, sebbene ciò possa ascriversi a prudenza da parte di Galileo. Nel processo romano, che durò parecchi anni, furono imputate al Bruno due sorta di eresie, le une provenienti dai libri, le altre dai processi. A noi interessano in modo speciale le eresie dei libri, come quelle attinenti alla teoria filosofica e al sistema copernicano. Tali erano la identità del male e del bene, le trasformazioni degli esseri, la trasmigrazione delle anime, lo spazio e il tempo infiniti, il principio dell'universo nell'uno. Queste eresie, che erano dette nuove in confronto di quelle dichiarate tali

da antichi Padri della Chiesa e dalla Sede Apostolica, erano quelle a cui il Bruno meno voleva rinunciare, perchè con l'abjura di queste si sarebbe veduto costretto ad abbandonare i cardini del suo pensiero innovatore, il moto della terra, pluralità dei mondi, identità del finito e dell'infinito, dell'uno e del tutto. L'essere, per il Bruno, è impersonale, è infinito, e in ciò si differenzia dal concetto dell'essere morale, essendo, più che una entità personale, una specie di « natura naturans », a un di presso come in Spinoza, una sostanza unica ed infinita che si esplica secondo una legge di intrinseca necessità, un essere infinito metafisico, una identità del finito e dell'infinito. Per Bruno il mondo è eterno, quindi opposto al mondo creato della Chiesa; è una infinità di mondi e perciò si oppone al concetto e alle dimostrazioni aristoteliche di un mondo finito sferoidale e muoventesi tutto intero. Le determinazioni della posizione spaziale, il sopra e il sotto, sono in Aristotele assolute, giacchè si dà un punto centrale e una periferia, mentre per il Bruno sono di natura relativa, come lo spazio ha soltanto confini apparenti, specie di orizzonti che si possono sempre oltrepassare. Questi due concetti del relativo e della possibilità infinita ricorrono assai sovente nel pensiero del Bruno, che li illustra anche con questo esempio: la terra ci appare grande e la stella piccola, mentre se ci potessimo trasferir nella stella, vedremmo quella grande e la terra piccola. Per tal modo non si dà un vero grande e un vero piccolo, un veramente lontano e un veramente vicino, ma si indovina qui il pensiero dominante della identità dell'uno e del tutto, del finito e dell'infinito. Lo spazio è per il Bruno press'a poco ciò che era per il Telesio, ossia la capacità o « attitudine » ad assumere dei corpi, prima e al di là e dopo di questi: perciò è illimitato, infinito. Poichè è meglio l'essere che il non essere, e l'essere infinito anzichè finito, così Dio, conformemente al suo essere, potere ed agire, non può che produrre un infinito numero di mondi, separati da una materia senza qualità, un

etere, uno spazio infinito. Il mondo nella sua totalità, nell'esser suo universo, è infinito ma le sue parti sono finite, e però corrisponde all'infinita potenza, intelligenza e bontà di Dio. Questo modo speciale del Bruno di considerar l'universo illimitato ma risultante da singoli sistemi determinati, anzi analogi al sistema planetario, fa supporre che in lui il pensiero dell'infinito fosse già molto astratto, come quello di una possibilità di procedere al di là di una ultima sintesi sia pure di provenienza empirica. Difatti egli nel « De l'infinito, universo et mundi » parla esplicitamente di quella capacità dello spirito di volere e potere aggiungere spazio a spazio, massa a massa, unità ad unità, numero a numero, e perciò afferma in certo qual modo la impossibilità di una sintesi definitiva e lascia aperta la questione della sintesi infinita. Con la sua teoria della infinità dei mondi il Bruno assume un atteggiamento deciso contro Aristotele, e piuttosto si pone in rapporto diretto con le scoperte astronomiche e scientifiche recenti, e indiretto con la teoria dei mondi innumerevoli di Democrito ed Epicuro. Alcune affermazioni del Bruno lasciano però adito a discussioni: così, p. es. i suoi « minima » non sono minimi assoluti, non esistendo per lui la dimensione assoluta. Essi potrebbero considerarsi come assoluti ultimi termini dal punto di vista geometrico e matematico, sebbene siano anche lì in contrasto con la concezione dello spazio come di un continuo. A questo proposito è notevole il fatto che nel « De triplici minimo et mensura » combatte coloro che proclamano la impossibilità dell'atomistica, come di quella dottrina che contraddice ai famosi teoremi geometrici sull'irrazionale e sulle grandezze incommensurabili. Difatti, egli dice, le considerazioni intorno a queste grandezze provengono dal non riconoscere i « minima », i quali a cagione della loro piccolezza inosservabile possono in apparenza scambiarsi con un continuo indifferente. E se parti infinitamente piccole appena si toccano devono coincidere, ciò significa per Bruno che il minimo è scambiato per un termine, mentre il più piccolo

corpo è pur sempre un corpo e tocca gli altri corpi soltanto al limite; onde tra due piccolissime (minime) sfere vi sarà sempre spazio, ecc. Questi concetti, che per la loro precisione teorica hanno molta importanza, specialmente posti in confronto con le speculazioni posteriori sull'infinitamente piccolo, non alterano affatto il significato del pensiero dominante della vita e della dottrina del Bruno, il quale per esso sopportò il supplizio; il pensiero di un universo infinito, di una natura che oltrepassa ogni limitazione, conforme in ciò all'illimitato spirito divino, ed è quindi non alcun che di definito, ma l'uno e il tutto, l'infinito, il determinato, il grande, il piccolo, il vicino, il lontano. Quindi in Bruno può già vedersi, oltre che la idea di un universo illimitato, il significato teorico-conoscitivo della medesima, in quanto corrisponde, più che alla positiva e del resto impossibile constatazione di un infinito, alla impensabilità di un limite assoluto. — Il Campanella ¹⁾ presuppone già la presenza della idea dell'infinito nel nostro spirito, il quale vede bensì l'infinito come corporeamente esteso, per la ragione che egli stesso è « corporato », ma non esclude che il principio infinito sia incorporeo. Campanella esclude l'infinito dal « principiatum » e lo riserva soltanto al « principium », alla Divinità: invece nel campo del creato vi è un massimo assoluto e finito che è il mondo, ed un minimo assoluto che è l'atomo. Ma respinge tanto l'atomo di Democrito, il quale presuppone una materia non più originaria ma già ridotta in una forma, quanto la divisibilità infinita affermata da Aristotele, giacchè in tal caso dovrebbe ammettersi che in un granello di miglio sian tante parti quante nell'intero mondo. Inoltre combattè il sistema copernicano e l'infinito numero dei mondi materiali. — Galileo ²⁾ non pare abbia risolta la questione se il mondo sia finito od infinito: però la tesi

¹⁾ *Universalis phisosophia seu res metaphysicae*, Opp., tom. IV. Parigi 1638.

²⁾ *Dial. intorno ai due massimi sistemi del mondo*, Firenze 1632.

aristotelica del mondo limitato gli sembra caduca, perchè si può contestare che l'universo sia mobile nella sua totalità, come egli afferma nella « giornata terza » dei « Dialogi intorno ai massimi sistemi ». È anche indeciso se per Galileo tutto l'universo sia finito o infinito, giacchè egli crede piuttosto che questa questione sia insolubile nei termini della scienza umana. È invece notevolissimo ciò che Galileo insegnò riguardo al moto, alle leggi di caduta e di inerzia, alla intensità di movimento, agli atomi e alle parti non quantitative, che aprirono il campo al progresso del pensiero matematico sull'infinito: ma di ciò avremo occasione di parlare più innanzi. — Kepler ¹⁾ combatte la infinità dei mondi: invece il mondo è limitato in forma di palla dalla sfera delle stelle fisse. Egli ritiene applicabile all'universo l'antico argomento che infinite parti dovrebbero costituire non un corpo finito ma uno infinito; si sentiva avverso a questa ipotesi, sebbene ammirasse grandemente il Bruno.

Gassendi ²⁾ combatte pure l'infinità del mondo, perchè per lui l'infinita potenza di Dio può far cessare il mondo ove le piaccia. Però tempo e spazio sono infiniti e come tali sono indipendenti da ogni essere pensante e vanno al di là dei limiti del mondo. — Così a cominciare dal tempo della Rinascenza il problema dell'infinito aveva assunto un valore più alto, attraverso le dispute intorno al mondo limitato e illimitato, temporaneo od eterno, oltre che per la novità del pensiero di Nicolò Cusano, e per le stesse continue opposizioni di principi e anche di passioni, per il discredito in cui man mano era venuta cadendo la scolastica aristotelica, per la rispettiva confusione dello spazio con i corpi contenuti in esso. Quest'ultimo difetto formò la preoccupazione della nuova matematica, la quale cominciò subito dall'isolare il

¹⁾ *De stella nova in pede Serpentarii*, 1606, in Opp., ed. Frisch (v. la *Dissertatio cum Nuncio Sidereo*, 1610; e *Epitome Astronomiae Copernicanae*, 1618.

²⁾ *Exercitationes paradoxicae*; — *Syntagma philosophicum*, Opp. Lugd. 1658.

concetto di spazio, ed a trattare separatamente le questioni inerenti allo spazio puro, mentre Aristotele non aveva distinto bene questo concetto nel combattere l'atomistica, e da ciò era derivata una confusione che perdurava ancora nel medio-evo e nei secoli XV e XVI. — Eilhard Lubin dimostrò (1596) che la divisione in infinito contraddice alla necessità di fissare un momento nel tempo, e perciò rende impossibile la creazione del mondo. — Ma già parecchi anni prima, ancor verso la metà del 1500, il filologo Giulio Cesare Scaligero ¹⁾ aveva proclamato, contrariamente ad Aristotele, che lo spazio non è la superficie circondante i corpi, ma ciò che in essa è contenuto, e sosteneva che in natura ci dev'essere un vuoto ove possa avvenire il movimento, ma che questo vuoto è quello in cui il corpo si trova ed equivale allo spazio, al luogo. Questo è di tal natura, che, quando un corpo fa posto a un altro, si deve fare un vuoto, il quale deve poi venir riempito: e, allo stesso modo che il vuoto è il principio del moto, la « privatio » è il principio del prodursi. — Ramus ²⁾ giunse a concetti ancor più chiari quando disse che, anche ammessa la divisibilità infinita col continuo matematico, questa non potrebbe convenire alle grandezze sensibili della fisica, le quali sono soltanto finite e finitamente divisibili. Lo spazio è per lui non il limite del corpo ma il contenuto tredimensionale, giusta la dottrina platonica. Così pure altri autori separarono lo spazio sia dai corpi che dalla lor superficie, e resero possibile anche la separazione della matematica dall'atomistica. Fra essi è Daniele Sennert ³⁾, che nei primi anni del secolo XVII si dedica a stabilir le differenze tra il continuo matematico e quello fisico, e dello spazio pensa che sia eguale al contenuto dei corpi, come già egli ne trova

¹⁾ *Exotericarum exercitationum liber ad Hieronymum Cardanum*, Hannover 1634 (Parigi 1557).

²⁾ *Physicarum libri octo in totidem acroamaticos libros Aristotelis*, Parigi 1565.

³⁾ *Epitome naturalis scientiae*, 3 Aufl. 1633.

conferma negli Stoici, negli Accademici, in Galeno, e nel peripatetico Filopono, poi recentemente in Scaligero. Risultato di questo indirizzo di pensiero è che l'atomo deve ritenersi come cosa sì fissa e dura da non poter dar luogo a suddivisione o taglio, e non come una cosa priva di grandezza a guisa di un punto matematico. — In questo senso Gassendi separa nettamente fisica e matematica, e fa della geometria una scienza puramente speculativa alla quale soltanto compete la divisibilità illimitata, mentre le premesse della scienza pura (matematica) non possono applicarsi che in via approssimativa alla natura. Perciò è evidente la conseguenza: la teoria corpuscolare e più specialmente l'atomistica resta nel campo fisico, la dottrina della continuità o della divisibilità infinita rimane nel campo matematico. — Una specie di eccezione a questa convinzione generale è il pensiero di Cartesio. Per Cartesio l'unica proprietà della materia è l'estensione, onde il corpo si identifica nuovamente con lo spazio. Nei *Principia Philos.*, Pars II, 4¹⁾ egli dice che la natura della materia o del corpo in generale consiste nell'essere esso esteso in lunghezza, larghezza, e profondità. Persino gli atomi se esistessero sarebbero estesi, e ciò che nessuna creatura potrebbe dividere, potrebbe sempre esser diviso da Dio il quale non può limitare la sua potenza. — Rohault²⁾ pure attribuisce alla materia estensione, divisibilità, figura, impenetrabilità. Queste teorie contraddicevano alla già ammessa separazione di fisica e matematica, corpo e spazio, e perciò trovarono oppositori. — Ottone di Guericke³⁾ difatti ritorna all'idea dello spazio come di un « vas aut continens », in cui tutto si muove, e in cui si astrae da ogni proprietà della natura materiale: tanto è vero che un corpo può riempire uno spazio o non riempirlo, ma nessun corpo forma in sè lo spazio. — Hobbes

¹⁾ Ediz. 1656 (Elzevir); V. ancora la lettera a Chanut, e le Opp. ediz. COUSIN.

²⁾ *Traité de physique*, I Aufl. 1671.

³⁾ *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica*, ecc., 1672.

andò ancora più in là. Lo spazio, egli dice, è un fantasma, che resta ancora quando noi nel pensiero sopprimiamo tutte le cose meno il fatto che esse erano fuori dello spirito, e perciò è soltanto la pura possibilità di venir occupato dai corpi: così è pure del tempo. Egli combatte l'atomistica e sostiene l'infinita divisibilità di spazio e tempo. Da una parte, adunque, separazione della fisica atomistica dalla continuità matematica; dall'altra ancora scambio dei concetti di spazio e corpo, come si verifica anche più tardi in Bayle, Collier, Berkeley, Hume. — Ma la corrente che doveva produrre maggiori risultati era quella che nettamente poneva i termini del problema, affrontando risolutamente il lato più grave della questione, quello della continuità: e questa era la corrente matematica. Come già Aristotele aveva detto che grandezze continue non posson mai ridursi con la suddivisione in parti ultime, e gli antichi matematici avevan dimostrato che ci si può avvicinare a grandezze continue mediante processi di divisione sempre continuati, così si era giunti a ricondurre proposizioni concernenti linee continuamente curve, a proposizioni relative ai poligoni, in modo da far coincidere una infinitamente piccola porzione di circonferenza con il lato di un poligono regolare di un numero infinito di lati. Leonardo da Vinci ¹⁾ disse ogni quantità continua essere intellettualmente divisibile in infinito, ponendosi così in accordo con la tendenza a separare appunto il campo puro, intellettuale, matematico, da quello empirico, fisico, atomistico. — Benedetti (1585) cercò dimostrare la continuità del movimento anche là dove esso diviene infinitamente piccolo: Mich. Stifel (1544), quasi mezzo secolo prima, aveva spiegata la circonferenza come un poligono di infiniti lati; e analogamente Kepler determinava la superficie del cerchio ²⁾. — Intanto un nuovo

¹⁾ Scritti pubbl. da I. P. Richter, London, 1883, ecc.

²⁾ Cfr. le seguenti due opere importanti: GERHARDT, *Die Entdeckung d. höheren Analysis*, Halle 1855; e G. VIVANTI: *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione matematica*, Mantova, Mandovi 1894.

concetto si introduceva nella matematica, quello del movimento. — Cavalieri fa nascere le superfici mediante movimento di linee, quantunque al concetto del continuo accompagni, come mezzo ausiliario del calcolo, gli indivisibili. — Guldin invece distinse chiaramente tra origine di linee mediante movimento di un punto, e composizione di linee. — Galileo riteneva che proposizioni, le quali valgono per grandezze finite, non possono senz'altro presupporci giuste quando si passa a grandezze infinitamente piccole. Così egli pensa che, trattandosi dell'infinito, gli attributi « uguale, maggiore, minore » non han più ragione d'esistere, poichè valgono solamente pel finito; una linea contiene un numero di parti che non è nè finito nè infinito, ma corrispondente a qualsivoglia numero dato; e nei « Dialogi intorno ai massimi sistemi, giornata prima », a proposito del moto uniformemente accelerato, afferma che ciascun « grado » di velocità non è conservato per un tempo finito ma per un istante. In Galileo ritorna un pensiero che già era in Giordano Bruno e anche in Nicolò Cusano, essere cioè l'infinito realizzato nell'unità; la quale unità è uguale a ciascuna sua potenza e contiene perciò tanto quadrati e cubi quanto numeri semplici, come un punto e una circonferenza divengono eguali fra loro quando si fa diminuire una sfera ed un corpo ad essa eguale in forma di scodella. A ciò si opponeva Cartesio, che obbiettava potersi soltanto concludere che la linea non è un « corpo » più grande del punto, ma non che entrambi assolutamente considerati siano eguali; al qual proposito torna acconcio osservare che Cartesio partiva dall'idea che, mentre spesso si parla dell'infinito come se lo si concepisse, lo spirito umano come limitato non può concepire l'illimitato e l'infinito. In una lettera a Mersenne egli accenna a un tutt'altro concetto del movimento che non quello di Galileo, secondo cui un corpo, posto in movimento deve percorrere tutti i gradi della velocità; perchè — egli dice — un corpo grande e interamente rigido urta uno piccolo e fermo nella stessa guisa

che gli è inerente, ossia il piccolo assume subito la velocità finale del grande, altrimenti il grande dovrebbe avere per un certo tempo una velocità minore e persino passare alla quiete, ciò che non può pensarsi. Così per Cartesio non ha valore il paradosso zenonico di Achille e la tartaruga, perchè con l'aiuto delle serie geometriche convergenti si può dimostrare che il vantaggio della tartaruga, ammessa la sua velocità $= \frac{1}{10}$ di quella di Achille, è di $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ ecc. del vantaggio originario, e quindi in ogni caso tenderà a $\frac{1}{9}$ di questo vantaggio, ma non all'infinito, sebbene a ciò ci conduca la nostra immaginazione. — Se Cartesio poneva queste così nette distinzioni, Hobbes ¹⁾ per altro verso si opponeva ad ogni considerazione dell'infinito nell'aritmetica e nella geometria, perchè linee senza una larghezza non sono rappresentabili; però egli ammette che nella considerazione della lunghezza si esclude quella della larghezza. — Fermat allarga il concetto dell'eguaglianza, dicendo che due grandezze devon trattarsi come eguali (« adaequare ») quando la loro differenza può esser fatta più piccola di qualsivoglia grandezza. — Roberval in una sua lettera a Torricelli sostiene gli indivisibili e la composizione di linee da linee, di superfici da superfici, ecc., in numero infinito od indefinito. — Pascal afferma che punti aggiunti a linee, linee a superfici, superfici a corpi non alterano ciò a cui sono aggiunti. — Wallis, già a metà del secolo XVII, concepisce il limite come qualcosa che diviene, giacchè parla di differenza che diviene più piccola di qualunque assegnabile. — Barrow ²⁾ indica il movimento spaziale come il più importante modo d'origine di figure geometriche, come nella produzione delle curve: a ciascun momento del tempo o istante o particella indefinitamente piccola di tempo, corrisponde un grado della velocità ed uno spazio percorso. — L'influenza del pensiero di Barrow molto si fece sentire in

¹⁾ Opp. lat. ed. Molesworth (Princ. et problem. aliqu. geom.).

²⁾ *Lectiones opticae et geometricae*, Londini, 1674.

Newton ¹⁾, che stabilisce nettamente che le grandezze matematiche non consistono di particelle minime, ma sono descritte da un movimento continuo: le quantità hanno origine per accrescimento, e diminuiscono o crescono a seconda della maggiore o minor velocità di quell'accrescimento, ossia della flussione che dà origine alla quantità fluente. Inoltre Newton parla di quantità evanescenti. e e quindi non di indivisibili, ma di divisibili evanescenti. Suo grande merito è l'aver posto in rilievo il concetto del movimento, ossia di un decorso continuo: ma di ciò avremo occasione di parlar più innanzi. — Intanto continuava a discutersi il problema dell'infinito nel campo strettamente filosofico-speculativo anche in rapporto alla conoscenza, cercandosi di spiegare o l'infinito mediante il finito o viceversa il finito mediante l'infinito. Nelle « Meditazioni » di Cartesio è detto che l'« io » trova in sè stesso la idea di Dio come di una sostanza infinita; ma, come abbiamo visto, questa idea non può derivare dall'« io » sostanza limitata, bensì da una sostanza infinita reale che da noi non è concepita ma intelletta (intelligi). Questa sostanza non è solo conosciuta negativamente in quanto non ha limiti, ma anche positivamente, però non in modo adeguato, perchè insomma non si può determinare ciò che è e ciò che non è l'infinito. Nondimeno l'esistenza di questo infinito è ammessa, ed anzi si estende non solo a Dio ma al mondo, che è illimitato: nel che Cartesio insiste sino a dire che, quanto più noi apprezziamo l'opera divina, tanto più osserviamo l'infinità della sua potenza, salvo che nel mondo troviamo l'indefinito, e in Dio l'infinito, positivamente riconosciuto nel miglior modo per noi possibile chè è nello stesso tempo il meno adeguato rispetto a Dio. Tale agnosticismo si continua in alcuni cartesiani puri, e sarà invece combattuto da altri come Spinoza. — Tra i primi sono Antonio Arnauld e

¹⁾ Newtoni Opera ed. Horsley (*Principia philosophiae naturalis mathematica*, 1687).

Pietro Nicola ¹⁾, dal pensiero dei quali appare che l'infinito è quanto di più certo e anche di meno pensabile, e che materia e spazio, fisica e matematica non sono tra loro ben separate. — Malebranche ²⁾ è nello stesso ordine di idee, giacchè sostiene ancor più di Cartesio l'agnosticismo; dice persino che la divisibilità infinita della materia è dimostrata, ma non si può comprendere. — Invece, come dicemmo, Spinoza ³⁾ si pone da un punto di vista opposto, e sembra accostarsi, più che non i cartesiani puri e i giansenisti, a Giordano Bruno. Difatti nel piccolo trattato di Dio, dell'uomo e della sua beatitudine, ecc., egli considera già la natura come infinita nella sua totalità e perfettissima, e (ciò che qui importa in confronto della dottrina cartesiana), affermata dalla ragione anzichè dall'intelligenza intuitiva. Spinoza pone pure un mondo spazialmente infinito: quanto alla causa, ciò che è causa di sè stesso non può aver limitato sè stesso. Nell'« *Ethica*, ecc.» si parla di Dio come di una sostanza assolutamente infinita, consistente di infiniti attributi, dei quali ciascuno esprime per suo conto una essenza infinita ed eterna. Ora la sostanza concepita come puro essere deve naturalmente essere illimitata, giacchè non si danno due di tali sostanze. L'infinito è concepito in guisa trascendente, ed è indivisibile come è semplice e unico e perciò illimitato. La eternità è esistenza necessaria e non può esprimersi con la durata o col tempo, i quali ultimi sono soltanto una indefinita continuazione dell'essere. Altrove Spinoza distingue ciò di cui la infinità può dedursi dalla sua natura o per forza della sua definizione, e ciò che non ha limiti non in forza della sua essenza ma della causa sua; ossia la sostanza eterna indivisibile semplice e i modi di essere. Entrambe queste classi sono specie

¹⁾ *Logique ou art de penser*, 1664.

²⁾ *Recherche de la vérité*, 1674.

³⁾ Cfr. la traduz. tedesca del breve trattato (*Di Dio, dell'uomo*, ecc.) per C. SIGWART, 2. ed.; l'*Ethica*, etc., e la lettera a Ludwig Meyer del 1663 (ed. Bruder).

dell'infinito senza limiti; oltre queste ve n'ha una terza che non si può esprimere con alcun numero, e di cui un esempio sarebbe il numero delle linee di differente lunghezza e medesima direzione comprese tra due circonferenze interne l'una all'altra eccentriche. Ma la quantità per Spinoza può esser afferrata o dall'intelletto puro, come sostanza infinita, indivisibile, unica; oppure astrattamente nel senso di qualcosa di separato dalla sostanza e quindi superficiale, afferrabile mediante la rappresentazione intuitiva col soccorso dei sensi, ed è allora divisibile, finita, composta, varia. A quest'ultima specie di rappresentazione appartengono i concetti di tempo, misura, numero, che sono modi dell'intelletto, non infiniti e quindi aventi nulla a che fare con le classi su citate. La sostanza è invece l'assoluta posizione, l'essere senza limitazioni, l'infinito, il quale è poi anche il più profondamente conosciuto, perchè Dio come essenza infinita è interamente nel dominio della ragione. — Mentre un pieno razionalismo si affermava con Spinoza, altri filosofi insistevano invece sulla conoscenza come funzione tecnica e pratica, e battevano quindi la via opposta, quella dell'agnosticismo. In Inghilterra in special modo si verificò questo fatto. — Bacone da Verulamio ¹⁾ trovava vana la distinzione tra un « infinitum a parte ante » e uno « a parte post », perchè con ciò si supporrebbe che si dia un infinito diverso e maggiore di un altro infinito: per Bacone lo spirito umano non può arrestarsi o acquietarsi e tende sempre più in là, ma invano. — Hobbes ²⁾ fa derivare la conoscenza delle cause dagli effetti e quella degli effetti dalle cause, e pone per scopo alla conoscenza uno scopo utile all'uomo. Intorno all'al di là rispetto al mondo preso come tutto, si posson solo far questioni, senza determinar nulla, perchè una scienza dell'infinito è inaccessibile a noi finiti; anche procedendo sempre da un ultimo effetto nuovamente alla sua

¹⁾ *Novum organum*.

²⁾ *De corpore*.

causa, non si continuerà nell'eternità, ma ci si dovrà pur stancare senza sapere se sia possibile proceder oltre. Per lui nel campo dell'intuizione religiosa, volendosi introdurre dimostrazioni fondate sulla ragione, si giungerebbe ad ammettere varî infiniti, ossia un infinito maggiore di un altro, come se si dicesse che vi sono infiniti numeri pari e quindi altrettanti numeri pari quanti numeri pari e dispari. In Hobbes è manifesta in generale la tendenza a limitare la scienza al concepibile: però, malgrado ciò, se non crede possibile stabilire una grandezza infinita, ha il pensiero di una infinita proseguibilità, su cui del resto non insiste. — Invece Locke ¹⁾ considerò appunto in special modo il problema dal punto di vista critico-conoscitivo. Nel suo pensiero le nostre rappresentazioni van riferite all'esperienza, e questa è o sensazione o riflessione. La rappresentazione dell'infinito ha ragione da ciò, che una rappresentazione p. es. di lunghezza può ripetersi incessantemente, e la possibilità di far ciò resta costante. Così avviene dello spazio, così del numero, in modo che rimane sempre un resto inafferrabile di infiniti numeri addizionabili. In realtà ciascuna grandezza che ci si rappresenti, è limitata, e l'infinito sta solo nella possibilità di trascenderla. Lo spazio è infinito anch'esso nel senso della conoscenza, ossia in quanto non si può pensare una fine della estensione; e in Locke si trova questo pensiero agevolato dalla separazione dello spazio dal corpo spaziale, e dalla ipotesi del vuoto suggeritagli dalla fisica newtoniana per la quale il moto è solo possibile nel vuoto. Come dello spazio così è del tempo e anche della divisibilità della materia, almeno astrattamente in pensiero. Dunque ne viene che l'infinito è pensabile come un divenire, non come un compiuto: ad esso partecipano solo rappresentazioni quantitative, non le qualità, le quali potranno dirsi infinite appunto quando oltrepassano ogni limite indicato da misura o numero. Nelle dimostra-

¹⁾ *An essay concerning human understandig.*

zioni dell'esistenza di Dio però entra in scena un altro argomento, la necessità di un essere eterno dedotta dalla necessità di un regresso causale continuo. — Mosso dall'interesse metafisico, più che da quello teoretico-conoscitivo lockiano, fu Leibniz ¹⁾. Questi non solo stabilisce i principî del calcolo differenziale, ma coordina questa concezione coi fondamenti del suo pensiero totale. Per Leibniz l'infinito è impensabile come una totalità. Nelle lettere a Thomasius e Foucher mostra di attenersi al pensiero aristotelico, ammettendo la divisione del continuo in infinito e opponendosi all'atomismo. Pare anche che si accosti al modo di pensare di Nicolò Cusano quando afferma che la conoscenza è soltanto un processo di approssimazione. Grande è la relazione spirituale di Leibniz con Cartesio e Spinoza. Egli ammette che non si può aver rappresentazione di un numero infinito, quantunque si possa sempre trovare un numero (e in ciò si rivela il punto di vista matematico) che è maggiore di qualsivoglia numero dato. Tre gradi distingue egli nell'infinito: l'indefinito che in realtà è maggiore di qualsiasi grandezza assegnabile, il massimo (come lo spazio e l'eternità), e il più alto di tutti cioè il tutto ossia l'infinito in Dio; la qual distinzione triplice fa ripensare certamente a Spinoza. Ma in Leibniz soprattutto domina il concetto del continuo: la natura non fa mai salti; onde si comprende che la quiete è un movimento infinitesimo, non essendovi un salto tra il moto e la quiete, e analogamente l'eguaglianza è una disuguaglianza infinitamente piccola, come il cerchio è un'ellissi con una distanza infinitamente piccola fra i fuochi, e il percorso di una linea, in generale di una lunghezza, non si compie prima di aver compiuto quello di una linea infinitamente piccola. Questa legge di

¹⁾ *Philosoph. Schriften*, ed. Gerhardt; *Mathem. Schriften*, ed. Gerhardt. Tra i primi (Phil. Schr.) notevole è il *Nouveaux Essays Avant propos* e la *Théodicée*: — v. anche la lettera al Bayle (1687), la corrispondenza di Bernoulli con L., le lettere al Des Bosses, a Arnauld, Foucher, Clarke, Varignon, Grandi, ecc.

continuità viene così applicata a spazio, tempo, movimento. Nulla è discontinuo, o meglio il discontinuo è una lacuna della nostra conoscenza di fronte al continuo reale. Una tale concezione è in accordo col principio suo metafisico della monade, perchè anche i gradi di coscienza delle rappresentazioni in ciascuna monade sono in numero infinito e in gradazioni infinite; e le innumerevoli rappresentazioni oscure sono pur esse uno specchio della infinita realtà, essendo questo sistema di connessione formato mediante l'armonia prestabilita. Ma persino il numero delle monadi è infinito « actu », sia per la possibilità inerente all'opera il più possibile grandiosa di Dio, sia anche per l'ordine delle cose, giacchè altrimenti non a tutti i gradi assegnabili di percezione corrisponderebbero dei fenomeni, mentre per Leibniz sono posti questi due principi, che in noi si danno rappresentazioni di tutti i gradi possibili di chiarezza, e che a ciascuno di questi gradi devon corrispondere monadi. Ora, se la dottrina monadologica è in completo accordo con la legge di continuità, ne segue necessariamente quest'altro pensiero, che ciascuna parte del mondo contiene in sè un infinito attuale di parti; ed anche ciò è conforme all'armonia prestabilita, mentre fa anche pensare alle teorie della preformazione, che in un semplice spermatozoo embrionale pongono già preformato non soltanto l'essere che ne verrà sviluppato ma ancora tutta la derivazione consecutiva in infinito. Così per Leibniz la natura è una serie graduale infinita di organizzazioni sovraordinate le une alle altre, sebbene le monadi siano unità del medesimo ordine e però infinite di numero e anche infinitamente diverse, in sè non spaziali, essendo lo spazio soltanto una forma dell'ordinamento sensibile degli oggetti, da non identificarsi cogli atomi, neppure con i centri dinamici, giacchè la rigidità e resistenza non è delle monadi. L'estensione del mondo è per Leibniz parimenti infinita, ma nel senso da lui indicato nei « Nuovi saggi », che cioè nell'universo non è mai dato un infinito totale, sibbene dei totali che in infinito si superano

gli uni gli altri in grandezza, conformemente al concetto matematico su espresso. Dio è l'essenza assolutamente infinita, alta sopra ogni cosa conoscibile. Dal punto di vista della conoscenza, Leibniz, poco prima dell'apparir dell'opera capitale di Locke (1688), aveva pur egli affermato che ogni conoscenza dell'infinito consiste nella conoscenza della possibilità di un progresso o proseguibilità illimitata: ma Leibniz va ancor più in là affermando che questa proseguibilità si fonda sulla persistenza del medesimo principio interno. Difatti per Leibniz la origine della considerazione dell'infinito è la medesima di quella delle verità generali e necessarie, mentre per Locke essa derivava dalle esperienze sensoriali. Leibniz sostiene che anche grandezze intensive come per es. la velocità possono essere infinite. Malgrado la negata possibilità dell'infinito come totale, la idea dell'infinito è però per Leibniz intima in noi come quella dell'essere; entrambe sono attributi di Dio, e sorgenti delle idee, come Dio è sorgente dell'essenza. Ora da questo punto di vista assoluto, non si deve pensare p. es. lo spazio come composto di parti; ed è questo un pensiero che da una parte richiama le tendenze della scuola cartesiana, dall'altra, per ciò che concerne gli attributi di Dio, e il rifiuto della divisibilità per lo spazio assoluto, ricorda Spinoza. — Leibniz fa penetrare nell'interno dell'anima nostra la idea dell'assoluto per mezzo delle rappresentazioni oscure, le quali fanno sì che sia impossibile la conoscenza dell'infinito assoluto. L'infinità di Dio è di un grado superiore, giacchè egli da un numero infinito di mondi possibili ha scelto quello che più gli piacque. — Rispetto al calcolo infinitesimale, lo stesso Leibniz considera fondamentale la introduzione di un acconcio algoritmo, di un linguaggio a segni conforme allo scopo, di una « *characteristica generalis* ». Rispetto al pensiero teoretico fondamentale del nuovo calcolo, è da osservarsi che le dx e dy divengono infinitamente piccole o infinitesime nel senso che i punti della curva stanno tra loro più vicini di qualsivoglia distanza

data, oppure anche nel senso che gli accrescimenti delle ascisse e delle ordinate sono considerati come momentanei (« ut incrementa momentanea lineae »): ma di ciò dovremo parlar più innanzi. — Notevole è che Leibniz parla spesso dei concetti dell'infinito matematico come di puri segni, e sostiene inutile l'entrare nella parte metafisica di quei concetti quando si tratta semplicemente di un fine pratico, p. es. di una applicazione a fenomeni della natura. A questo proposito, egli esplicitamente osserva che grandezze, le quali per l'esattezza richiesta possono trascurarsi senza alcun danno, posson trattarsi addirittura come differenziali: nel che è evidente lo scopo pratico oltre che la giustificazione dei rapporti matematici di grandezze finite con differenziali di ordine diverso. Pensiero dominante in Leibniz è la costante opposizione al concetto di differenziale come di un niente: dx e dy si comportano fra di loro come determinate estensioni finite.

Abbiamo detto che, per scopi pratici, doveva per Leibniz il calcolo considerarsi indipendente dal pensiero metafisico; ma in fondo ciò non era la verità, perchè egli stesso confessava essere la sua metafisica del tutto matematica o poter diventare tale, volendo egli poggiare non il certo sull'incerto ma viceversa; e anche nelle applicazioni al campo della fisica egli vede realizzato in natura l'infinito in conseguenza del carattere infinito del creatore. Celebre è rimasta la discussione tra Leibniz e Bernoulli intorno alla reale esistenza di linee infinitamente piccole o infinitamente grandi: Leibniz sosteneva che il reale infinito può essere forse soltanto l'assoluto stesso, mentre Bernoulli rispondendogli (1698) gli rammentava la sua dottrina della organizzazione infinita, la quale lasciava supporre una specie di rapporto graduale come quello dell'infinitesimo al finito o come diversi gradi di infinito; al che rispondendo a sua volta il Leibniz ribadiva il concetto della impossibilità di un « totum infinitum » e della possibilità sola della infinità di una serie pensata come una proseguibilità inesauri-

bile. E anche su ciò ritorneremo in altro luogo. — In fondo il pensiero di Leibniz afferma l'infinito senza riuscire a negare la cartesiana inconcepibilità dell'infinito, totale e senza neppure interamente staccarsi dal razionalismo spinoziano: e difatti, mentre pone non solo l'universo ma anche ciascuna monade come un infinito tutto, lascia supporre con la sua teoria delle rappresentazioni oscure e dei diversi gradi di coscienza, che possano darsi realtà attualmente infinite non conoscibili.

Ad ogni modo il Leibniz aveva portato la questione dell'infinito in un campo di chiarezza matematica, che fu ignoto a molti filosofi posteriori, e soltanto dai matematici ripreso in esame. — Difatti il Bayle ¹⁾, riferendosi alle aporie zenoniche, adduce le medesime loro dimostrazioni contro la possibilità del movimento: il tempo consiste di momenti indivisibili, e, poichè due di questi momenti non possono coesistere, l'uno deve cessare prima che l'altro cominci; inoltre in ciascun movimento devon percorrersi innumerevoli parti. Bayle non accetta l'ipotesi aristotelica che il continuo sia infinitamente divisibile in potenza anzichè in atto, perchè se la materia è divisibile in infinito essa deve contenere attualmente un numero infinito di parti. Nè può sussistere per lui l'ipotesi delle infinite parti costituenti un dato tempo determinato, perchè in tal caso un'ora dovrebbe consistere di un numero infinito di parti e quindi non aver nè principio nè fine. Analogamente a Zenone nega, oltre che il movimento, la estensione, perchè questa dovrebbe risultare da punti matematici o da atomi o da parti infinitamente divisibili: ma anche l'atomo ha un lato destro e un sinistro, un sopra e un sotto, ed è perciò un corpo composto; e, quanto al punto matematico, egli osserva che è inesteso e quindi incapace di dar luogo ad una esistenza. Egli poi parla delle parti aliquote di estensioni, e dice che quando queste sono eguali di numero, anche le estensioni risultanti

¹⁾ *Dictionnaire historique et critique*, I. Aufl., 1697, Rotterdam.

devono essere eguali. Ma soprattutto gli importa affermare che l'estensione è relativa, è un'affezione dell'anima; e che nessuna cosa è nè grande nè piccola, giacchè ciò che sembra piccolo all'uomo può sembrar grande a una zanzara. Egli ricorda ancora, a proposito di Zenone, come già Melisso avesse notato che un'altra prova contro il movimento sta nella necessità che esso si compia nel vuoto, il che contraddice ai nostri concetti sulla estensione e relativa divisibilità, mobilità, impenetrabilità. Ma è evidente in Bayle il ripresentarsi di una confusione tra spazio e corpo. — Collier ¹⁾ non è soltanto scettico come Bayle, ma nega persino la oggettività del mondo esterno. Trattando delle contraddizioni dell'infinita estensione, infinita divisibilità, movimento, sostiene che nessun filosofo, sia che affermi il finito oppure l'infinito, ha ben contraddetto il suo avversario; anzi egli perfino sostiene che in tal caso il porre un mondo esterno insieme limitato e illimitato equivale a dire che non esiste un mondo di tal fatta. Per la divisibilità infinita nuovamente egli osserva che l'argomento addotto in favore dell'infinito è la esistenza esterna, ma che in ciò sta appunto la difficoltà. Difatti per lui si tratta di un mondo non esistente esternamente ma solo in quanto noi lo fissiamo col nostro pensiero secondo estensione e suddivisione; e però questa soggettività del mondo importa delle antinomie, come si ritrovano nella ragione e quindi anche nelle dimostrazioni contrarie dei filosofi: il che fa in certo modo pensare a qualche incerta anticipazione del pensiero kantiano. — Importante è il pensiero di Berkeley ²⁾, vescovo, idealista, avverso ai tentativi di combattere i dogmi religiosi come contrari alla logica. Per questo filosofo le nostre rappresentazioni esistono fuor del nostro spirito ma non come un mondo materiale sebbene comprese nello spirito di Dio. Discepolo

¹⁾ *Clavis universalis*.

²⁾ *Treatise concerning the principles of human knowledge*, 1710; — Works ed. Fraser 1871.

di Locke, nondimeno egli combatte le idee astratte, sostenendo che dappertutto si danno soltanto rappresentazioni singole, le quali possono entrar in scena per un intero gruppo di rappresentazioni solo in quanto le parti determinanti costitutive non vengono ulteriormente più considerate. Rispetto al problema dell'infinito, anch'egli, come già altri, pensa che lo spirito umano come finito non è in grado di concepire l'infinito, soprattutto per un falso uso delle sue facoltà. Data la sua avversione all'ipotesi delle idee astratte, egli respinse anche la distinzione fra materia e spazio, e così pure la divisibilità infinita di una linea, che per lui è soltanto illusione. Punto di partenza, anche nel campo matematico, è il minimo sensibile, tanto è vero che se può esistere la decimillesima parte di una lunga estensione, non può invece esistere la decimillesima parte di un tratto minimo, a meno che non lo si ingrandisca sino a equipararlo alla lunga estensione. Quanto al calcolo infinitesimale, Berkeley polemizza contro le flussioni newtoniane e contro il pensiero di Leibniz. I principî del calcolo superiore sono — dice — inconcepibili; e così si dimostra conseguente alla sua avversione contro le idee astratte prive di rappresentabilità. Nondimeno concede valore, se noi ai principî, almeno alle conseguenze del calcolo infinitesimale, in quanto si pongono equazioni le quali presuppongono che le grandezze differenziali siano finite, malgrado che si facciano poi scomparire. In fondo, anche Berkeley trova difficoltà nella ipotesi della esistenza esterna di un mondo materiale, e quindi si riattacca a Collier e si pone in salvo nell'idealismo soggettivo, pur rimanendo l'allievo di Locke e non giungendo alle antinomie di Collier intorno all'infinito. — Affine a sua volta a Berkeley in ciò che concerne il problema dell'infinito, il Hume ¹⁾ nel suo famoso trattato della natura umana afferma

¹⁾ *A treatise on human nature*, London 1739. Cfr. EUGEN MEYER: *Humes u. Berkeleys Philos. d. Mathematik*, Halle 1894. Inoltre v. del Hume: *Inquiry concerning human understandig*.

che l'attività dello spirito è limitata, onde mai si potrà giungere ad un adeguato concetto dell'infinito, e che la rappresentazione di qualcosa di limitato non è infinitamente divisibile ma che piuttosto si può scomporre in ultimi elementi semplici e indivisibili. Insomma, quando si parla (e qui ritorna il pensiero di Berkeley) della decimillesima parte di un minimo granello di sabbia, si ha pure una chiara rappresentazione di questo numero e de' suoi rapporti, ma le immagini corrispondenti a queste parti decimillesime non si distinguono affatto e non sono in nulla più piccole di quelle dello stesso granello di sabbia che dovrebbe contenerle, ossia non sono minori, in fondo, del minimo sensibile. Passando dalla rappresentazione di tempo e spazio al tempo e spazio medesimi, è suo pensiero che, ove le rappresentazioni sono adeguate agli oggetti, le contraddizioni inerenti alle prime indicano impossibilità nell'oggetto. Difatti ciò che è divisibile infinitamente contiene un numero infinito di parti, ma ciò è contraddittorio, perchè coll'infinito ammucchiare minime parti rappresentabili della estensione, dovrebbe ottenersi una estensione infinita. Ogni esistenza deve derivare da una unità; ma l'unità, che esiste per sè e la cui esistenza è necessaria per la esistenza di tutti i numeri, deve essere indivisibile e irrisolvibile. Rispetto al tempo, anche Hume ammette che due parti di tempo non possono coesistere, onde ciascun momento dev'esser indivisibile, altrimenti si avrebbe un infinito numero di momenti coesistenti senza tempo. Se così si giunge a elementi semplici e irriducibili, questi sono per Hume ancor rappresentabili con una certa colorazione e tangibilità. Le dimostrazioni della geometria egli dice vane, poggiate sulla pura apparenza e su premesse inesatte. Più scettico ancora è nel celebre « Inquiry concerning human understanding », ove ripete il suo pensiero circa la divisibilità infinita, a cui contrappone la divisibilità limitata e il suo fondamento sensistico. — Come si vede, il problema, mentre da un lato entrava nel dominio matematico e

metafisico, da un altro si imponeva sotto il punto di vista sensistico e della conoscenza: da una parte la questione filosofica dei principî, dall'altra quella psicologica e formale. — L'epoca dell'illuminismo e della filosofia popolarizzata non trascurò neppur essa la questione dell'infinito sotto i due aspetti. Vi fu chi, alla guisa aristotelica, distinse l'infinito in attuale o categorematico, e potenziale o sincategorematico, avendo cura di dimostrare l'impossibilità del primo. Nella *Ontologia* di Wolff ¹⁾ son detti impossibili il numero e la grandezza infinita: ma invece diverso è l'infinito attuale che è non successivo ma simultaneo. Lo spazio è per Wolff, come già in Leibniz, un ordinamento delle cose che sono contemporanee, come il tempo è l'ordine di quelle successive; le monadi sono centri dinamici puntuali. Dio, come entità non successiva, è fuori del tempo. Quest'ultima concezione riguardava anche il problema dell'eternità del mondo, che da Martin Knutzen ²⁾ maestro di Kant, fu esplicitamente negata. Reimarus ³⁾ considera impensabile un infinito terminato, e distingue tra la possibilità di un futuro interminabile o illimitatamente aumentabile e la realtà di un infinito compiuto nel passato. Lambert ⁴⁾ crede che il concetto di infinito sia soltanto dato ma che non possa definirsi; nondimeno esso è applicabile al numero, e, per quanto inconoscibile, esiste, mentre le serie infinite in due sensi non ricorrono nel mondo reale. Platner ⁵⁾ continua questa specie di indirizzo critico prekantiano, affermando non esservi nell'uomo alcuna idea dell'infinito all'infuori del concetto dell'accrescibilità ine-

¹⁾ *Ontologia*, Editio nova, Frankfurt u. Leipzig 1736; in particolare v.: *Vernünfftige Ged. von Gott, der Welt u. d. Seele d. Menschen, auch allen Dingen überhaupt*, Halle 1720.

²⁾ *Dissertatio metaphysica de aeternitate mundi impossibili*, 1833.

³⁾ *Die vornehmsten Wahrheiten d. natürlichen Religion*, 2. Aufl., Hamburg 1755.

⁴⁾ *Anlage zur Architektonic*, 1771.

⁵⁾ *Philos. Aphorismen*, Leipzig 1776.

saurobile di una grandezza, e però esso non poter nemmeno significare in modo più chiaro il finito reale e le parti di una continuità infinita, essendo quasi più agevole all'intelletto umano la comprensione della grandezza delle realtà divine e del numero infinito che non il vero finito, il limite assoluto. Un concetto secondario di questo autore fu la negazione della infinita divisibilità della materia, perchè ogni composto risulta costituito di parti semplici. — Intanto il Toland sosteneva la infinità non del mondo ma dei mondi nel senso del Bruno, e avvalorava l'ipotesi panteistica: l'universo contiene mondi innumerevoli e consiste di elementi semplici ed indivisibili. — Voltaire ¹⁾ nel *Le philosophe ignorant* dimostra una reverenza speciale per Locke anche rispetto al problema dell'infinito: così sostiene che noi non possiamo avere alcuna rappresentazione di uno spazio infinito o di un numero infinito, e soprattutto nessuna idea positiva dell'infinito perchè siamo molto limitati; inoltre, rispetto all'idea dell'eternità, le difficoltà si presentano insuperabili in vario senso. Assurdo è un cominciamento dell'essere, giacchè dal nulla non può cominciare cosa alcuna: ma allora si deve pensare l'atomo come esistente dall'eternità, nel qual caso si deve concludere per un infinito che è trascorso e che io nel mio spirito posso arrestare ad ogni momento, per passare ogni momento a una nuova eternità, distinguendone anzi due, l'una antecedente e l'altra consecutiva a codesto istante: oltre di che — dice Voltaire — nel momento in cui io parlo, l'eternità dura e il tempo decorre. Quanto alla estensione, mentre lo spazio è infinito, la materia è limitata. Conformemente al suo spirito, Voltaire conclude esser meglio pensare alla propria salute anzichè allo spazio infinito. — Come abbiamo detto più sopra, contemporaneo a questa divulgazione della filosofia, fatta quasi per illuminare un maggior numero di persone mediante i risultati della speculazione filosofica, del sorgere delle nuove

¹⁾ Oeuvres 1785, e ed. Beuchot 1829 (*Philos. Lexicon*, Art. *Infini*).

scienze e dei problemi conoscitivi, fu lo svolgersi dei concetti dell'infinitesimo nel calcolo, in seguito all'impulso dato dai matematici inglesi, e in modo speciale in Germania dall'intelletto metafisico del Leibniz. Mentre il Wolff andava affermando (e non egli soltanto) che l'infinito dei matematici è soltanto un modo per esprimere che vi sono più cose di quelle che possano afferrarsi mediante il numero, e perciò supponeva che i matematici significassero con le grandezze infinitesime solo quella determinazione di grandezza che in ciascun dato caso produce il minimo errore assegnabile ossia nessun errore ¹⁾ (e in ciò si appoggiava a Leibniz, che aveva parlato degli infinitesimi come di finzioni), in Inghilterra la teoria newtoniana della flussione trovava un difensore in Mac Laurin ²⁾ e in Francia un traduttore in Buffon. Si afferma allora chiaramente questo concetto, che la idea dell'infinito consiste esclusivamente nella illimitata proseguibilità del comporsi e del dividersi. Certo il numero infinito è una contraddizione rispetto alla definizione del numero e alla legge delle serie, le quali essendo prolungabili senza limite non possono contenere alcun termine infinitesimo. Fontenelle ³⁾ difende l'ipotesi degli infiniti attuali in geometria, e però non pone quella distinzione netta fra serie interminabile e infinito compiuto o concluso, che era stata uno dei frutti più notevoli delle dispute capitali intorno al nuovo calcolo e anche ai principî di esso, come già s'era visto in Leibniz, Newton, ecc. Non-dimeno egli osservò che l'infinito della geometria è una grandezza, la quale, se è maggiore di ogni grandezza finita, non è però maggiore di ciascuna grandezza come tale. La serie finita possiede un ultimo termine, mentre la infinita non lo possiede, neppure data la presenza o man-

¹⁾ *Ratio praelectionum Wolfianarum in mathesin et philosophiam universalem*, 1719; v. anche: *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, 1710.

²⁾ *Treatise of Fluxions*, 1742.

³⁾ *Eléments de la géométrie de l'infini*, Parigi 1727.

canza di un reale membro infinito. D'altra parte, se per lui il numero infinito è sconosciuto malgrado il suo segno, mediante una somma di segni si può giungere ad averne una rappresentazione che altrimenti non si avrebbe. Partendo da altri punti di vista, F. Achard ¹⁾ combatte la realtà del concetto di numero preso in generale, astrattamente: onde, ammettendo come reale soltanto il numero determinato, dimostra impossibile il numero infinito, e si attiene al confronto con le grandezze astronomiche e microscopiche, mentre Fontenelle aveva oltrepassato questo concetto dimostrando la esistenza di un numero infinito. D'Alembert ²⁾ pure si volse contro Fontenelle, e concepì l'infinito come un limite. Il dire che la somma di una serie è infinita, equivale a riconoscere che essa si ingrandisce con un numero sempre crescente di membri, e può equivalere a ciascun numero per quanto grande: nella geometria un numero infinito esiste solo come idea astratta che esprime un limite spirituale non raggiungibile da alcun numero limitato. Importante è la concezione di Eulero, ³⁾ intesa a porre il differenziale eguale a zero. Egli abbandona il concetto del flusso continuo, e nelle « Institutiones calculi differentialis » prende in considerazione incrementi che scompaiono. Se questi differenziali non si considerano come zeri, si perde il rigore geometrico; e inutile torna il criterio che giustifica i procedimenti in questione mediante la trascurabilità di un granello di sabbia nella misurazione di un'alta montagna, giacchè codesto errore non ha alcun significato nella misura pratica e contraddice all'esattezza geometrica. Così il vero rapporto nel nostro caso non si avrà che quando la dx sarà eguale a 0. Per Eulero ciascuna grandezza può venire illimitatamente aumentata. Egli, discutendo della divisibilità infinita della materia, sviluppa la dottrina dell'in-

¹⁾ *Réflexions sur l'infini mathématique*, Mém. de l'Ac. de Berlin, vol. I, 1745.

²⁾ *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, 1773.

³⁾ *Institutiones calculi differentialis*, 1755.

finitamente piccolo in matematica. A. G. Kästner ¹⁾ spiega che propriamente non si può dire che una grandezza è infinitamente grande, ma soltanto che si impiega una tale espressione per significare un limite a cui, mediante costante accrescimento, la grandezza sempre più si avvicina, sebbene non si dia un suo stato ultimo; e analogamente deve dirsi dell'infinitamente piccolo, giacchè si tratta pur sempre di una grandezza che si avvicina « infinitamente » ad un valore, nel senso che la sua differenza da questo valore può divenir più piccola di qualsiasi grandezza assegnabile, e che quel valore è il suo limite. Al metodo dei limiti tornò pure (1786) L'Huillier ²⁾, opponendosi ad Eulero. — Lagrange ³⁾ riconosce nel metodo newtoniano delle flussioni una metafisica che sembra esser più chiara in quanto evita l'infinitamente piccolo, e anche perchè ciascuno ha o crede di avere una idea della velocità: nondimeno egli trova che anche nel concetto della flussione le grandezze sono a considerarsi come linee percorse da un mobile, e si serve egli stesso del metodo degli infinitesimi fondato sulla teoria delle funzioni, nella sua meccanica analitica. — Carnot ⁴⁾ si attiene egli pure alla metafisica del calcolo, ma respinge le questioni concernenti la infinita divisibilità della materia e dello spazio. Accanto alle « quantités désignées », pone le « quantités non désignées ou auxiliaires » introdotte nel calcolo per facilitare il confronto di grandezze date: il limite è quella grandezza designata a cui una grandezza ausiliaria costantemente si avvicina, e il calcolo infinitesimale è un calcolo non finito. Per Carnot il carattere degli infinitesimi non consiste nella piccolezza reale di queste grandezze, ma piuttosto nella loro assoluta indeterminatezza, cioè nella loro proprietà di rimanere arbi-

¹⁾ *Anfangsgründe d. Analysis d. Unendlichen*, 2. aufl., Göttingen 1770.

²⁾ *Exposition élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs*.

³⁾ *Théorie des fonctions analytiques*.

⁴⁾ Cfr.: *Carnots Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal*, 1797.

trarie entro il calcolo totale, e indipendenti da grandezze date. Vi sono, egli dice, due specie di infinito matematico: l'infinito assegnabile o sensibile, e l'infinito assoluto o metafisico, che egli designa, giusta il criterio di Newton, come quantità evanescente e anche come « être de raison » oppure come limiti di quantità effettive e attingenti, per così dire, l'esistenza. Si comprende quindi come egli avesse in proposito un concetto positivo della grandezza infinitesimale nascente e scompaiente per legge di continuità, e si staccasse dall'infinitesimo concepito come zero. — Baumgarten ¹⁾ parla di una matematica di grandezze inestese, intensive, e dell'infinito in rapporto alla realtà e ai gradi di questa. Così si sviluppava per questa via il concetto dell'infinitesimo applicato al continuo intensivo: concetto che, almeno in quanto si connette con la sensazione e in generale con la coscienza, fu anche riconosciuto da Lambert, dopo che già era stato posto in rilievo da Leibniz a proposito dell'indebolirsi e rafforzarsi della chiarezza delle rappresentazioni. — Anche in Kant ²⁾, per quanto concerne il problema dell'infinito, ha grande importanza, accanto alle famose antinomie, la categoria della qualità con l'accento al grado di intensità continuamente crescente della sensazione. Negli scritti che precedono la critica, Kant tratta della realtà dell'infinito e si pone già il problema della infinità spaziale del mondo: alla potenza creatrice di Dio non deve corrispondere un mondo finito ma una quantità di mondi nei più diversi stadi di sviluppo, un compimento successivo della creazione. Nella « *Monadologia physica* » (1756), sempre nel periodo pre-critico, Kant si occupò del problema della divisibilità infinita, che

¹⁾ *Metaphysik*, 1783.

²⁾ W. W. ed. Rosenkranz e ed. v. Hartenstein; - *Kritik d. reinen Vernunft*, ed. Kehrb.; - *Metaph. Anfangsgründe d. Naturwiss.*; - cfr. COHEN: *Die systemat. Begriffe in Kants vorkrit. Schriften*, Habilitationsschrift, Marburg 1873; poi dello stesso: *Kants Theorie d. Erfahrung*, 2. Aufl., Berlin 1885; cfr. ancora A. STADLER: *Grundsätze d. reinen Erkenntnistheorie in d. Kantischen Philosophie*, 1876; in special modo: *Das Gesetz der Stetigkeit bei Kant*, 1880.

doveva poi esser ripreso nella critica sotto la seconda antinomia della dialettica trascendentale. I capisaldi di questo lavoro son questi: che i corpi consistono di parti semplici o monadi, mentre lo spazio è divisibile in infinito. La monade puntuale è uno « spatium activitatis », da cui ogni altra monade è separata mediante la sua forza di repulsione: onde la concezione di un siffatto sistema equivale ad una atomistica puntuale dinamica. Nella « Inauguraldissertation » del 1770, disputando su forma e principî del mondo sensibile e intelligibile, egli afferma essere soltanto impossibile ciò che contraddice alle leggi dell' intelletto e della ragione, e non ciò che, sfuggendo alle leggi della conoscenza intuitiva, rimane pur sempre oggetto della pura ragione. L' assoluta totalità delle parti presenta gravi difficoltà: applicata al tempo, essa lascia supporre uno stato ultimo, il che nella eternità è un assurdo. Inoltre la totalità di infiniti simultanei include la totalità degli infiniti successivi, perchè dà materia inesauribile all' eterno divenire. Necessaria è allora la separazione della conoscenza intellettiva da quella sensibile, e di conseguenza devesi considerar spazio e tempo « a priori », soggettivamente, come intuizioni, anzi come forme pure della intuizione, per cui essi divengono per il nostro intelletto condizioni necessarie della pensabilità. Ma, poichè queste due forme intuitive sono presupposte dalla conoscenza sensibile, e le esigenze del pensiero puro sono con quelle in contraddizione, Kant, poggiandosi sulle basi del razionalismo, secondo cui è reale soltanto il sapere concettuale, considera la conoscenza intellettiva come dimostrazione dell' essere reale. Però è a osservarsi che con questo non viene designata la conoscenza sensibile come oscura, perchè anche nella formulazione del principio della contraddizione è inevitabile un elemento intuitivo e sensibile, la intuizione del tempo. Ora le intuizioni, come è noto, formano argomento della estetica trascendentale kantiana. Quivi è detto che, giacchè non può darsi un concetto generale che determini alcun che nei riguardi della grandezza,

e d'altra parte si dà lo spazio determinato come una grandezza data infinita, così lo spazio non è un concetto ma una intuizione. Difatti nessun concetto ha in sè una infinita quantità di rappresentazioni come parti, ma tutt'al più esse sono subsunte sotto di lui; e quindi lo spazio, che contiene una quantità infinita di rappresentazioni, non è un concetto. Rispetto al tempo, le grandezze temporali determinate si ottengono solo mediante la limitazione, mentre il fondamento è costituito dal tempo infinito; invece nei concetti le rappresentazioni parziali si comportano inversamente e cioè precedono il concetto totale. Nelle anticipazioni della percezione risulta che perfino nella sensazione, che potrebbe dapprima sembrar soltanto materia della esperienza, si presuppone un fondamento necessario di ogni esperienza, una anticipazione, un « a priori »; ossia si dà un reale oggetto della sensazione, che ha una grandezza continuamente intensiva ossia un grado. Sicchè, oltre spazio e tempo, anche l'intensità sta a fondamento della esperienza. Questa intensità può continuamente aumentare da zero sino al suo più alto grado possibile; ed è una realtà che, come causa di un mutamento, si chiama momento ed esclude l'aggregazione di parti discrete includendo invece la grandezza continua. Ora ne viene che, secondo il pensiero kantiano, la qualità generale della sensazione sta in ciò, che ciascuna realtà possiede, oltre la estensione spaziale e temporale, anche una grandezza generante o momento, la quale rimane anche allora che spazio e tempo si fanno convergere verso 0. Insomma vien così stabilito un terzo genere di grandezza, che non è quella del tempo e dello spazio, ma è piuttosto la espressione generale della « qualità » della sensazione. — La vera questione dell'infinito è sviluppata da Kant nelle antinomie ¹⁾). Siccome su queste dovremo ritornare più di pro-

¹⁾ Interessante e opportuno è confrontare: SCHOPENHAUER, *Krit. d. Kantisch. Philos.*, in *Welt als Wille u. Vorst.*, Bd. I; e COHEN, *Kants Theorie d. Erfahrung*, II Aufl., S. 529, cit. — Della critica fatta da Wundt diremo più innanzi.

posito trattando del problema dell'infinito dal punto di vista teoretico-conoscitivo, così qui basteranno su ciò pochi cenni. Nella dottrina delle antinomie ricorre in fondo il pensiero che Kant esprime nella sua trattazione dei principî metafisici della scienza, che cioè la nostra ragione non può nè arrestarsi nel condizionato nè afferrare l'incondizionato. Il punto di vista delle antitesi è da Kant medesimo caratterizzato come empirico, quello delle tesi come dogmatico, di essi il primo considera soltanto una possibilità di progresso continuo della esperienza. La risposta alle antinomie non può trovarsi che nella filosofia trascendentale. Mentre le quistioni intorno alla natura dell'anima e all'essenza di Dio rimangono senza soluzione perchè non si ha un oggetto corrispondente alla idea data, o meglio si ha un oggetto trascendente, il mondo invece è considerato come è dato nella esperienza, e quindi non come cosa in sè ma come fenomeno. Siccome la soluzione deve però dipendere non dalla esperienza stessa ma dalla analisi dell'idea che riguarda la totalità della esperienza (e a cui la sintesi empirica può soltanto accostarsi), così anche qui la questione concerne la idea della ragione intorno ad una esperienza possibile. Risultato è per Kant lo scetticismo riguardo alle antinomie. Difatti — egli dice — il mondo secondo la tesi è troppo piccolo per la intelligenza, ed è troppo grande secondo l'antitesi: in altri termini, ciascun limite possibile è oltrepassato dal pensiero, il quale a sua volta non può concepire l'illimitato. La chiave della soluzione sta nell'idealismo trascendentale: per questo, gli oggetti nello spazio e nel tempo hanno una realtà empirica, e però tempo e spazio sono pure forme soggettive della sensibilità o forme di intuizione, senza di cui tuttavia è impossibile ogni conoscenza; ma la causa di questo mondo di fenomeni o la cosa in sè, ci è completamente sconosciuta come quella che è un puro intelligibile, ossia che va costrutta con l'intelletto puro senza il concorso del tempo e dello spazio. Ora si deve osservare che il mondo come cosa in

sè non potrebbe esser dato nè come finito nè come infinito in grandezza: piuttosto dovrebbe in tal caso dirsi che esso è o finito o non finito, ossia dovrebbero porsi di fronte non due contrari come « finito » e « infinito », ma due contraddittori come « finito » e « non finito ». Non essendo dato il principio di contraddizione, rimane tra i due termini contrari aperta la possibilità che il mondo non sia dato come cosa in sè. Inoltre la serie delle condizioni del condizionato non sta entro il fenomeno stesso come in un oggetto dato prima della sintesi regressiva, cioè in sè, ma sta soltanto in questo regresso. D'altra parte il porre il mondo come cosa in sè conduce a contraddizioni che si risolvono solo ponendo il mondo come fenomeno. Quindi la ragione non è qui un principio costitutivo, ma soltanto un principio regolativo che conduce a proseguire in infinito una sintesi, tenuto conto di quanto più sopra dicemmo, che cioè l'argomento delle antitesi in favore dell'infinito regresso poggia sulla possibilità di un continuo procedere della esperienza. Se la ragione ci conduce in questo caso a contraddizioni, la soluzione sta nel considerare il mondo non come un oggetto della ragione, una « Verstandesding », o un « noumeno » o una « Ding an sich », ma come un « fenomeno ». Ma il mondo dei fenomeni sta sotto le forme pure della intuizione; e queste assicurano il procedere continuo della esperienza. Quindi la questione si riduce in questi termini: nel mondo della intuizione è possibile il continuo procedere della esperienza, e non una totalità compiuta; invece nel mondo della pura ragione ha senso soltanto questa totalità terminata che conviene alla cosa in sè e non al fenomeno, rispetto al quale sarebbe soltanto relativa. Sicchè a voler concepire il mondo come qualcosa di conchiuso, si cade in antinomie o contraddizioni, le quali alla lor volta dimostrano con la loro stessa esistenza che il mondo è soltanto fenomeno e non cosa in sè. In fondo, nel pensiero di Kant vi è da una parte il dato della intuizione, dall'altra la spontanea attività intellettuale. Da quest'ultima parte s'insedia

la ragione che tende all'incondizionato, e però si comporta come un principio regolativo del continuo procedere, e non è perciò un principio costitutivo del conoscere. Il mondo è in certo qual modo sottoposto come un materiale estraneo alla conoscenza intellettuale, la quale non è ad esso adeguata. Nel pensiero di Kant sono in fondo a notarsi due capisaldi: l'uno è la dottrina dell'antinomia, l'altro è la teoria della grandezza intensiva. Rispetto a quest'ultima ¹⁾, Kant ha stabilito un'affinità sistematica tra l'infinitamente piccolo e la sensazione: l'intensivo è propriamente un concetto della matematica, ma esso ha significato di realtà (« Realität ») in quanto si riferisce alla coscienza e alla sensazione, e in questo senso anche il concetto del differenziale ha un significato positivo derivante dagli stessi fondamenti della coscienza. Ora la intuizione stessa spaziale è il fondamento conoscitivo della geometria della posizione, come quella temporale è il fondamento per il numero e per la dinamica; e nel rapporto della intuizione col pensiero e coi concetti si stabilisce il fondamento degli assiomi della intuizione, su cui poggia la geometria metrica con la misura e il numero e quindi con la grandezza. Così si ha il primo fondamento della grandezza, l'unità; ma, poichè la grandezza stessa non è soltanto estensiva o intuitiva, così il concetto di unità non è una misura esauriente di esattezza, ma lo diviene soltanto in quanto all'unità-numero estensiva-intuitiva la unità della coscienza aggiunge la unità come produzione (« Erzeugung ») della grandezza, la unità intensiva, la unità interna che si ritrova profonda nella sensazione meglio che nella pura intuizione; sicchè, mentre nella intuizione si riesce ad una purezza della sensazione e all'unità-numero estensiva, la sensazione realizza la grandezza intensiva.

Nella seconda edizione della « Critica » è detto che « in allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Em-

¹⁾ Cfr. A. STADLER: *Das Gesetz der Stetigkeit bei Kant*, cit.

pfindung ist, intensive Grösse ». E ancora: « eine intensive Grösse zukommen, welcher correspondirend allen Objecten der Wahrnehmung, sofern diese Empfindung enthält, intensive Grösse d. i. ein Grad des Einflusses auf den Sinn, beigelegt werden muss ». Ma questa grandezza intensiva è appunto quella che Kant ne' suoi « Principi metafisici della scienza » designa come l'infinitesimo o l'infinitamente piccolo: e difatti egli aggiunge che nel concetto di velocità, non potendo le parti di questa essere l'una fuori dell'altra come quelle dello spazio, e nondimeno dovendo pur trattarsi di grandezza, il concetto di questa grandezza dev'essere costruito in altro modo che non in quello estensivo dello spazio, e deve perciò essere intensivo. Quindi il prodursi della velocità è presupposto come una specie della grandezza intensiva, e anche le relative grandezze infinitesime devon pensarsi intensive. In questo senso Kant si riattacca a Galileo e a Leibniz, che riconosce la precedenza dell'intensivo nel senso voluto da queste parole di Leibniz: « Est aliquid praeter extensionem, imo extensione prius ». Difatti Kant parla pure dell'intensivo come « Grund » della grandezza estensiva, e considera il momento della velocità come una tendenza o sforzo (« Bestreben ») a comunicare ad un corpo una certa velocità (nel che è inevitabile il confronto con il pensiero di Galileo); onde non può dirsi che il momento della velocità sia eguale a zero, perchè in questo caso dalla somma dei momenti non potrebbe aver origine una grandezza finita. Notevole qui il pensiero della derivazione del finito dall'infinito, il retto riferimento al calcolo infinitesimale, e l'accordo con il principio delle anticipazioni. Ma, se è evidente in Kant l'importanza accordata all'intensivo, è ancor più notevole il fatto che esso è da lui fatto rientrare nella categoria della realtà o, meglio, realtà (« Realität »), e con questo mezzo esso è trasportato nella sensazione ed assurge ad un modo dell'unità di coscienza. — La distinzione kantiana netta tra grandezza estensiva ed intensiva è presupposta come ben conosciuta anche da Ben-

david.¹⁾ Costui procedette oltre, distinguendo tra posizione e misura, e quindi tra geometria ed aritmetica; egli considera la quantità non misurabile come qualità, come proprietà intensiva, e la grandezza finita come prodotto di un fattore infinitamente grande e di uno infinitamente piccolo. — Il fisico berlinese E. G. Fischer²⁾ si riattacca pure a Kant, in quanto fa derivare il concetto dell'infinito necessariamente dalla natura della nostra rappresentazione. Nel calcolo infinitesimale considera la $dx = 0$, e come operazione fondamentale di esso il condurre ad una rigorosa espressione per il limite finale di una funzione, simbolicamente rappresentato come una parte ultima (« Endtheil ») che scompare. Però egli diverge dal pensiero kantiano in quanto contrappone al concetto intuitivo, l'intensivo come concetto e non come intuizione. Suo merito fu anche l'aver ben connesso il concetto dell'infinitesimo col principio della continuità. — Oltre il Fischer, anche I. F. Fries³⁾ pose la dx del calcolo $= 0$, e considerò il differenziale come un'astrazione, un concetto matematico generale; ma, a differenza di Fischer, pose la continuità come una legge della intuizione pura. — Interessante è in proposito il pensiero di Herbart.⁴⁾ Il problema del continuo o della continuabilità presenta, a proposito della infinita divisibilità dello spazio e della materia, una difficoltà capitale, giacchè con una tale divisibilità infinita una grandezza finita deve risultare eguale ad un numero infinito di parti. Quindi egli sostiene nello spazio intelligibile delle linee rigide o discrete, formate da un determinato numero

¹⁾ *Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematischen Unendlichen*, 1789.

²⁾ *Untersuchung über den eigentlichen Sinn d. höheren Analysis nebst einer idealischen Uebersicht d. Mathematik u. Naturkunde nach ihrem ganzen Umfang*, 1808; *Ueber das Unendlichkleine u. d. Atome*, Zwei Abhandl. d. Berl. Academie, 1828-29; — cfr. anche FREYER: *Studien z. Metaphysik d. Differential-Rechnung*, Abdr. aus d. Osterprogr. d. Klosterschule zu Ilfeld a. H., 1883.

³⁾ *Die Math. Naturphilos.*, 1883.

⁴⁾ *Allgem. Metaphysik*, II Theil.

di punti, divisibili in modo finito, non continue. Sussiste bensì una esigenza metafisica, ma la rappresentazione consueta non ci presenta lo stesso risultato. Un regresso all'infinito sono il problema dell'autocoscienza, la rappresentazione dell'«io» e la libertà del volere. Da una parte, adunque, apparenza dal continuo, dall'altra la realtà del discreto o discontinuo. Il differenziale non è per Herbart da confondersi coll'«Aneinander im Raume», perchè esso indica non degli elementi reali dello spazio, ma soltanto il crescere delle grandezze e la regola di questo crescere; nessun integrale è, rigorosamente considerato, una somma di differenziali.

Hegel ¹⁾ mirò al fondamento metafisico, nella critica del concetto dell'infinitesimo condotta nella Logica. Importante è la evidenza in cui è posta la qualità o il momento qualitativo della quantità; inoltre la differenza di grandezze finite cade nella semplice intensità. Notevolissimo è in Hegel il fatto che il progresso illimitato, l'infinito empiricamente valevole, è detto da lui l'infinito «schlecht» di fronte all'infinito conchiuso che richiama i concetti spinoziani. Del che discorreremo più innanzi. — Schopenhauer, ²⁾ come vedemmo, sottopose a critica le antinomie kantiane e la disputa sull'infinito. — Cousin ³⁾ nel primo periodo (idealismo quasi hegeliano) pensava che la ragione impersonale concepisca immediatamente l'assoluto, e quindi che Dio e il mondo, l'infinito e il finito siano inseparabili. — E. Dühring ⁴⁾ distingue tra fatti della natura e necessità del nostro puro pensiero. Nella matematica per lui l'illimitato ha il senso di una libera possibilità di pensare l'accrescimento o la diminuzione. — Una filosofia dell'infinito, accompagnata da una

¹⁾ *Wissenschaft d. Logik*, W. W. III.

²⁾ *Kritik d. Kant. Philos.*, in *Welt a. W. u. V.*, Bd. I., cit.

³⁾ V. i *Frammenti filosofici* e le *Lezioni sulla storia della filosofia*, ecc.

⁴⁾ *Logik. u. Wissenschaftstheorie*, 1878; *De tempore, spatio, causalitate atque de analysis infinites. logica*, Diss. Berol. 1861.

critica contro Hamilton, si trova in H. Calderwood ¹⁾). — Ma anche lo sviluppo interno del fondamento matematico dell'infinito fu contemporaneamente continuato. Famoso è rimasto il pensiero di Paul Du Bois-Reymond ²⁾), che non si limitò solo a considerare la teoria generale delle funzioni, ma risalì ai fondamenti gnoseologici e alla teoria generale della conoscenza. Anche di lui parleremo più innanzi. — Il matematico e filosofo Cournot ³⁾) riconobbe tanto il metodo delle flussioni quanto quello degli infinitesimi: trova eccellente il metodo di Newton ove si tratti di applicarlo a grandezze che realmente si mutano col tempo, e in generale alla ricerca dei fenomeni naturali. Il metodo infinitesimale è per lui la espressione naturale del modo d'origine di grandezze fisiche: onde potrebbe arguirsi la esistenza di grandezze infinitesime in natura, e quindi la reale esistenza della continuità. — Nel pensiero più recente il problema dell'infinito può dirsi definitivamente entrato nel dominio matematico, sia pure in rapporto al problema conoscitivo; invece i concetti di una infinita vicenda del doppio processo di evoluzione e dissoluzione in Spencer ⁴⁾), o della infinita personalità di Dio in Boström ⁵⁾), o la critica dell'opposizione cristiana tra finito e infinito in Strauss ⁶⁾), l'atomo semplice e l'infinitesimo di Fechner, ⁷⁾), o i modi di essere di una infinita sostanza e il concetto della divinità come di una personalità infinita in Lotze ⁸⁾), la volontà infinita e

¹⁾ *Philosophy of the infinite*, London 1872.

²⁾ *Théorie générale des fonctions*, trad. Milhaud, Paris 1887; *Ueb. d. Grundlagen der Erkenntnis in d. exacten Wissenschaften*, Tübingen 1890.

³⁾ *Theorie der Functionen*, übers. von Schnuse; *Essai sur les fondements de nos connaissances*.

⁴⁾ Cfr. i *Primi principii*.

⁵⁾ Cfr. Höfding, *Die Philos. in Schweden*, in *Philos. Monatsh.*, Bd. 15, 1879, S. 193 f.

⁶⁾ *Die christliche Glaubenslehre*, 1840-41.

⁷⁾ *Physikalische u. philosoph. Atomenlehre*, 1855.

⁸⁾ *Mikrokosmos*, V. Aufl. 1896 e la recente trad. italiana; *Medizinische Psychologie*, 1852; *System d. Philos.*, ecc.

attiva quale attributo dell'assoluto inconscio in v. Hartmann, ¹⁾), ecc., non possono dirsi trattazioni sistematiche del concetto dell'infinito, ma piuttosto concetti ausiliari. — Invece nel campo della matematica le trattazioni dell'argomento furono moltissime, ed anche con risultati inattesi. Senza risalire al Du Bois-Reymond già citato, o ai famosi paradossi dell'infinito in Bolzano ²⁾), di cui pure parleremo, basterà accennare al nome famoso di Giorgio Cantor ³⁾), che distinse varie specie di idee dell'infinito, considerò l'infinito attuale e creò un numero transfinito. E così devono citarsi i nomi di Dedekind ⁴⁾), Burali-Forti ⁵⁾), Schoenflies ⁶⁾), Peano, Bettazzi, Poincaré ⁷⁾), M. Cantor, Vivanti ⁸⁾), Vecchietti ⁹⁾), come pure quelli di Russel ¹⁰⁾), Borel, Gutberlet, Couturat ¹¹⁾), Geissler ¹²⁾), che si incontrano nella storia dell'alta matematica contemporanea. Altri degni di menzione sono lo Stolz ¹³⁾), Hoppe,

¹⁾ *Philosophie des Unbewussten*, 10 Aufl. 1891, ecc.

²⁾ *Paradoxien des Unendlichen*, herausgeg. v. Fr. Prihowsky, 2 Aufl. 1889.

³⁾ *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883, o in *Acta math.*, t. 2., p. 349-408, 1883; ecc.

⁴⁾ *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1. ediz., Braunschweig, 1888.

⁵⁾ *Una questione sui numeri trasfiniti*, *Rend. Circ. Mat.*, Palermo, II, 1897, pp. 154-164.

⁶⁾ Cfr. *Jahresbericht d. Deutsche-Mathem. Vereinigung*, T. 8, 1899; *Ergänzungsband*, 1908.

⁷⁾ *La logique de l'infini*, in *Rev. de métaphys. et de morale*, 17 juillet 1909, ecc.

⁸⁾ *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione matematica*, Mantova 1894; *La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti*, in *Atti Accad. Peloritana*, Messina 1908; *L'infinito nella natura e nella scienza*, discorso letto all'Accad. Virgiliana di Mantova, 1892.

⁹⁾ *L'infinito*, saggio di psicologia della matematica, 1908.

¹⁰⁾ *The principles of mathematics*, I, Cambridge 1903.

¹¹⁾ *De l'infini mathématique*, Parigi 1896.

¹²⁾ *Die Grundsätze u. d. Wesen d. Unendlichen in d. Mathematik u. Philos.*, Leipzig 1902.

¹³⁾ *Vorlesungen üb. allgem. Arithmetik; Die unendlich kleinen Größen*, in *Bericht. d. naturwiss. med. Vereins in Innsbruck*, XVI.

Wolff, Cranz ¹⁾, Beyda, Meyer, G. Lipps ²⁾, Biermann, Lasswitz ³⁾, Günther ⁴⁾; inoltre va tenuto gran conto delle trattazioni filosofico-critiche del Wundt ⁵⁾, o storiche come in Cohen ⁶⁾ e Cohn ⁷⁾, o positiviste come in Ardigò ⁸⁾, o empirio-critiche come in Renouvier ⁹⁾, come pure di moltissime altre metafisico-matematiche.

Dando uno sguardo generale al processo storico della idea dell'infinito, si scorge subito un fatto evidente. Uscito dalle intuizioni pre-filosofiche, il concetto di infinito è entrato nella filosofia antica naturalistica, ed è stato in Grecia sottoposto a critica dalla mente poderosa di Aristotele, non senza esser ricorso nella scuola eleatica, nell'atomistica, e in Platone. Nell'epoca cristiana primitiva esso fu considerato da un punto di vista mistico-religioso, venne posto in rapporto con la eternità e la creazione, e ritornò ancora in varia forma nel neo-platonismo e nella scolastica. Ma toccava all'epoca del Rinascimento di creare la moderna idea dell'infinito. In Nicolò

¹⁾ *Ueb. d. Unendlichkeitsbegriff in d. I'ath. u. Naturwiss., Wundt's Philos. Stud.*, Bd. XI, S. 1 ff.

²⁾ *Untersuchungen üb. d. Grundlag. d. Math., Wundt's Philos. Stud.*, Bd. XI, S. 254 ff.

³⁾ *Ein Beitrag z. kosmolog. Probl. u. z. Feststellung d. Unendlichkeitsbegriff*, in *Vierteljahrschr. f. wiss. Philos. v. Avenarius*, III, 329.

⁴⁾ *Der philos. u. math. Begriff d. Unendlichen*, *Vierteljahrschr. f. wiss. Philos. v. Avenarius*, IV, 513.

⁵⁾ *Ueb. das kosmol. Problem*, *Vierteljahrschr. f. wiss. Philos.*, I, 1877, S. 80 ff.; *Kants kosmol. Antinomien u. d. Problem d. Unendlichkeit*, *Philos. Stud.*, II, 1885, S. 495 ff.; *Die Unendlichkeit der Welt*, in *Essays*, 1906.

⁶⁾ *Das Princip d. Infinitesimal - Methode u. seine Geschichte*, Berlin 1883.

⁷⁾ *Geschichte d. Unendlichkeitsproblems im abendländ. Denken bis Kant*, 1896.

⁸⁾ *Infinito e indefinito*, in *Riv. di Filos.*, anno 1.^o, I-II, 1909.

⁹⁾ *La philos. de la règle et du compas* (*L'Année Philosophique*, 1891, Paris, 1892); cfr. ALIOTTA: *Il problema dell'infinito*, in *La Cultura filosofica*, Maggio-Giugno 1911, pag. 230 e sgg.

Cusano, Copernico, Bruno sono i germi di uno sviluppo incommensurabile di pensiero; per opera di molti altri la natura tutta appare come nobilitata ed ingrandita dal telescopio, con lo spirito di ricerca, e per la ragione umana speculativa. La terra e l'uomo cominciano a divenir centri relativi; si cerca l'assoluto in qualcosa di più certo che nei dogmi. E, nello sviluppo del pensiero consecutivo, si affinano da un lato la ricerca dei principî, dall'altro l'uso della conoscenza, mentre la scienza si suddivide e moltiplica. Risultati cospicui di questo progresso di pensiero sono l'accresciuta conoscenza empirica, la critica della conoscenza, il rigore e l'esattezza matematica in rapporto con le scienze della natura. Anche il problema dell'infinito entra nel campo della scienza, della critica e della matematica, e subisce un progresso nel senso della crescente chiarezza metodica con cui è trattato. Oggi, per esempio, non ci è più possibile prenderlo in esame astraendo dal criterio matematico. I concetti del calcolo infinitesimale, così profondamente stabiliti da Newton e da Leibniz, son divenuti un punto di partenza necessario anche a chi studia la questione sotto l'aspetto filosofico. Ben a ragione, a questo proposito, il Cohn, nel chiudere il suo libro sulla storia del problema dell'infinito, parla di una « erste Vorbedingung, die Einsicht in das Wesen der unendlichen Fortsetzbarkeit, die Erkenntnis der Stetigkeit, der Principien der Infinitesimalrechnung ». — Sicchè ci sembra di riconoscere nel processo storico di codesta idea dell'infinito due fatti essenziali. Anzitutto la discussione intorno ad essa incomincia quando l'infinito è divenuto un concetto che si stabilisce sistematicamente. In secondo luogo il concetto stesso, attraverso una lunga serie di sistemi e di pensieri, si è venuto facendo sempre più rigoroso e preciso. Questi due fatti concordano, secondo noi, in uno solo, in questo, che la idea dell'infinito è in continuo divenire; onde, se noi la raccogliamo oggi in una forma più complessa, non dobbiamo dimenticare lo sviluppo storico che l'ha preparata. Ma da ciò scaturisce

ancora un più profondo insegnamento, perchè è chiaro che il problema dell'infinito ha acquistato sempre maggior importanza man mano che dal campo delle prime intuizioni indefinite è penetrato in quello delle scienze esatte. Il che sembrerebbe in apparenza una contraddizione, se non si pensasse che tale è la storia di ogni problema il quale si affacci alla ragione umana. È ancora la legge dei tre stadi, additata con acume da Augusto Comte, la quale si verifica pure nel caso del nostro problema; e, se anche ai periodi del suo sviluppo storico non convenga esattamente la classificazione comtiana, resta pur sempre certo che questo sviluppo è avvenuto in una direzione costante, e cioè da uno stadio di indeterminatezza ad uno di minore indeterminatezza. Così errerebbe, secondo noi, chi credesse di poter identificare i due concetti d'infinito e di indefinito, i quali stanno piuttosto tra loro in un certo contrasto, nel senso che dal secondo si procede storicamente al primo, non viceversa. Non molto diversa sembra essere anche l'opinione di un illustre nostro matematico, il Vivanti. Per queste ragioni, come nella rassegna storica abbiamo indicato questo sviluppo progressivo del concetto di infinito, così nella parte teoretica tratteremo prima dell'infinito come ci si presenta nel mondo dei fenomeni e della scienza e nel sapere generale che ne scaturisce; indi passeremo ad una determinazione ulteriore dell'infinito nel pensiero filosofico e nella conoscenza, per giungere finalmente alla determinazione massima di esso nel pensiero matematico.

II. - L'INFINITO NELLA NATURA E NELLA SCIENZA.

Volendo in primo luogo considerare l'infinito dal punto di vista fisico ossia nella natura, nel mondo esterno quale ci si presenta, occorre, secondo noi, adottare non uno ma due punti di vista: quello delle scienze naturali, e quello della psicologia, secondo il quale il mondo esterno non è isolato ma sta in continuo rapporto col nostro organismo e con la nostra coscienza, anzi è un fatto della coscienza.

In uno de' suoi splendidi saggi, il Wundt ¹⁾ tratta della infinità del mondo, e ricorda da principio alcune concezioni cosmologiche e cosmogoniche dell'antichità. Il mondo, pei greci dell'epoca omerica, era un disco circondato dall'oceano, e su cui si stendeva il cielo. Anche per Anassimandro la terra era un corpo libero, non però ancora sferico, immobile nel mezzo dell'universo. Al tempo omerico l'orizzonte terrestre era il limite del mondo, e nella filosofia jonica naturalistica si giunse un po' più in là, cioè sino ad ammettere un universo, uno spazio che in tutte le direzioni si estende per ampio tratto attorno alla dimora centrale dell'uomo. Più tardi si formarono le idee del divenire e del perdersi delle cose, e nacque più precisa l'idea di un infinito. E vero che già l'idea della estensione sino all'orizzonte ossia all'estremo limite visibile e più in là di quello, e le considerazioni sulla durata dell'esistenza, non potevano non dirsi almeno presentimenti e

¹⁾ *Essays*, II Aufl., Leipzig 1906.

prodromi di una idea dell'infinito; ma essi appartengono più propriamente ad un campo meno determinato, ad idee indefinite le quali non ancora costituiscono il concetto in questione. Ration per cui, avendo noi per iscopo di discorrere della speculazione e della teoria dell'infinito, non risaliremo sino alle idee religiose o al mito, ma rimarremo in un campo più determinato scientificamente, giacchè non crediamo possa trattarsi del concetto di infinito, anche dal punto di vista fisico, ove non si ricorra a precisi criteri sistematico-filosofici. — L'idea dell'infinito dello spazio pare si sia formata molto più tardi di quella dell'infinito del tempo. Persino Aristotele pensò la sfera cristallina del cielo stellato come un universo limitato: l'astronomia tolemaica mantenne tale concezione, e perfino Copernico cominciò la sua grandiosa opera affermando che tanto i singoli mondi quanto l'universo tutto hanno la forma perfetta della sfera. Soltanto ai tempi del Rinascimento troviamo accenni all'infinito dello spazio in Nicolò Cusano. Nell'astronomia penetrò lentamente codesta idea, che pareva opporsi ai risultati dell'osservazione. Questa infatti poneva limiti ritenuti insormontabili, sebbene a noi oggi possano sembrare puerili le limitazioni che qualche secolo addietro si ponevano all'universo, dopo che molto ci ha insegnato la conoscenza delle distanze astrali, della velocità della luce, dei percorsi e dei tempi di rotazione, di rivoluzione, ecc. Oggi noi abbiamo estesi i limiti reali dell'universo conosciuto: di più, invece di sostituire l'infinito al finito, abbiamo esteso e meglio determinato il finito, creando, invece della semplice sfera o delle concentriche sfere celesti di altri tempi, una specie di sfera più grande e più ricca di particolari noti, e poi abbiamo formato il pensiero che si potrà dare ancora qualcosa al di là degli ultimi limiti a noi rivelati dalla esperienza. Nè ci potrebbe bastare, per esempio, un'ipotesi la quale ponesse, come fu fatto anche recentemente, un universo limitato che non andasse molto più in là dei confini estremi, già immensamente lontani, della Via Lattea; perchè, quan-

d'anche l'esperienza la confermasse di continuo ed in modo definitivo, noi riusciremmo ancora ad immaginare un ulteriore spazio, e soprattutto potremmo « pensare » sempre il prolungamento in tutti i sensi della estensione a noi nota. Così, anche ammessi dei limiti pel tempo considerato come la durata del cosmo, noi potremmo sempre oltrepassarli col pensiero, trasportandoci mentalmente in un tempo in cui quello ebbe principio e in un tempo in cui avrà fine, ossia in una epoca anteriore alla prima e in un'altra posteriore all'ultima. Questo fatto, che vedremo più tardi ricorrere nelle antinomie kantiane, ha una importanza grandissima; come pure l'ha, secondo noi, l'altro argomento addotto da S. Agostino¹⁾, che il tempo fu creato e che quindi prima della creazione, ossia all'infuori degli avvenimenti, non v'era alcun tempo. Ora ne viene che noi non possiamo pensare un avvenimento se non nel tempo e quindi posteriormente ad esso, nè un corpo se non nello spazio ossia dopo di questo: d'altra parte uno spazio senza corpi e un tempo vuoto di avvenimenti non ci sembran concepibili. Gli è che il tempo e lo spazio sono la forma pura, astratta, degli stessi avvenimenti e degli stessi corpi. In fondo, se vogliamo rimanere per poco a questi dati empirici dell'avvenimento e del corpo, noi possiamo, in rapporto ad essi, pensare il tempo come un avvenimento non ancor bene determinato, e così lo spazio come un corpo diffuso e indistinto. Non appena la determinazione s'impossessa dell'uno e dell'altro e ne pone mediante la esperienza i limiti empirici, avviene tosto che si fissano i concetti del corpo e del fatto, distinti entro un grande indistinto che rimane della stessa loro natura e che costituisce per il pensiero una specie di forma pura entro cui quei dati empirici stanno come un contenuto determinato.

Per l'uomo di epoche antichissime non potevano lo spazio e il tempo pensarsi separati dal loro contenuto; e per questo noi crediamo che in lui non potesse darsi l'idea

¹⁾ *Civ. Dei*, XI, 4; *Confess.*, XI, 11-30.

dell'infinito. Difatti quest'uomo primitivo fissava in modo vago i confini dell'universo all'estremo orizzonte visibile dal punto della sua dimora, nè poteva immaginare uno spazio ulteriore, perchè egli non pensava altro spazio che quel complesso indistinto di oggetti che egli comprendeva nel suo campo visivo, e nel quale entravano naturalmente anche gli astri, di cui non conosceva le distanze e quindi neppure la posizione in uno spazio più grande di quello direttamente apprezzato. Così, l'idea del tempo si sarà per lui limitata a quella successione di avvenimenti di cui egli poteva avere notizia, ossia alla vita propria o dei suoi affini. Un'idea più vasta di estensione e di successione non poteva ottenersi che in due modi: allargando i confini della esperienza, ossia comprendendo in questa un maggior numero di dati, ma soprattutto applicando a questi un processo di astrazione, mediante cui si potesse spogliarli dei loro caratteri specifici, mantenendo quelli comuni, ossia ancora sostituendo loro delle forme più comprensive e più generali, che, confrontate coi singoli, costituissero estensioni e successioni ampliate e schematiche in cui potessero ogni volta rientrare ed aggiungersi i nuovi dati empirici. Una volta formatisi questi schemi generali, essi si arricchiscono, ad ogni nuova esperienza, di particolari; e d'altra parte questi particolari si arricchiscono con l'aggiunta dell'estratto ricavato dai precedenti. Per questo, mentre l'uomo primitivo concepiva come universo soltanto quello visibile (poichè la vista gli forniva più oggetti che non gli altri sensi, non potendo egli ben toccare nè sentire nè percorrere tutto quello che vedeva), e ciò perchè non poteva ancora distinguere e aggiungere a questo dato concreto l'astratto generale dei dati visivi cioè lo spazio, l'uomo astratteggiante potè più tardi non solo aver sperimentato su più larga scala, ma aver pensato un « al di là » rispetto agli ultimi limiti della esperienza.

Il bambino non si comporta diversamente dall'uomo primitivo: non ha idea dall'infinito finchè non può ben pensare in astratto. Fintantochè per lui lo spazio non è che un corpo

e il tempo un avvenimento, egli non concepisce bene un finito e un infinito. Se egli dice che (come ne dà un esempio il Wundt) il mondo non va oltre una data siepe lontana od una catena di monti o l'orizzonte, non è ch'egli lo pensi là finito: egli piuttosto non vi pensa affatto, ma ha soltanto la idea vaga, indefinita di qualcosa di molto remoto. L'idea dell'infinito risulta quindi da una determinazione apprezzativa del pensiero. Il bambino (e la esperienza personale ce ne fornisce la prova) non riesce a pensare che una durata indeterminata che egli fa corrispondere press'a poco a quei periodi della sua esistenza di cui conserva intatta la memoria: l'idea di un tempo anteriore alla sua infanzia e prolungantesi nell'avvenire non gli è familiare; per lui il tempo è tutto riempito, per così dire, dai pochi fatti che conosce, nè egli si cura di prevedere un futuro che non sia immediato, nè di argomentare un passato da cui egli sia uscito. Tanto è vero che l'idea di dovere un giorno morire non commuove affatto il bimbo, che la possiede indefinita e non la colloca come limite determinato alla fine della propria determinata esistenza. Anche l'idea di uno spazio celeste immenso è in lui indistinta; a stento egli può concepire che alcuni astri siano lontani da noi milioni di chilometri ossia assai più di certe distanze che egli conosce e che ritiene già massime; sicchè giunge a fatica con la mente là dove noi vediamo solo dei termini relativi confrontati con dati astratti di molto maggiore estensione. Ed è appunto questa fatica che lo arresta nell'indeterminato. « Infinito » per un bambino equivale in tal caso a « molto grande, così grande che è quasi impossibile giungervi », permanendo in lui l'idea di qualcosa che sarebbe forse possibile raggiungere, ossia il ricordo e l'analogia del dato empirico che non è ancor molto sorpassato dai primi conati dell'astrazione. E in lui piuttosto il senso del remoto e dell'ignoto, che in lui fatto adulto scompare o perde il carattere di mistero. L'idea dell'eternità, dell'immortalità dell'anima sono esse pure molto indecise nel fan-

ciullo; egli non può pensarvi se non immaginando (e diciamo così appunto perchè egli pensa per immagini) un tempo che esaurisce la sua più ampia capacità di attesa e di memoria. Non altrimenti i popoli, i quali nelle tombe ponevano cibo per i defunti, avevano un concetto poco preciso dell'oltretomba, che essi immaginavano piuttosto come un'altra vita o una porzione di vita perdentesi nell'indeterminato. L'idea cristiana della vita oltremondana, oltre che elevare il concetto dell'anima e della responsabilità morale, estende anche quello dell'immortalità, che essa avvicina all'eternità, ossia all'infinito del tempo per tutti i secoli dei secoli, persino alla assenza del tempo.

Ora, se l'uomo primitivo ed il fanciullo hanno idee indefinite conformi alle cognizioni empiriche pure indefinite, l'uomo astratteggiante ha una più ampia conoscenza di dati empirici cui meglio definisce, e che inducono all'infinito astratto. — È evidente quindi che l'infinito è un astratto: perchè, fin che esso non è tale, rimane un indefinito, a cui non vennero ancora assegnati limiti, e non è quindi un vero concetto. Non appena esso rientra in determinati confini, esso tende a divenir tale concetto, e viceversa esso avrà limiti in quanto è un concetto, perchè una determinazione anche generica, come p. e. quella del « bianco », non sarà tale che in quanto già presuppone la conoscenza della distinzione qualitativa dei colori, del fenomeno luminoso in genere, della sua localizzazione, dei contrasti, delle assimilazioni di superfici uniformemente colorate, ecc. ecc., senza tener conto delle rappresentazioni riprodotte e dei concetti appresi indirettamente. — E qui ci sembra importante un'altra considerazione, che ha stretta attinenza con le precedenti. Se noi guardiamo in una notte, da un luogo aperto, il cielo stellato, probabilmente noi abbiamo nel nostro campo visivo lo stesso spazio celeste che vi aveva l'uomo primitivo, digiuno di cognizioni astronomiche e incapace di astratteggiare e di calcolare, purchè identiche siano alcune condizioni come l'acutezza visiva ed altre inerenti all'apparecchio sensoriale. Ora perchè

noi crediamo di aver sott'occhio uno spazio infinitamente più grande di quello del primitivo? Unicamente perchè noi lo apprezziamo più grande. L'idea del nostro spazio celeste è ingigantita da ciò, che noi sappiamo le distanze dei pianeti e delle stelle da noi essere non di pochi metri o di qualche chilometro ma di migliaia e di milioni di chilometri. Ora, poichè noi già possediamo la idea astratta del metro e del chilometro, non possiamo a meno di pensare che 1.000.000 di chilometri è, al paragone, una distanza infinitamente grande, o meglio, per un lato indefinita perchè non la possiamo ben determinare in un momento, e per l'altro immensa in quanto sappiamo che è molto maggiore di certe massime distanze, come il diametro terrestre o il percorso dell'equatore, che possiamo un po' meglio comprendere e ritenere. Quindi non è già che noi vediamo effettivamente nel cielo tali distanze: esse ci sono apprese pel calcolo. La più precisa cognizione della lontananza di un oggetto da noi c'è fornita dal concorso e dalla ripetizione di esperienze non solo visive semplici, ma di accomodamento e di convergenza oculare, tattili e muscolari, di dislocamento, ecc. Ma per i corpi celesti, queste ultime sensazioni non ci soccorrono; onde a maggior ragione le distanze sono tali soltanto per il pensiero. Noi e l'uomo primitivo vediamo lo stesso spazio empirico, ma conosciamo uno spazio differente. Li diciamo però identici perchè « in realtà » le distanze da noi scoperte sussistono e sussistevano anche dinanzi all'uomo antico che le ignorava. La differenza di apprezzamento sta adunque nel diverso valore assegnato a questa « realtà »; ossia sta nel sostituire alla « realtà » di una volta la « realtà » nostra, il complesso delle cognizioni nostre attuali considerate come aventi un valore oggettivo. — Supponiamo ora che tanto noi quanto l'uomo primitivo possediamo l'idea dell'infinito spaziale. Si comprende che, siccome il pensare un « al di là » oltre uno spazio ritenuto immenso è diverso dal pensare un « al di là » oltre uno spazio apprezzato non molto grande, così, ammesso che

nei due casi si pensi in egual modo alla possibilità dell'esistenza di uno spazio oltre l'ultimo limite, si avrà nel primo un'idea più grandiosa dell'infinito spaziale che non nel secondo, o anche, pur ritenendosi immenso in entrambi i casi il nostro universo, nel primo caso lo si penserà più ricco di contenuto e quindi anche dotato, per così dire, di una infinità più sorprendente. Altra cosa è il pensare che si possono dare distanze superiori ai 4.467.000.000 di chilometri che rappresentano la distanza di Nettuno dal Sole; ed altra cosa è il pensare che possono darsi distanze superiori ad 1 centinaio di chilometri. Nondimeno, siccome per l'uomo primitivo certe minime o brevi nostre distanze eran le massime, così a lui probabilmente la scoperta di queste non avrà recato minor sorpresa di quella che a noi viene dalle scoperte astronomiche più recenti: tanto più che, se l'universo era per il primitivo meno denso di oggetti e di dati che non per noi che lo abbiamo ingrandito nel pensiero anche rispetto al tempo, egli, il primitivo, non poteva apprezzarlo piccolo non conoscendone uno maggiore, e poi perchè quello corrispondeva alle esigenze del suo pensiero meno capace di astrazione mentre può il suo universo essere piccolo solo per noi che lo collochiamo entro un altro più astratto e di misure di gran lunga maggiori.

Così è pure per gli ingrandimenti telescopici e per le scoperte che questi ci hanno rilevato. Noi abbiamo, mediante queste scoperte, conosciuto nuovi mondi e meglio determinato i particolari di certi altri: sicchè da un lato s'accrebbero le nostre cognizioni empiriche, dall'altro si ampliò la conoscenza dell'universo totale e la idea dell'infinito dello spazio. Ma con ciò non s'è alterato il nostro spazio empirico: in esso sono soltanto entrati più particolari appresi con esperienze mediate o con calcoli. Il fatto che noi possiamo distinguere in certi telescopi in modo evidentissimo i satelliti di Giove o i sollevamenti vulcanici nella Luna o le famose linee diritte in Marte, non significa che tutto ciò sia divenuto esperienza ordinaria; anzi è appunto

per ciò che se ne avvantaggia la nostra idea dell'infinito, in quanto sappiamo che esistono in realtà i particolari scoperti, ma che essi sono talmente remoti da divenir solo per eccezione accessibili ai nostri mezzi straordinari di ricerca. D'altra parte sappiamo che queste scoperte sono realtà empiriche; quindi veniamo ad ingrandire mentalmente il nostro universo empirico e spostiamo ancor più in là i suoi limiti e la idea dell'infinito (infinitamente grande).

La stessa cosa avviene per le scoperte microscopiche. Il più piccolo punto visibile diviene, sotto potenti lenti, una grande macchia: una pulce assume proporzioni che ci sorprendono; balzano all'occhio i globuli del sangue, singole cellule nervose, filamenti sottilissimi. Anch'essi non alterano il nostro spazio empirico. Anzi, appunto per ciò quei particolari ci diventano infinitamente piccoli, perchè essi non sono quelli della esperienza ordinaria, ma assai remoti e molto meno ritrovabili per la loro esiguità. D'altra parte anche qui sappiamo che essi esistono, e perciò li aggiungiamo alle nostre cognizioni empiriche che si ampliano, spostando sempre più in là i limiti che le rinchiudono e quindi anche la idea dell'infinito (infinitamente piccolo). L'idea dell'infinito, nei casi qui citati del telescopio e del microscopio, diviene ancor più necessaria per un'altra ragione. La luna che noi vediamo ingrandita al telescopio è la medesima che contempliamo ad occhio nudo dalle nostre finestre. Il pelo che al microscopio ci sembra divenuto un fusto d'albero, è il medesimo pelo che alla vista normale appare come una linea appena percettibile. Nel primo caso e nel secondo la realtà rivelata dallo strumento ottico ci appare molto più grande, e in essa compaiono molti più particolari. Ora il fatto che quella luna è la stessa luna che poc'anzi e poco dopo io rivedo in quella data posizione, e che il pelo è quello stesso che io pongo sul portaoggetti del microscopio, mi avverte che io non sono passato da un oggetto a un altro, ma che ho avuto una percezione più complessa del medesimo. Quindi, rimanendo ferma la idea della identità

sua, ne viene che anche i nuovi particolari scoperti devono esser ritenuti come intrinseci all'oggetto stesso e perciò veri, soltanto non controllati dalla esperienza ordinaria. E così noi siamo anche indotti a credere che si diano nell'universo molte cose che non ci sono note, ma che non cessano per questo di esistere. Ora, dato il nostro potere di astrazione, possiamo supporre un numero infinito di tali oggetti. Questi oggetti, immaginati oltre quelli già empiricamente noti, non sono che la immagine o copia di questi ultimi: ciò che v'ha di nuovo è il pensiero della possibilità di essere aggiunti per via empirica. Tale possibilità deriva adunque in questo caso non tanto dall'introduzione di oggetti estranei nel campo delle nostre cognizioni, quanto dalla alterazione delle determinazioni di un medesimo oggetto. Difatti se noi, già prima della scoperta delle lenti, supponevamo possibile il dividere una particella minima in nuove parti più piccole, ora noi andiamo molto più in là, perchè possiamo effettivamente vedere particelle che non sono visibili se non con ingrandimenti di parecchie centinaia di volte; e l'aver ottenuto una tal prova empirica ci autorizza a ritenere possibile procedere più oltre, o per lo meno ad ammettere l'esistenza di una infinità di particelle costitutive assai più piccole. Così per le scoperte astronomiche; e così pure per l'idea di tempo, dacchè l'astronomia e la psicologia sperimentale ci insegnano che esistono tempi così brevi da doversi ritenere infinitesimi in confronto di quelli da noi apprezzati minimi.

Adunque nel mondo fisico l'idea dell'infinito per noi deriva anzitutto dalla capacità di definizione ed astrazione del dato concreto, poi dall'aggiunta di nuovi dati empirici alla esperienza precedente, poi in gran parte dal fatto che un dato empirico può mutare i suoi limiti e le sue determinazioni. Ed anche in questo ultimo caso è a farsi l'osservazione esposta più sopra, che cioè basta una sola prova empirica a farci ritenere p. es. che nel sangue vi sono dei corpuscoli rossi e dei corpuscoli bianchi: noi non li vediamo

continuamente, e però riteniamo vera la rivelazione microscopica, che noi immaginiamo o, meglio, pensiamo entro il dato empirico, così come pensiamo in genere che si dà realmente il mondo del telescopio e quello del microscopio, sebbene vediamo comunemente solo quello compreso nel nostro campo visivo, e viviamo in un mondo di stimoli, di cui ci è soltanto accessibile quello compreso fra la soglia e l'altezza dello stimolo.

E qui non tornerà inopportuna qualche osservazione. — È noto che ciascuna sensazione possiede una certa intensità, in rapporto alla quale essa può venir comparata con altre sensazioni, specialmente con quelle della medesima qualità, e a norma della quale noi apprezziamo la forza dello stimolo sensoriale esterno. La psicologia sperimentale si è assunta il compito di indicare se quell'apprezzamento immediato, che noi facciamo con l'aiuto delle sensazioni, corrisponda alla forza effettiva dello stimolo o come altrimenti ne differisca ¹⁾. Ora questo rapporto tra sensazione e stimolo ci è reso noto solo come rapporto tra gli stimoli fisici e il nostro modo di concepire e paragonare le intensità delle sensazioni date da quegli stimoli; ma non può essere il rapporto diretto fra le sensazioni stesse e gli stimoli, perchè deve necessariamente comprendere, oltre la sensazione, l'appercezione della sensazione. È pure noto che esistono dei metodi psicologici intesi a stabilire i regolari rapporti tra il mutamento quantitativo degli stimoli esterni e i mutamenti quantitativi della nostra sensazione percepita. Tali metodi mirano a due scopi: determinare i valori limiti, tra i quali i mutamenti di stimolo compaiono a noi accompagnati da mutamenti nella sensazione; poi indicare i rapporti regolari tra i mutamenti dello stimolo e la nostra percezione dei mutamenti avvenuti nella sensazione. Essi riguardano perciò non solo l'intensità ma anche la qualità della sensazione e

¹⁾ W. WUNDT: *Grundzüge d. physiol. Psych.*, V Aufl., Bd. I, S. 466 ff.

si estendono pure alle rappresentazioni, che risultano dall'azione concomitante di diverse sensazioni elementari. Quanto all'intensità, la percezione che di essa abbiamo in rapporto alla sensazione è possibile tra un limite inferiore e un limite superiore dello stimolo. L'inferiore è quello, al di sotto del quale il movimento stimolatorio è troppo debole per dar luogo ad una sensazione osservabile (« merklich »), e si chiama « soglia dello stimolo »¹⁾; superiore è quel limite, al di sopra del quale ogni ulteriore aumento della forza dello stimolo non rende più osservabile alcun aumento nell'intensità della sensazione, e si chiama « altezza dello stimolo ». Adunque si ha una sensazione appena osservabile o minima, e una sensazione massima, e tra l'una e l'altra tutta una serie di sensazioni intermedie. Dalla posizione della soglia dipende la sensibilità, che sarà maggiore ove quella sia più bassa; e dalla altezza dello stimolo dipende la ricettività, la suscettività dello stimolo. Invece i rapporti tra i mutamenti dello stimolo e la percezione dei mutamenti della sensazione corrispondente non riguardano la sola soglia o la sola altezza dello stimolo, ma tutta la regione compresa fra quei due limiti estremi. In questo caso si tratta di indicare di quanto l'intensità della sensazione muti, per il nostro apprezzamento, sulla scala compresa fra la soglia e l'altezza dello stimolo, quando la forza dello stimolo viene mutata di una quantità data. La differenza costante appena osservabile nell'intensità della sensazione, ottenuta in tal modo alterando lo stimolo, è la sensibilità di differenza, che si misura mediante il valore reciproco del mutamento necessario nell'intensità dello stimolo per produrre un mutamento di un determinato grado di osservabilità nella sensazione. — Da tutto ciò risulta, ed è quanto volevamo ricordare, che le nostre sensazioni ci rivelano un mondo relativo, ossia corrispondono

¹⁾ Cfr. la « *Schwelle des Bewusstseins* » in Herbart (*Psychologie als Wissenschaft*), Werke, Bd. V, S. 541; e l'applicazione del concetto di « soglia » alla misura della sensazione in FECHNER: *Elemente der Psychophysik*, Bd. I, S. 238, 1860.

a gradi di intensità di stimolo che sono in un numero limitato e costante, mentre al di sotto di un limite minimo e al di sopra di uno massimo possono darsi altri gradi di cui non abbiamo più sensazione, ma dei quali abbiamo conoscenza sia per i fatti della oscillazione della soglia e sia per i mutamenti effettivamente operati in qualche modo nello stimolo. Insomma si tratta di una scala nella gradazione della intensità dello stimolo, della quale è rivelato alla nostra coscienza solo un tratto determinato, e di cui il resto ci sfugge, mentre abbiamo la prova della sua esistenza. Anche sappiamo che si possono ottenere variazioni apprezzabili nell'intensità della sensazione alterando la intensità dello stimolo; ma anche qui non tutte le variazioni relative allo stimolo sono le identiche variazioni relative alla sensazione. Ed è a questo proposito che ricorre la legge fondamentale del Weber. — Ernesto Enrico Weber trovò che una differenza fra sensazioni comparate a due a due è apprezzata come egualmente osservabile quando è eguale il rapporto degli stimoli: ossia se nella nostra « Auffassung » l'osservabilità della sensazione deve aumentare di grandezze eguali assolute, il relativo aumento dello stimolo deve restare costante; e però la forza dello stimolo deve aumentare in un rapporto geometrico se il grado di osservabilità della sensazione ha a crescere in un rapporto aritmetico. Questa è la legge che da Fechner¹⁾ venne designata come « legge di Weber », e alla quale lo stesso Fechner diede una formulazione matematica ($E = C \log \text{nat } R$; ossia la sensazione è eguale al logaritmo dello stimolo, essendo C una grandezza costante). Merkel²⁾ ha poi posto la seguente legge di proporzionalità: in intervalli sufficientemente grandi i gradi di osservabilità di più sensazioni formanti una serie crescono press'a poco proporzionalmente

¹⁾ Abhandlungen d. kgl. Sächs. Gesell. d. Wissensch. zu Leipzig, Math.-phys. Cl., Bd. IV, S. 455, 1859.

²⁾ Wundt's Philos. Stud., Bd. V, S. 499, 1889, etc.

agli stimoli. — Ora si dà questo fatto, che nel campo delle sensazioni di suono la determinazione della soglia di differenza, ottenuta con quei metodi che si fondano sul confronto delle più piccole differenze, ha dato entro ampî limiti una coincidenza con la legge di Weber, mentre nell'apprezzamento di intervalli maggiori di sensazione, nelle gradazioni medie, si trovarono risultati diversi; per le sensazioni luminose si vide che la legge di Weber valeva nel confronto delle grandezze apparenti degli astri in rapporto al confronto dei chiarori oggettivi, ma che invece nelle esperienze coi dischi di Masson, Helmholtz ed Aubert si ottennero differenze maggiori nella relativa sensibilità di differenza; i risultati delle esperienze di Weber ottenuti col metodo delle differenze appena osservabili nelle sensazioni di pressione, coincidono solo in parte con la sua legge¹⁾: per le sensazioni di tensione la legge di Weber ha pure un valore relativo ad un dato tratto della serie, perchè nel confronto di pesi piccoli la relativa soglia di differenza è maggiore, in quello di pesi grandi è trovata minore. Ora si vede che non solo le variazioni nella sensazione, apprezzata nella sua intensità, non sono eguali a quelle degli stimoli; ma che stanno con queste in un rapporto, il quale è costante solo per un tratto della scala delle intensità dello stimolo e quindi non permettono di prolungare in infinito la validità di quel rapporto al di là dei limiti della osservabilità. Dice il Wundt (loc. cit., S. 541) che bisogna ancora considerare la legge di Weber come un caso speciale di una legge generale della relatività degli stati di coscienza, che essa è soprattutto non una legge della sensazione ma una legge dell'appercezione, e che include due concetti empirici della soglia, la soglia dell'attenzione e la soglia della coscienza. Ad ogni modo la sua validità si limita ai rapporti di intensità della sensazione, e non a quelli di qualità; e di più essa ha un valore relativo in quanto presuppone due condizioni, che la differenza delle sensazioni debba

¹⁾ *Tastsinn u. Gemeingefühl*, S. 543 f.

essere minima, e che l'apprezzamento debba seguire in base al confronto di due sensazioni ossia a confronti del tutto indipendenti e singoli, e perciò paragona le sensazioni secondo differenze relative.

Questi fatti ci inducono a considerare il nostro mondo fisico come un campo determinato di stimoli, i quali possono entrare a far parte della coscienza soltanto a condizione che posseggano una determinata intensità, anzi un numero determinato di gradi di intensità, oltre i quali non si ha più una corrispondente sensazione. Ma la progressione dei gradi di intensità di sensazione apprezzati appena differenti, non corrisponde in modo identico a quella dei gradi differenti nella intensità oggettiva dello stimolo o in quella intensità che noi per altra via riscontriamo e modifichiamo nello stimolo. Quindi a produrre un minimo cangiamento nell'apprezzamento della intensità di sensazione occorre non un minimo ma un abbastanza grande cangiamento nello stimolo, onde naturalmente veniamo a constatare che esiste nella scala delle intensità dello stimolo una differenza anche là dove questa non esiste nella scala corrispondente per la sensazione, e che insomma è per noi spesso un continuo, cioè un ininterrotto e un dato unico ed uniforme, ciò che indirettamente sappiamo essere in natura differenziato. Onde anche per tal modo conosciamo che si danno fatti di cui non abbiamo esperienza diretta, ma che solo in maniera eccezionale e indiretta ci sono rivelati. Di più, la legge che confronta le differenze successive e progressive nella intensità dello stimolo con le differenze avvertite nella intensità della sensazione corrispondente, non pare abbia un valore sempre costante; onde, se già è limitato il tratto compreso tra soglia e altezza dello stimolo, viene a limitarsi ancor più la validità di codesta legge che è trovata giusta solo in alcuni dei molti casi compresi in quel tratto.

Così si impone in modo deciso l'idea della relatività dei limiti del mondo fisico che si presenta alla nostra co-

scienza; e in genere è quindi naturale la supposizione di un mondo di stimoli ignoti ed innumerevoli che giacciono al di sopra e al di sotto del limite di osservabilità che è poi un limite non per la sola sensazione, ma, come abbiamo visto, per la appercezione della sensazione. Quindi è anche naturale il sorgere dell'idea di un indeterminato oltre quei confini, anche per il fatto che nella determinazione della soglia, p. es., entrano pure la concentrazione dell'attenzione e altri fattori che aumentano per così dire la sensazione e fanno pensare a gradi di intensità di questa, i quali devono sussistere pur non essendo tali da rendersi osservabili. — Ma è necessaria quì un'altra osservazione.

Quando noi mediante il telescopio veniamo a stabilire come soglia visiva un elemento che nella visione senza telescopio è molto al di sotto della soglia, o quando al microscopio vediamo un cono della retina che ad occhio nudo è pure al di sotto della soglia della coscienza, noi non dobbiamo dire che si sono alterate la legge e le condizioni generali costanti della soglia delle nostre sensazioni visive: bensì dobbiamo pensare che si è modificato il rapporto speciale sotto cui si presenta lo stimolo, non il rapporto generico tra stimolo e sensazione. Difatti, essendosi ingrandito per noi lo stimolo e rimanendo costante la sensibilità assoluta e di differenza, si comprende che occorrerà ora uno stimolo assai più piccolo relativamente a quello minimo primitivo ora ingrandito, ma assolutamente identico al medesimo non ingrandito perchè si abbia ora un minimo grado di intensità di sensazione. E però, essendosi operato l'ingrandimento e introdotti così come minimi percettibili dei nuovi particolari, quel grado cercato di intensità di sensazione corrisponderà a uno stimolo nuovo che prima era sotto la soglia. Questo è ciò che avviene nella determinazione delle piccolissime e delle grandissime distanze, ossia di estensioni che nella nostra esperienza comune non ci sono apprese, ma ne vengono rivelate in altro modo, e derò non alterano quelle leggi di limitazione della soglia e

dello stimolo, di cui ci siamo ora occupati. — Valga qualche esempio. L'orecchio umano apprezza come suoni solo un certo numero delle innumerevoli vibrazioni aeree; numero che press'a poco oscilla tra le 30 e le 35.000 al secondo. Esso è sensibile a lunghezze d'onda che variano fra i 10 metri nella nota più profonda, e un centimetro nella più acuta: se si designa come « ottava » lo spazio compreso fra due suoni il cui numero di oscillazioni stia nel rapporto di due ad uno, diremo che la sensibilità del nostro orecchio abbraccia 10 ottave. L'occhio può apprezzare ondulazioni luminose della lunghezza minima d'onda (violetto) di 400 milionesimi di millimetro, e della massima (rosso) di 800 milionesimi di millimetro; la parte ultra-violetta dello spettro, che ha una vivissima azione chimica, e così pure la parte ultra-rossa, che dà invece una vivissima energia calorifica, sono non più raggi luminosi per noi, ossia non esistono per il nostro occhio. Ora, per le distanze la questione è analoga. Se si parla di pochi millimetri, centimetri, o metri, se ne ha subito una rappresentazione abbastanza precisa, in forza della quotidiana esperienza e della facilità di procacciarsi i termini di paragone. Ma quando parliamo di un milionesimo di millimetro o di un milione di chilometri, dapprima, non potendo far rientrare queste grandezze nella categoria di quelle che ci sono famigliari e che divennero per noi le più comode, ne abbiamo una idea non chiara; poi, siccome rimangono costanti i limiti della nostra sensibilità e della nostra sfera di esperienza, non potendo alterare questi, noi alteriamo le proporzioni di ciò che vogliamo esaminare: si ingrandisce ciò che sappiamo essere troppo piccolo, e si rimpicciolisce il troppo grande, in modo da far rientrare i nuovi elementi nel campo comune di rappresentazione. Insomma si fa mentalmente ciò che nelle specule si fa col telescopio, o coi microscopî entro i laboratori: solo che nel caso presente noi siamo a ciò costretti da necessità di rappresentazione, mentre con gli strumenti di ingrandimento l'oggetto in-

grandito non è dato immediatamente, e ci procura solo una rappresentazione parziale. — La millesima parte di un millimetro è indicata con $1\ \mu$ (un micron), e la milionesima parte di un millimetro è segnata con $1\ \mu\mu$ (un millimicron). Con ottimi microscopi si vedono dimensioni fino a un limite minimo di ca. $200\ \mu\mu$, cioè di $0,2\ \mu$. Si intende che in queste misure il μ è la millesima parte di quel millimetro che noi conosciamo comunemente: sotto il microscopio, esso rappresenta presso a poco per noi ciò che ad occhio nudo può essere il millimetro; cosicchè se noi dovessimo per ipotesi d'ora innanzi vivere con occhi provvisti di lenti da microscopio e quindi vedere solo il mondo microscopico, dovremmo adottare come millimetro un μ , volendo mantenere le nostre abitudini di misura e un'unità costante di misura in rapporto alla precedente. — Se il $\mu\mu$ rappresenta per noi una estensione minima già al microscopio, si danno in natura estensioni e spessori ancora più piccoli, di cui possiamo avere la prova mediante alcune esperienze, come p. es. immettendo una gocciolina d'olio eguale a ca. un millimetro cubo, in un bacino di acqua tersa della superficie di ca. $\frac{1}{2}\ m.^2$, e verificando, mediante immersione di pezzetti di canfora e l'osservazione che certi loro movimenti caratteristici nell'acqua pulita non si producono, la presenza di strati oleosi non più visibili ma pure esistenti e dotati di uno spessore calcolabile fino a $2\ \mu\mu$: con metodi più precisi si può in questo caso giungere a verificare ancora la presenza di uno strato omogeneo d'olio dello spessore di $0,5$ e $0,3\ \mu\mu$, che dev'essere press'a poco lo spessore corrispondente a un solo strato di molecole. Spessori minimi sono anche quelli dei veli delle bolle di sapone. Ora, per poterci fare un'idea di una misura $= 0,3\ \mu\mu$, di cui in nessun modo possiamo procurarci la esperienza visiva, dobbiamo p. es. procedere così: se in un centimetro cubo di gas a 0° centigradi e a $760\ mm.$ di pressione si trovano 28 triloni di molecole e queste misurano ciascuna $0,3\ \mu\mu$, noi possiamo mentalmente ingrandire il $cm.^3$ sino

a dargli p. es. un lato di 10 km. di lunghezza. Allora, se ciascun lato che prima era di un cm. è diventato ora di 10 km., ossia $1 \text{ cm.} \times 1.000.000$, anche il diametro di ciascuna molecola diverrà $0,3 \mu \times 1.000.000$, ossia 0,3 mm. In un caso come questo, ciò che prima era distinto, ossia il centimetro cubo, è divenuto un enorme indistinto (10 km.³), e ciò che era indistinto, cioè il $0,3 \mu$, è divenuto distinto essendosi trasformato in ca. $\frac{1}{3}$ di mm., estensione che per la nostra sensazione visiva rappresenta un valore di percettibilità, ad una distanza di 25 cm. ca., conveniente per la visione distinta. In fondo, noi non abbiamo fatto altro che adattare alle esigenze nostre rappresentative, delle estensioni che di per sè non lo sarebbero, e che solo per una tal trasposizione possono essere introdotte nel pensiero. Ma, se bene osserviamo, noi non possiamo dire di esserci trovati dinanzi a necessità nuove di percezione e di rappresentazione: sono mutate solo le occasioni e gli stimoli, ed è la coscienza di questo mutamento che ci fa accorti delle grandi differenze oggettive e quindi della possibilità di un procedere indeterminato al di là di certi limiti nel mondo fisico. Se non ci fosse dato di confrontare mentalmente e di porre in rapporto p. es. il μ e il mm., e perciò di sapere che il primo è la millesima parte del secondo, noi non potremmo molto ben distinguere tra il μ visto al microscopio e il mm. visto ad occhio nudo, mentre sappiamo che il μ visto al microscopio non cessa di essere la millesima parte di un mm., che quest'ultimo al microscopio diventerebbe un metro, e che nel μ ora divenuto distinto possono ancora vedersi delle suddivisioni, ecc., le quali sono dei fatti nuovi, che non cessano di essere reali come non cessa di esistere il mm. sebbene divenuto della lunghezza di un metro, e così per tutti i suoi multipli a noi già noti e solo spostati più lungi nel pensiero.

Così per le grandi distanze. Volendo calcolare le massime che ci sono note, ci serviamo del tempo che si impiegherebbe a percorrerle con una velocità nota. Però, se

è cosa facile pensare un km. percorso in 10 minuti e 6 km. in un ora, e 48 km. in 8 ore, perchè ci viene in aiuto la nostra personale esperienza visiva e muscolare, per distanze maggiori noi dobbiamo ricorrere a esperienze indirette, come quella della velocità dei treni o di un automobile. Certamente, le prime volte che i nostri padri avranno sentito parlare del percorso Milano-Roma in treno diretto, avranno dovuto far qualche sforzo mentale per mettere in rapporto una distanza di parecchie centinaia di chilometri con una durata di ca. 12 ore e una velocità di 50-60 km. all'ora. Ai nostri giorni le velocità degli aeroplani, confrontate con quelle dei nostri treni ordinari, ci costringono a modificare un poco il nostro modo di vedere e di coordinare i concetti di distanza e di velocità. Ma se ciò è di per sè poco agevole, quanto più faticoso non è il farsi un'idea p. es. della velocità della luce o della corrente elettrica!

E nondimeno, quando noi siamo riusciti ad abituarci alle nuove scoperte, ci avvediamo che in realtà esse non sono incompatibili con le nostre abitudini mentali, ma soltanto con le rappresentazioni precedenti. Difatti se divenisse abituale il superar la distanza Torino-Milano in ore $1\frac{1}{2}$, con un aeroplano, finirebbe col ridursi il concetto della distanza che separa queste due città e diverrebbe insopportabile l'idea di superarla in 3 o anche 4 ore, così come ora non pensiamo certamente normale il vincerla in 2 o 3 giorni interi di vettura. Avverrebbe quindi che si sposterebbe soltanto non il nostro modo di intender le distanze, ma la distanza stessa nel nostro pensiero: cioè quella che prima era massima diventerebbe media o infima, e accanto ad essa se ne potrebbero collocar molte altre nuove, per creare così un complesso che starebbe, per così dire, entro gli stessi limiti mentali ma apparirebbe assai più denso, e immenso, e infinito: onde se le nuove distanze ci appariranno famigliari come prima le precedenti, e quindi non diverse da esse, appariranno però molto diverse quando si vedrà che sono multiple di quelle in realtà, sebbene l'abi-

tudine e l'astrazione le rendano sicuramente concepibili. Ed è appunto questa relatività che ci dà nel mondo fisico l'idea dell'infinito; perchè per essa i confini già estremi di un totale rappresentativo immenso possono vedersi superati da nuove rappresentazioni e da probabilità di altre nuovissime.

Nelle distanze più grandi che noi oggi concepiamo, rientrano quelle planetarie. La Luna è il corpo celeste più vicino alla Terra, da cui dista 385.000 chilometri. Se una strada congiungesse il nostro pianeta al suo satellite, occorrerebbero parecchi anni di marcia a piedi per raggiungerla o più di mezzo anno viaggiando con uno dei nostri treni odierni ad una velocità media continua di 60 km. all'ora. Per camminare dalla Terra sino a Venere, che è un pianeta a noi relativamente vicino, occorrerebbero ca. 2800 anni. Da ciò risulta che, come non si può più misurare certe distanze mediante delle velocità = 5-6 km. all'ora, perchè queste non ci darebbero un'idea chiara e sintetica di ciò che si vuol misurare, così la necessità di adottare una nuova scala si impone, tanto più che queste immense distanze planetarie ci divennero famigliari permettendoci di parlare di « vicino », di « più lontano », anche quando si tratta di milioni di chilometri e non più di pochi chilometri. Non altrimenti avviene delle carte geografiche e topografiche. Una carta d'Italia nella scala di 1:100.000 è già grande, ma essa ci permette di comprendere in modo sintetico e abbreviato delle distanze di centinaia di chilometri, mentre, se essa fosse nella scala di 1:2, come non sarebbe compresa da vicino nel nostro campo visivo, così ci permetterebbe soltanto di verificare delle piccolissime distanze non differenti da quelle che percorriamo ogni giorno. Riducendo adunque la scala e le proporzioni della estensione da considerarsi, si ottiene anche una riduzione della rappresentazione entro limiti più ristretti, la si rende più definita e sollecitamente afferrabile, più astratta, e si fa più possibile l'aggiunta di nuove rappresentazioni. Si segue un

procedimento inverso a quello che si fa studiando al telescopio e al microscopio: cioè si procede per sintesi, non per analisi, in quanto si fa una somma di dati che vengono ad aggiungersi ai preesistenti e a comprendersi insieme in una rappresentazione nuova. — La stessa cosa fu fatta per i pianeti. Il prof. Scheiner dell'Osservatorio di Potsdam nel suo libro « Der Bau des Weltalls » ha immaginato di rimpicciolire il diametro del Sole rendendolo di 40 metri ossia della lunghezza di una delle nostre case comuni. Rispetto a un tal punto di partenza e con lo stesso criterio, Mercurio viene ad avere un diametro di 14 centimetri e una distanza dal Sole non più di 58 milioni di chilometri, ma di 1700 metri: Venere avrebbe 34 centimetri di diametro e girerebbe intorno al Sole distandone ca. 3100 metri: la Terra avrebbe un diametro di 37 centimetri e una distanza di 4300 metri dal Sole: la Luna avrebbe 10 cm. di diametro e girerebbe a 11 metri dalla terra. Tutto ciò è ricco di insegnamenti. Anzitutto per tal modo si rendono chiaramente comprensibili i rapporti delle distanze dei vari pianeti dal Sole, fra di loro e in relazione al diametro loro e del sole, perchè tali misure rientrano nel campo di quelle a noi più famigliari, e perciò son subito paragonabili con le dimensioni di oggetti domestici o con le distanze che esistono tra due luoghi diversi di una stessa città o tra due città e regioni facilmente associabili mentalmente. La distanza di Nettuno dal Sole verrebbe ad essere non più di 4.467.000.000 di chilometri, ma soltanto di poche centinaia di chilometri, e quindi sarebbe più facilmente ritenuta. D'altra parte si vedrebbe subito che la distanza di 11 metri tra la Terra e la Luna sarebbe pur meschina cosa in confronto di queste centinaia di chilometri tra Nettuno e il Sole. Questi nuovi rapporti essendo bene afferrabili, danno una idea più positiva del sistema planetario, anche perchè è più afferrabile il rapporto tra pochi metri e poche centinaia di chilometri, che non quello tra poche centinaia di migliaia di chilometri e alcuni milioni di milioni di chilometri, che sono lun-

ghezze per noi abbastanza indeterminate, sebbene fissate con cifre. Ora con tale sistema tutto si limiterebbe a questo aumento di chiarezza nella rappresentazione del sistema planetario, ove noi non dovessimo paragonare le nuove distanze con quelle realmente date nel sistema planetario, e quindi non vedessimo che quest'ultimo è incommensurabilmente più grande. Facendo il confronto, e vedendo che, p. es., adottando la scala del Scheiner, la prima stella che è fuori del sistema planetario (e che dista da noi almeno 200.000 volte la distanza della Terra dal Sole), starebbe già ad una distanza eguale a ca. due volte la distanza effettiva fra la Terra e la Luna ossia a una distanza già immensa, si è indotti a pensare che una tal distanza effettiva è addirittura inconcepibile. Nondimeno essa si dà in realtà, e noi vediamo una tale stella. Adunque si verifica questo: che nel sistema cosmico così ridotto, si rendono più accessibili alle nostre abitudini mentali certe misure immensamente grandi, le quali, venendo, per così dire, ad accorciarsi, concedono maggior posto ad altre ulteriori. E quindi, immaginando un tal rimpicciolimento, noi potremo entro lo stesso universo spaziale collocare a miglior agio i nostri pianeti e altre stelle, e vi lasceremo un posto anche per altre stelle immaginate e non scoperte coi nostri mezzi di ricerca. Si verrà a definir meglio una parte dell'universo lasciando nell'indefinito la parte meno chiaramente concepibile. Invece, considerando l'universo senza ricorrere a codesta scala di riduzione, lo stesso sistema planetario apparirà già di per sè di proporzioni quasi inconcepibili, e minor posto rimarrà nella nostra rappresentazione per le distanze di altre stelle assai più lontane. Infatti chi può ben rappresentarsi direttamente il rapporto che esiste tra la distanza di 4 migliaia e mezzo di milioni di chilometri che separano Nettuno dal Sole, e 30.000.000.000.000 di chilometri equivalenti alla distanza di una delle più « vicine » stelle da noi? Si tratta in ambedue i casi di una specie di eguaglianza per inconcepibilità: tutt'al più si dirà che l'una

è ancor più immensa dell'altra, pur avendosi un concetto impreciso di entrambe. Nondimeno, poichè si pensa che queste distanze sono reali, noi dobbiamo nello stesso tempo ammettere che non possiamo ben concepirle, ma che però esse esistono nostro malgrado. In fondo, nella nostra mente si ripete sempre press'a poco questo medesimo fatto: si dà una rappresentazione chiara di alcuni dati più afferrabili, poi al di là di questa altre rappresentazioni meno chiare e così via via sino a finire nell'indeterminato e poi nell'infinito presupposto dal pensiero. Se si aggiungono nuovi dati a quelli precedenti, questi si sommeranno con quelli in un totale sintetico e più astratto, in cui la distribuzione della chiarezza sarà diversa o, meglio, sarà distribuita su un contenuto di proporzioni alterate.

A ciò aggiungasi che il mutamento di queste proporzioni e l'ingresso di nuovi dati nella rappresentazione, inducono in noi l'idea della possibile e probabile esistenza di altri dati e stimoli esterni, di altre modificazioni supposte in modo indeterminato e in numero indefinito, oppure già previste e stabilite nel pensiero e ripetentisi in infinito come un processo inevitabile. Basta talora aver creduto per lungo tempo insorpassabile un dato limite empirico e poi vederlo d'un tratto alterato, perchè si formi in noi la predisposizione a ritenere spostabili molti limiti conosciuti. Chi non ha mai vissuto che in un medesimo luogo, ed ha per anni ed anni veduto allo stesso modo la catena di monti che gli segnavano il confine della sua terra, non potrà dissociare l'immagine di quei monti dal concetto di limite del mondo; e, pur pensando ai lontani astri che sono assai più discosti, sentirà che tanto gli uni che gli altri sono molto remoti. Ma se egli sia costretto un giorno a varcare quei monti ed a gettare lo sguardo su nuovi versanti e su nuovi sfondi, proverà un senso di smarrimento che supererà certo la sorpresa in lui prodotta altre volte dal racconto delle distanze nostre dai pianeti, che egli vedrà sempre sotto gli stessi aspetti. Così l'idea del-

l'infinito in genere penetra in noi più facilmente quando si considera la sostituzione di un limite ad un altro, che non quando si considera come remoto il più possibile sempre lo stesso limite. Certamente genera in noi maggior stupore il fatto che al microscopio possiamo vedere ancora dei particolari di cellule nervose, che non il fatto che mentalmente possiamo suddividere un granello di sabbia in infinito: e la scoperta di una nuova stella, o delle proprietà del radio, o della telegrafia senza fili, o le nuove rivelazioni sull'intima struttura della materia, sugli elettroni, ecc., ci impressionano assai più che non la possibilità di ripetere incessantemente una uniforme operazione mentale. D'altra parte bisogna però ammettere che, ove non si avesse modo di comparare le nuove scoperte con i residui delle rappresentazioni antecedenti, e di formarne dati astratti inquadrati in un campo totale di rappresentazione nel quale rimanga aperta la possibilità di nuove aggiunte, non si avrebbe l'idea del mutamento e del progresso avvenuto, e non si potrebbero spostare i limiti del definito ogni volta, con ritmo incessante, in infinito. — Per citare un altro esempio, basta pensare all'anno di luce.

La velocità della luce è di 300.000 chilometri al secondo. Se la paragoniamo alla velocità iniziale di certi proiettili, che per noi è già grandissima e non può essere appresa che indirettamente con speciali esperienze essendo essa p. es. di 1000 metri al secondo, quella risulta adunque 300.000 volte maggiore di quest'ultima, tanto che, per superare la distanza Terra-Luna, ha bisogno soltanto di secondi $1\frac{3}{4}$, poco più di 8 minuti per venire dal Sole alla Terra, e 4 ore dal Sole a Nettuno. Se si pensa poi che, per venire a noi dalla più vicina stella fissa, la luce impiega anni $3\frac{1}{3}$, che per giungere a noi da certe stelle molto luminose impiega 30 anni, ossia è partita di là 30 anni addietro per raggiungerci oggi, e che vi sono astri così lontani da farci pervenire oggi quella luce che emisero all'epoca della scoperta dell'America ossia più di 400 anni fa, dobbiamo confessare che la

nostra mente a tutta prima si smarrisce. Infatti chi, all'infuori degli astronomi, può ben persuadersi che il cielo che noi vediamo non è il cielo del presente ma quello di epoche diverse, di cui talune molto remote, e che certi astri, mentre li stiamo contemplando, emettono raggi che giungeranno soltanto ai nostri lontani discendenti, laddove alcuni di quelli che vediamo noi non sono dei fatti presenti ma dei fatti avvenuti? Queste considerazioni sconvolgono tutto un nostro sistema rappresentativo. Il presente non è più che un presente creduto tale, avente un valore di « presente » solo per noi. Le velocità grandi non sono che velocità credute grandi da noi, come la velocità di un podista, che è superata da quella di un cavallo da corsa, e questa da quella di un treno diretto, quest'ultima da quella di un proiettile, la quale è 300.000 volte minore di quella della luce. Se noi non afferriamo bene la velocità di un proiettile, che non può misurarsi direttamente con la percezione visiva o con le sensazioni muscolari, ancor meno concepiamo la velocità della luce, che diviene una pura notizia per noi. Così le posizioni credute fisse e vere di certi astri e la notizia dell'errore commesso, la creduta attualità di un fenomeno smentita dal calcolo, non producono in noi minore sorpresa dei sogni premonitori o dei fatti spiritici o delle imposizioni della volontà a soggetti deboli ipnotizzati, i quali eseguono, alla distanza di tempo comandata, un dato ordine ricevuto. In tutti questi casi le nostre rappresentazioni, già formate e divenute famigliari, di posizione, di passato, di avvenire, di presente, ecc., vengono a modificarsi profondamente, sì da farne perdere la fiducia in una determinazione precisa del mondo fisico, e da indurre in noi la idea della possibilità di infinite modificazioni in esso e nella rappresentazione che ce ne facciamo. E se attentamente osserviamo, questi casi di mutamenti profondi sono più frequenti di quanto non si creda: essi sono soltanto più o meno osservabili e quindi più o meno essenziali per noi. Così la proprietà di espansione dei gaz sembra contraddire a

certe leggi costanti della natura; nei fenomeni spiritici si vedono apporti e sollevamenti che non sembrano rientrare nelle leggi di gravità e di inerzia; così pure la telegrafia senza fili sembra opporsi a certe condizioni prima ritenute fondamentali per la trasmissione dell'energia a distanza. Non altrimenti crediamo compromessa l'impenetrabilità e certe proprietà atomiche quando pensiamo alle proprietà del radio. E così pure, esaminando il nostro stesso pensiero, noi troviamo sorprese inaudite. Difatti noi diciamo di non poter bene concepire la velocità di un proiettile, e nondimeno pensiamo quella della luce: parliamo di distanze impensabili, e nondimeno troviamo minimo il diametro della terra nel sistema planetario; ammettiamo inconfutabile la legge di gravità terrestre e tuttavia ci persuadiamo che esiste una gravitazione universale e immaginiamo leggi di equilibrio nell'universo: pensiamo che non possa darsi che lo spazio a tre dimensioni e nondimeno nel nostro spazio mentale noi accogliamo l'idea di nuove possibili dimensioni: crediamo tutto l'universo governato da poche leggi fisse e costanti, e ci accorgiamo che il nostro stesso pensiero preesiste a quelle leggi che egli si foggia, e si governa in modo nuovo e sconosciuto. Insomma, se da una parte certe nostre rappresentazioni vengono più o meno a modificarsi e son sostituite da altre che a tutta prima ci sembrano non poter entrare a far parte della coscienza, d'altra parte queste nuove rappresentazioni riescono benissimo a cacciare quelle precedenti e a divenir esse le più famigliari.

Soltanto il confronto con le prime, e l'essersi aggiunte ad esse ci dà l'idea dell'infinito progresso reale e possibile, cioè continuativo. A noi moderni le distanze di Nettuno dal Sole, la velocità del movimento della Terra, le teorie della luce, dell'elettricità, ecc., non recano più stupore. Noi ci siamo persino abituati a considerare il suolo che calchiamo, come una porzione minima di un'immensa sfera che continuamente si muove di varii movimenti contemporanei con velocità incredibili: sicchè oggi non possiamo più pensare che

le nostre Alpi che emergono all'orizzonte siano la barriera di un mondo piatto e fermo. E nondimeno l'uomo primitivo non avrebbe potuto pensare che la terra che premeva non era ferma e che agli antipodi abitavano altri uomini aventi la sua stessa orientazione rispetto al centro della terra ma opposta rispetto alla superficie su cui stava. Si danno nuovi contenuti di rappresentazione, ma se ne dà sempre la rappresentazione, e si ha la possibilità della coscienza di adattarsi a quei contenuti, anzi a tutti i contenuti, giacchè non se dà uno all'infuori della coscienza. La successione di quelli, il confronto, l'aggiunta e le modificazioni, inducono l'idea del trapasso al di là del finito e del limite consueto, nel sempre nuovo del pensiero, nell'infinito. Ma, come per un lato noi veniamo a trovare illusorio ciò che prima ritenevamo vero e costante, e a riconoscere in ogni limite soltanto una necessità di coscienza in rapporto a pure occasioni esterne, e quindi apriamo la via a sempre nuovi contenuti di rappresentazione e di pensiero, per altro verso noi facciamo rientrare ogni nuovo contenuto negli schemi fondamentali della rappresentazione e del pensiero, pur non togliendogli le caratteristiche che lo fanno esser specifico e diverso. Così, quando noi pensiamo alla gravitazione universale, non ripudiamo la gravità terrestre, ma completiamo questo concetto e lo poniamo entro un quadro più grande in cui esso compare in relazione ad altri concetti diversi e subordinato ad un concetto totale generico e più vasto. Pensando alla rotondità della Terra, non eliminiamo la rappresentazione del suolo e dell'orizzonte, ma la rimpiccioliamo sì da poterla ammettere a far parte di tutta la superficie terrestre, e questa a sua volta la rendiamo una rappresentazione rimpiccolita, afferrabile e meno generica per poterla collocare entro il sistema planetario, e questo in un universo più vasto. L'idea del radio, se ci fa pensare in modo diverso alcuni elementi fondamentali dell'universo cosmico, non ci impedisce però di pensare altri elementi più sottili, aventi proprietà quasi af-

fini a quelle che nei primi vediamo andate perdute. Nei fenomeni spiritici troviamo fatti inesplicabili con le leggi che oggi conosciamo, ma che non disperiamo di porre in accordo con leggi ancora sconosciute e però aventi un valore effettivo, e quindi atte a completare quelle già note. Così i fenomeni elettrici, che pur contengono ancor tanto di ignoto, ci sembrano oggi più atti a spiegare gran parte dei fenomeni naturali che non altri fatti ritenuti insufficienti allo scopo, e ciò perchè l'esperienza ha imposto, ed il pensiero s'è avvezzo a riconoscere, una tale necessità. Ma ciò avviene perchè nessuna delle nuove rappresentazioni ripugna a esigenze e leggi fondamentali del pensiero. L'idea vaga di un substrato o sostanza infinitamente sottile, di una forza, di una energia, qualunque sia il valore attribuito a queste ipotesi e sotto qualunque aspetto si presentino, sono sempre fondamentali nel pensiero e rimangono in accordo con qualunque nuova scoperta empirica. Anche quei concetti che sembrano esulare da certe categorie abituali del pensiero, non alterano in fondo alcune premesse fondamentali, tanto è vero che certe teorie modernissime sull'intima struttura della materia o sui fatti naturali, richiamano alla nostra mente certe altre teorie emesse più di venti secoli addietro, sebbene compaiano sotto nuove forme e con la scorta di una esperienza più ricca e diversa. Difatti anche l'infinita serie delle teorie cosmiche, delle esperienze e delle leggi fisiche, se bene esaminata, appare come una concatenazione di pensieri apparentemente repugnanti fra loro ma intimamente connessi in una continuità perfetta di coscienza. L'aver trovato errate alcune conclusioni dell'astronomia tolemaica, non significa aver trovato errato il pensiero, ma aver esaminato più attentamente i fatti e rettificato i risultati. Nulla è fuori del pensiero e delle sue esigenze: di qualunque cosa può dirsi almeno che essa è pensata in qualche modo, e che perciò non solo rientra nelle leggi del pensiero, ma si accorda con tutti gli altri dati del pensiero stesso. Onde per noi l'idea dell'infinito nel mondo fisico

risponde a due esigenze importantissime: la disformità dei fatti e dei pensieri che si aggiungono continuamente a quelli presistenti, e il collegamento di tutti in una serie interminabile come l'attività della coscienza.

Ora, poichè ciò che più qui interessa è quella disformità, ossia il divenire del limite, dimostreremo con esempi come questa sia una esigenza di primaria importanza per il concetto dell'infinito nella natura fisica.

Un grande mutamento nelle idee cosmologiche certamente accadde quando si divulgò il sistema copernicano, che allargava il concetto del mondo ritenuto limitato spazialmente, e lo rendeva un universo infinito. Ma ancora prima di lui Nicolò Cusano, uscendo dal Medio-evo con pensieri della Rinascenza, aveva già concepito l'infinità dell'universo e l'aveva proclamata in una forma che escludeva ogni limite dello spazio. Giordano Bruno, come vedemmo, pose in rapporto con il sistema del Copernico questo valore dato dal Cusano all'infinito del mondo. Il Cusano soprattutto aveva fatta una distinzione fra l'infinito che non si esaurisce, e l'infinito esaurito o perfetto che è proprio di Dio ed è a trasferirsi nel trascendente, mentre il primo infinito sarebbe quello del mondo. Per tal modo si scisse il concetto dell'infinito in due altri, l'uno cosmico, l'altro divino; quest'ultimo precorre in certa qual maniera il concetto di sostanza di Spinoza; ed è a ricordarsi fra gli altri Zöllner¹⁾, che ammise una illimitata evaporazione della massa cosmica, ossia una volatilizzazione del mondo in infinito. Invece Clausius e W. Thomson ammisero un sistema limitato, per cui come stato finale in un tempo finito si dà un tale equilibrio di temperatura, che non permette più alcuna trasformazione di forme di energia, ma la cessazione di ogni processo cosmico, una morte del calore. Secondo la ipotesi che Kant e Laplace fecero, l'uno indipendentemente dall'altro, sul principio del nostro sistema planetario, quest'ultimo non

¹⁾ *Ueber die Natur der Kometen.*

avrebbe formato da principio che una enorme nebulosa, da cui a mano a mano si staccarono anelli che si condensarono in sfere, nelle quali si potè ripetere il medesimo processo; sicchè le sfere prima formatesi diedero origine ai pianeti, e quelle venute dopo costituirono i loro satelliti. Questa ipotesi ha ancor oggi una certa validità, perchè, ad esempio, la confermerebbero l'anello di Saturno e molti fatti relativi alle nebulose cosmiche. Però l'osservazione ha rivelato che i satelliti di due pianeti estremi del nostro sistema solare, Urano e Nettuno, possiedono un movimento opposto per direzione a quello di tutti i pianeti e di tutti i rimanenti loro satelliti. Ammettendo che l'isolamento degli anelli secondari di Urano e di Nettuno, che sono tanto lontani dal Sole, si sia formato in un tempo posteriore a quello in cui il nucleo solare si è staccato dalla massa della nebulosa originaria, mentre nei pianeti più prossimi il medesimo processo sarebbe avvenuto anteriormente in un'epoca in cui esisteva ancora connessa quella nebulosa, quella eccezione nella direzione del movimento di quei satelliti appare, secondo Faye, spiegata, e l'ipotesi di Kant e Laplace rimarrebbe accreditata. Kant va ancora in là nella ricerca del nesso causale nei fenomeni cosmici: il sistema della Via Lattea, a cui appartiene il nostro Sole, sarebbe esso pure un sistema di ordine più alto ma di origine analoga. — Per tal modo si giunge ad una origine remota sì, ma definita, dell'universo cosmico, oltre la quale può risalire solo il pensiero puro, ammettendo ulteriori analoghe possibilità. Nondimeno, ove si confronti questa ipotesi con certe cognizioni cosmiche dell'antichità, e in generale con tutte le precedenti, essa apparirà così grandiosa e comprendente una tal qualità di avvenimenti e quindi un così ampio tratto di tempo, da far pensare non solo ad una estensione incommensurabile dello spazio, ma ancora ad una successione interminabile di epoche. Però essa ha ancora un limite empirico definito e lascia soltanto libero il pensiero puro di supporre un « al di là » indefinito, e un ulteriore progresso in infinito. Difatti si può anche pen-

sare, come abbiamo detto più sopra, che come il mondo ebbe un principio, così potrà avere un fine, almeno rispetto al suo modo presente di esistere; e si può benissimo immaginare la su citata cessazione di ogni fenomeno naturale, dapprima quella della vita organica, poi dei fenomeni della natura inorganica, dei temporali, dei terremoti, dei fenomeni climaterici e meteorologici, per lasciar luogo alla uguaglianza delle temperature, alla uniformità di qualsivoglia processo. Se questo è un limite definito, empiricamente possibile, d'altra parte però esso può pensarsi in un avvenire incommensurabilmente lontano: e se questo limite o momento nell'avvenire è rappresentabile, al di là di esso noi penseremo ancora uno stato finale che sarà diverso dal precedente, da cui differirà solo per averlo fatto cessare, e così via, procedendo dal limite finito, direttamente rappresentabile, ad uno finito ma più remoto, e da questo ad uno soltanto supposto ancor più remoto, poi sempre più in là nell'indeterminato, in modo analogo. Non altrimenti, pensando alla massa materiale che, riempiendo lo spazio, in parte si è addensata in innumeri stelle di differenti grandezze e in parte si è estesa nello spazio compreso, formando il mezzo attraverso il quale la luce viene tramandata da un astro all'altro, noi vediamo prima di tutto che anche coi più potenti telescopi si giunge ad un limite dell'universo visibile tanto nella regione in cui la Via Lattea racchiude il sistema cosmico nella forma di un grandissimo anello, quanto nelle direzioni perpendicolari alla Via Lattea. È vero che si danno stelle di diversa intensità luminosa, di cui le più deboli si trovano incommensurabilmente più lontane che non i punti estremi del nostro sistema planetario, e che l'assenza di stelle nelle regioni più lontane dalla Via Lattea dipende essenzialmente dal rapido sottrarsi delle stelle meno luminose e perciò più lontane. Ma il sistema della Via Lattea, al quale noi apparteniamo, ha, per quanto sembra, la forma di una lente, di cui il diametro maggiore corrisponderebbe appunto alla Via Lattea; ed è incerto se gli strumenti ottici,

di cui disponiamo, possano condurci più in là dei confini di questo sistema, giacchè è ancora ipotesi malsicura il supporre come sistemi esterni al nostro anello della Via Lattea alcune di quelle nebulose che appena nei più potenti telescopî si risolvono in singole stelle. Tanto ciò è vero che si è posta più volentieri l'ipotesi di un cosmo limitato al sistema della Via Lattea, il quale non sarebbe stato che una sola immensa nebulosa, sciolta poi e scissa nei varî sistemi di stelle, fra cui sarebbe il nostro sistema planetario. Ora, se ciò può empiricamente soddisfare, è innegabile pure che possiamo ancora immaginare non soltanto uno spazio in cui sarebbe sospeso il sistema della Via Lattea, ma ancora una posizione di esso sistema in tale spazio, ossia il rapporto con punti o con un punto determinato e fisso, e ancora la possibilità di altri sistemi analogi a quello della Via Lattea, e così via in infinito. Man mano che si allargano i confini dell'universo empirico, noi li restringiamo in astratto e ritorniamo a pensare la possibilità dell'« al di là » indeterminato e poi infinito, giusta i criterî imposti dalle nuove rivelazioni empiriche. Inoltre la massa della materia cosmica stellare, in rapporto ai criterî empirici derivati dalla ricerca astronomica, dovrebbe probabilmente esser soggetta ad una diminuzione nella sua densità, a partire dalla regione del sistema della Via Lattea. Ora, ammessa qui come vera la legge secondo cui quella diminuzione di densità sarebbe proporzionale al crescere della distanza, si avrebbe il vantaggio di poter attribuire al sistema cosmico un punto medio, meccanico, una specie di centro di gravità. Ma allora, nelle distanze 1, 2, 3, 4, ecc. dal centro dell'universo, la massa stellare assumerebbe i valori 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ecc., ossia non sarebbe mai infinita; e quindi si potrebbe supporre la materia come riempiente lo spazio infinito, tendendo però la sua massa ad un valore limite finito. Del resto si può benissimo pensare la massa materiale o infinita con un punto medio comune, o infinita senza questo punto centrale, o finita in uno spazio infinito; perchè, mentre lo spazio è già raffigurato in astratto

e quindi è più facilmente pensato esteso in infinito, la massa materiale suscita in noi piuttosto la rappresentazione dell'universo empirico, il quale, occupando quasi completamente da per sè il nostro campo rappresentativo mentale, ci concede solo di immaginare indeterminati i suoi confini, e quindi si comporta, rispetto all'idea dello spazio, come qualcosa che la insegue senza raggiungerla, essendo quest'ultima molto innanzi nello sviluppo. La stessa cosa avviene della serie degli avvenimenti che noi collochiamo nel tempo. L'idea di tempo è già astratta, e in essa i singoli fatti rientrano come in un ambiente più ampio, generico ed astratto, che come tale è più esteso ed estensibile e più facilmente in accordo coll'idea dell'infinito; e siccome il decorso empirico degli avvenimenti basta di per sè a occupare il campo mentale rappresentativo, in cui tutt'al più si potranno immaginare indeterminati il principio e il termine, così anche qui si ha che il fatto empirico insegue l'idea del tempo senza poterla esaurire, giacchè il primo esce a stento dal finito, e la seconda già ricorre in infinito.

Questi esempi ci possono dimostrare come l'idea dell'infinito nel mondo fisico presupponga dei dati empirici finiti, i quali possono venir superati sia dal pensiero puro, sia da nuovi dati empirici diversi. Sotto questo secondo rispetto essa si sviluppa a seconda dei progressi introdotti nelle nostre cognizioni dalla esperienza. Difatti il sistema copernicano sembra più adatto a favorir lo sviluppo dell'idea dell'infinito che non il sistema tolemaico; e l'ipotesi di Kant e Laplace sull'origine del sistema planetario, sebbene ci conduca ancora a certi limiti, ci trasporta molto lontano col pensiero, più che non l'ipotesi della creazione « ex nihilo »: e ciò perchè queste teorie hanno spostato e oltrepassato dei limiti dapprima ritenuti definitivi.

Per dare una idea più precisa del significato di questo spostarsi di certi limiti, ossia del formarsi di nuove concezioni e della sua influenza sulla idea dell'infinito, accenneremo all'ingresso di alcuni dei nuovi principî e delle nuove scoperte nella scienza, ed alle conseguenze di esso.

Il grande sviluppo delle scienze della natura dopo l'epoca del Rinascimento ha rivelato orizzonti nuovi. Ricordiamo, tra l'altro, le scoperte geografiche, che aggiunsero nuovi continenti a quelli già noti, e completarono, meglio determinandola, l'idea del nostro globo. Le scoperte astronomiche allargarono i confini del cielo; e se gli astronomi ci abituarono a pensare distanze spaziali di bilioni di miglia, i naturalisti, i geologi ci costringono a pensare forse dei bilioni di anni per la formazione della Terra, sebbene in questo caso non possano farsi calcoli sicuri quanto quelli astronomici. Ora, se si pongono tali ipotesi in confronto con quelle intorno all'estensione e alla formazione non del solo nostro pianeta ma di tutto l'universo cosmico ora conosciuto, i limiti si estendono ancora sproporzionatamente. Così l'infinito della natura è la conseguenza dell'essere stati oltrepasati certi limiti non una sol volta, ma quante volte ciò fu consentito dal progresso storico: ossia esso è in rapporto allo sviluppo della scienza, e non di una sola disciplina, ma di tutto quanto il sapere.

Nel progresso delle scienze non solo si stabilirono nuove leggi, ma si giunse persino a trovar provvisorio ed ausiliario qualunque dato scoperto. Oggi non si può più dire, per esempio, che la storia della chimica si apra assolutamente con Lavoisier, giacchè sappiamo che anche ogni scoperta è un fenomeno storico-sociale, e che nella storia è una inesauribile fusione di verità e di errori, ma, ad ogni modo, di conati con cui si mira gradatamente ad un fine infinitamente lontano di conoscenza esaurita. Quindi, come non può più accontentarci l'idea esposta da Feuerbach in Germania e da Comte in Francia, che l'intelligenza scientifica dei fatti non sia nient'altro che l'intelletto umano risanato e assunto al suo valore naturale dopo aver rispinso indietro le fantasie ostacolanti, così si comprende che, se da una parte lo sviluppo delle scienze può aver dato luogo agli estremi del materialismo, per altri rispetti

lo delimitò meglio e lo respinse. Se le idee sono prodotti dell'organismo umano e propriamente del cervello, esse non cessano di essere prodotti di quella stessa natura che dà le percezioni sensoriali ed i giudizi intellettivi: esse si distinguono dai prodotti del cervello non rispetto all'origine ma al valore, ossia al rapporto loro con la natura umana e precisamente con la natura ideale umana. Da ciò si vede che il grande progresso scientifico è insieme progresso empirico e idealistico. Liebig, nel suo discorso su Bacone, pronunciò queste parole: « Baco legt in der Forschung dem Experiment einen hohen Werth bei; es weiss aber von dessen Bedeutung nichts; er hält es für ein mechanisches Werkzeug, welches, in Bewegung gesetzt, das Werk aus sich selbst heraus macht; aber in der Naturwissenschaft ist alle Forschung deductiv oder a priorisch; das Experiment ist nur Hilfsmittel für den Denkprocess, ähnlich wie die Rechnung; der Gedanke muss ihm in allen Fällen und mit Nothwendigkeit vorausgehen, wenn es irgend eine Bedeutung haben soll ». Ed è molto significativo che ciò sia stato detto proprio da Liebig. — Se le scienze naturali hanno potuto far proclamare non esservi nulla all'infuori della natura, se da una parte si ebbe un materialismo che affermò di aver dato una idea del mondo con la scorta del pensiero scientifico, confessando tutt'al più di valersi dell'ipotesi più che non se ne valga la ricerca specializzata, d'altra parte si ebbe, in continuazione del pensiero filosofico moderno da Cartesio a Kant, un tutt'altro indirizzo di pensiero con le scuole di Schelling, di Hegel, dei Neo-Aristotelici, i quali tutti costituirono l'orrore dei naturalisti. Ma in fondo, guardando allo spettacolo totale del pensiero filosofico moderno in rapporto all'estendersi delle scienze, noi per un lato vi scorgiamo un modo scientifico di considerar ciò che ci è dato dalla osservazione, e nello stesso tempo la tendenza a superare col pensiero speculativo e con le esigenze del sentimento la uniteralità di quel mondo che per tal guisa ci viene offerto con l'osservazione e la ricerca; esso è lo svi-

luppo naturale e logico dell'impulso dato dalla scienza della natura al pensiero generale, avviandolo in infinito progresso.

Se risaliamo a Cartesio, sebbene egli non fosse come naturalista all'altezza del suo valore di matematico, tuttavia troviamo ch'egli è in intimo rapporto con la scienza della natura.

La storia della filosofia¹⁾ ci insegna ancora altre e continue necessità di rapporti tra sapere empirico e speculazione filosofica pura. Così, mentre la teoria copernicana veniva dimostrata giusta mediante le leggi di Kepler sui percorsi planetari e dalle osservazioni telescopiche di Galileo, si creava per opera di Galileo stesso la dottrina scientifica del moto mediante le sue leggi di caduta, dell'impulso impartito a un corpo, del pendolo. Intanto l'astronomia e la meccanica aprivano la via alla fisica esatta, e Cartesio tentava la spiegazione della natura con una ipotesi generale geometrico-meccanica. La meccanica e la conoscenza esatta dei fenomeni naturali avevan ricevuto grandi impulsi da Ruggero Bacone, più tardi da Leonardo da Vinci, ecc. S'erano divulgati i concetti della materia, della forza attiva, e s'eran lasciati da parte i concetti naturalistici scolastico-aristotelici della forma sostanziale, delle proprietà, del mutamento qualitativo. Al concetto finale antropomorfo introdotto nella natura, si sostituì la considerazione delle cause promotrici di effetti. I nuovi materiali divennero la grandezza, la figura, il numero, il movimento, la legge dei fenomeni: criterio generale la quantità, senza cui non vi ha determinazione nè scienza esatta. La natura così divenne un sistema di parti di una massa, moventisi secondo leggi; e il movimento fu considerato meccanicamente, cioè con effetto di composizione, divisione, spostamento, oscillazione nei corpi, regolato da leggi matematiche. Al concetto

¹⁾ Cfr., fra gli altri, FALCKENBERG: *Geschichte d. neueren Philosophie*, IV Aufl., Leipzig, 1902.

dei movimento di Galileo si aggiunge il concetto dell'atomo, utilizzato da fisici come Daniel Sennert, e messo soprattutto in valore da Gassendi, di contro all'antica teoria dei quattro elementi ¹⁾. Nondimeno, concordemente, sebbene con fondamenti diversi, di fronte al criterio quantitativo meccanico applicato ai fenomeni naturali, fu sostenuta la soggettività delle qualità sensibili da Kepler, Galileo, Cartesio, Gassendi, Hobbes. In Inghilterra, ancora prima di Bacone, si ebbe in Everard Digby e in William Temple un indirizzo scientifico: il secondo si volse contro l'aristotelismo, e W. Gilbert applicò in un suo lavoro fisico il procedimento induttivo prima ancora della divulgazione della dottrina dei metodi di Bacone. Il maestro e fondatore della moderna filosofia della esperienza è Francesco Bacone, che, opponendosi ad Aristotele e propugnando il progresso delle scienze, sentì la necessità del rinnovamento scientifico e di una conoscenza metodica della natura allo scopo di intenderla. Egli propugnò l'induzione vera o scientifica, diversa da quella della vita comune e da quella non metodica di Aristotele, giacchè all'ascesa induttiva dall'esperimento all'assioma deve annettersi la discesa deduttiva dall'assioma ai nuovi esperimenti e scoperte: perciò da lui è respinto il sillogismo, il quale, invece di scoprire verità nuove, riordina quelle conosciute e quindi non domina la natura. — Se Bacone è in relazione diretta col metodo scientifico rigorosamente posto e sviluppato, Hobbes differisce da lui, ma risente pure l'influenza dei grandi matematici dell'epoca, Kepler, Galileo e fors'anche Cartesio, ed ha una concezione piuttosto meccanica e materialistica del mondo. Nella conoscenza, Hobbes pone in primo luogo l'impressione sull'organo di senso cagionata da movimento esterno: essa dà origine alla sensazione, che è soggettiva, presente solo nel riconoscimento, e in nessun modo riproduce lo stimolo esterno. Il pensiero per lui non è altro, in fondo, che calcolo, capacità di connettere dei segni

Cfr. LASSWITZ: *Geschichte d. Atomistik*, 1890.

convenzionali. — Se per questo modo in Inghilterra si tracciò ben definito l'empirismo in accordo col pensiero scientifico-matematico, nel continente si ebbe con Cartesio quel razionalismo con cui si pone la pura ragione sorgente del conoscere, ossia si antepongono concetti e principî generali alle semplici impressioni sensoriali. — Nondimeno le due correnti, la empirica e la razionale, continuarono a correre parallele come due necessità storiche del pensiero sorretto dal progresso scientifico. Da un lato continuarono l'indirizzo generale empirico il Loke, il Berkeley, il Hume; dall'altro, Cartesio si continuò in Spinoza, Leibniz, Wolff, fin che si giunse ad un altro momento importante nella storia del pensiero, a Kant. Nulladimeno sono evidenti le influenze rericproche di Cartesio su Hobbes, di Hobbes su Spinoza, di Cartesio su Locke, di Locke su Leibniz. Così Berkeley e Leibniz giunsero entrambi da premesse opposte allo stesso risultato idealistico; Hume e Wolff, i quali si trovavano a due estremi opposti, giacchè l'uno aveva volto l'empirismo in scetticismo e l'altro il razionalismo in dommatismo, cedettero poi entrambi il posto ad una filosofia popolare eclettica. Sicchè, guardando nel suo complesso tutto il vasto movimento filosofico dal Rinascimento delle scienze della natura all'epoca dell'illuminismo e fino a Kant, in fondo si trovano dei rapporti anche tra le opposte correnti, ove si tenga conto delle diversità che derivavano da disposizioni e da tendenze locali e singolari di pensiero; ove, per esempio, si consideri l'acutezza matematica in Francia, lo spirito pratico inglese, il pensiero speculativo in Germania. Difatti, mentre tutta la filosofia inglese mostra costantemente la tendenza a non uscir dai limiti del concreto, la francese continuamente fa appello all'astrazione: il confine posto fra spirito e corpo, tra le due sostanze estesa e pensante e la sostanza divina e la creata in Cartesio, o tra natura e cultura in Rousseau, sono espressioni di un medesimo bisogno di separazione netta e decisa, di un dualismo di principî; talora le teorie vi giungono agli estremi, anche quando si ricon-

nettono a una diversa dottrina, come avvenne in Condillac per rispetto a Locke. In Germania si mostrò più complesso lo spirito costruttivo, che istituì sistemi architettonicamente completi dalle basi sino ai minutissimi particolari: sicchè si comprende come il fosse meno immediato l'effetto prodotto direttamente sulla vita, e maggiore invece l'influenza esercitata entro le scienze speciali, con cui lo spirito filosofico fu in continuo ed intimo rapporto. Perfino fu osservato che, mentre l'inglese procede nelle sue suddivisioni più da un punto di vista pratico che logico, e che quindi quelle non sono in lui assolute, il francese ama piuttosto la dicotomia e il tedesco la tricotomia, come si vede in Kant, che riunisce nella terza categoria di ogni classe le due precedenti, e come appare in Hegel e nel suo metodo dialettico. — Ora, se si tien conto delle diverse tendenze qui esposte, e se si pensa che Locke è in certo qual rapporto con Cartesio rispetto al problema conoscitivo e così pure con Leibniz e che durante il periodo illuministico furono divulgate e divennero e popolari sì la dottrina di Leibniz che quella di Locke, si deve ammettere che tutto questo movimento di pensiero è in fondo una sola esigenza, la necessità di ricominciare la vera scienza, la quale sin dai tempi del Cusano aveva sentito il bisogno di riavvicinarsi alla natura, ed aveva di poi manifestato la tendenza a farsi più esatta, più conforme da una parte alla esperienza e dall'altra alla ragione (come dimostrano Bacone con l'induzione scientifica e Cartesio col dubbio e la ricerca della certezza), ma fundamentalmente più metodica e più rigorosa nel conoscere. — Ora il conflitto fra empirismo e razionalismo durò a lungo, e parve lasciar sospesa la gravissima questione se le nostre rappresentazioni siano un prodotto della esperienza oppure siano in tutto o in parte una proprietà originaria dello spirito, se insomma la conoscenza sia un prodotto della sensazione o del puro pensiero. La filosofia empirica era finita nello scetticismo e nel probabilismo. Il razionalismo, che aveva creduto di vedere nella chiarezza delle

rappresentazioni un sicuro criterio di verità e nel metodo matematico la via più certa per la filosofia, era finito nell'elettismo. L'empirismo aveva sovrapprezzato la sensibilità, e il razionalismo la ragione umana, che aveva creduto di poter dimostrare la sua natura non sensoriale.

E però nè la sensibilità nè l'intelletto da soli conducono alla conoscenza, poichè sono entrambi necessari ad essa, come due fattori di cui l'uno è l'attivo e l'altro passivo, l'uno afferrante, l'altro intuitivo, l'uno il concetto, l'altro l'intuizione. Da entrambi questi elementi risulta la conoscenza, che è insieme intuitiva e intellettuale (concettuale). — Nella filosofia pre-kantiana era risultato da una parte che l'induzione amplifica la conoscenza e però solamente conduce soltanto all'empirico e al comparativo, non alla vera universalità; d'altra parte che il sillogismo ha il vantaggio di dare una conoscenza generale e necessaria, ma non può aumentare il sapere, tutt'al più può confermarlo e chiarirlo. Ora questi vantaggi e difetti di due correnti di pensiero, che in fondo significavano il progresso del pensiero stesso, il quale riconosceva l'importanza della esperienza e ne determinava meglio i rapporti con la ragione pura, dovevano far sollevare il problema se non si diano conoscenze che allarghino il sapere, che siano cioè sintetiche senza esser empiriche, e nondimeno siano universali e necessarie senza esser analitiche; il che diede origine alla questione principale della « Critica della ragion pura » di Kant, cioè come siano possibili i giudizi sintetici a priori. Ora, al di sopra dell'empirismo e del razionalismo isolati, Kant pone nel giudizio l'attivo connettere. Per lui anzitutto deve porsi il problema, come la conoscenza sia possibile e come ciò si possa esaminare: quindi egli si assume il compito critico. Egli va più in là dello scetticismo del Hume, dalle cui ricerche sulla causalità aveva ricevuto forte impulso alla critica della conoscenza, e risente nondimeno del razionalismo della scuola wolffiana: si attiene alla filosofia inglese empiristica e scettica e però non si scosta sempre dai fondamenti ra-

zionalistici e dalla filosofia di Leibniz. Dopo aver posto il problema della ragion pura, con la necessità di alcune conoscenze a priori e dei giudizi sintetici a priori come principî in tutte le scienze teoriche della ragione, pone come nuova scienza la critica della ragion pura che non è solo analitica ma deve allargare sinteticamente le sue conoscenze a priori. Così si viene alla estetica trascendentale con le intuizioni di tempo e spazio; indi alla logica trascendentale divisa in analitica e dialettica. L'analitica tratta dell'uso logico e poi della funzione logica dell'intelletto nei giudizi, e considera i concetti puri dell'intelletto o categorie e la deduzione trascendentale dei medesimi: ma a questa, che è l'analitica dei concetti, segue l'analitica dei principî, la quale considera prima il giudizio trascendentale in generale, indi i principî supremi di tutti i giudizi analitici, il principio supremo di tutti i giudizi sintetici, il quale sta in ciò, che ciascun oggetto sottostà alle condizioni necessarie dell'unità sintetica del molteplice dell'intuizione in una esperienza possibile; cioè consiste nel riferimento delle condizioni formali dell'intuizione a priori e così pure della sintesi dell'immaginazione e sua unità necessaria nell'appercezione trascendentale, a una possibile conoscenza sperimentale in genere; onde si danno condizioni che rendono possibile non solo l'esperienza in generale, ma gli stessi oggetti della esperienza e perciò hanno valore oggettivo nel giudizio sintetico a priori. Nell'analitica rientrano sistematicamente tutti i principî sintetici dell'intelletto puro, cioè gli assiomi dell'intuizione, le anticipazioni della percezione, le analogie della esperienza, e i postulati del pensiero empirico in genere. All'analitica segue la dialettica trascendentale, che considera la ragion pura come sede dell'apparenza trascendentale, e distingue l'uso logico e l'uso puro di essa. Si viene così alle idee trascendentali, alla famosa antinomia della ragion pura, al sistema delle idee cosmologiche, all'idealismo trascendentale, secondo cui ciò che è intuito nello spazio e nel tempo, il fenomeno o semplice rappre-

sentazione di esseri estesi o di serie di cangiamenti, non ha alcuna esistenza in sè fuori del nostro pensiero. Infine si giunge al principio regolativo o spirituale, all'ideale trascendentale. Dopo viene la dottrina trascendentale del metodo, la dicciplina, il canone, l'architettonica e storia della ragion pura. Insomma, se vi è la materia e la sensazione, vi è la forma con cui la mente umana coordina il molteplice sensibile nello spazio e tempo, per dar luogo alle conoscenze particolari, con cui l'intelletto nel suo uso logico fa la sua propria esperienza; uso logico che si distingue dall'uso reale che produce una conoscenza nuova, libera da esperienza, fatta di idee pure, che dà la intellesione reale o la conoscenza delle cose in sè o dei noumeni, il cui principio è Dio ¹⁾).

Per tal modo con Kant il pensiero ha fatto un passo gigantesco sulla via del progresso continuato del sapere. Accanto alla dimostrazione delle forme a priori della conoscenza, vi è in lui la necessità di una critica di questa conoscenza. Inoltre anche nel campo morale sono poste parallelamente due grandi necessità, l'autonomia morale e l'imperativo categorico, il valore regolativo delle idee della ragione e la conoscenza pratica del trascendente. Anche nelle teorie filosofiche e nelle ipotesi scientifiche non si può sottrarsi al dovere di dimostrare il valore e l'autorizzazione alle proprie affermazioni, per vedere se si tengano entro la sfera di competenza della ragione umana; la quale consiste in ciò, che noi possiamo render conto di tutti i nostri concetti, opinioni e affermazioni, su fondamenti oggettivi o soggettivi. Triplice fu l'opera critica kantiana: la prima, la critica della ragione pura, è una negazione della metafisica dogmatica, e ricerca le condizioni del sapere della esperienza; la seconda è la critica della ragion pratica, e la terza quella del giudizio.

La prima critica svegliò in Schelling l'idea della ragione intuitiva come possesso del filosofo, mentre Fichte,

¹⁾ (V. la traduz. di G. GENTILE e G. LOMBARDO RADICE della K. d. r. V. — 2 Voll., Bari, Laterza, 1910).

ritenendo la ragione teoretica e la pratica soltanto diverse affermazioni di una identica ragione, accordò i concetti fondamentali delle due critiche kantiane, in quanto unì la libertà e la autonomia della volontà con la spontaneità intellettuale nella ragione teoretica, coordinandole nella sintesi dell' « io » puro, da cui son deducibili tanto le forme a priori quanto il contenuto della conoscenza empirica, allontanata la « cosa in sè ». — Ora a queste due correnti del pensiero kantiano si connettono quelle della filosofia della natura, dell'identità, della religione (Schleiermacher), specialmente derivate da Schelling. Ma in Hegel risorge l'intellettualismo e la ragion teoretica con la considerazione generale del mondo. Per lui la vera realtà è la ragione, il mondo uno sviluppo del pensiero: tutto l'essere è il pensiero realizzato, tutto il divenire è il pensiero che si sviluppa. Tutto è realmente razionale ed è razionalmente reale. In questo idealismo logico, che è insieme un sistema di identità e una teoria dello sviluppo, l'idea logica o l'assoluto esiste prima come un sistema di concetti premondani, scende poi nell'inconscia sfera della natura, cresce nell'uomo sino all'autocoscienza, realizzando il suo contenuto nelle istituzioni sociali, e finalmente nell'arte, nella religione e nella scienza ritorna completa in sè medesima raggiungendo una più alta assolutezza, nella quale la filosofia rappresenta il più alto prodotto e lo scopo del processo del mondo: quindi la filosofia è, rispetto al costume, arte, e religione, ciò che il pensiero è rispetto alla volontà, intuizione e rappresentazione. Oggetto della filosofia sono le idee delle cose, e poichè le cose sono una fase o modificazione del pensiero, il pensiero e l'essere sono identici; e poichè il mondo è il divenire del pensiero e la filosofia ha da rappresentare questo processo, essa è la dottrina dello sviluppo, è la « Entwicklungslehre ». L'assoluto, il concetto, si sviluppa dall' « in sè » (« Ansich ») per mezzo del « fuori di sè » (« Ausersich », « Anderssein ») nel l' « in e per sè » (« An-und Fürsich »), ed è dapprima

ragione o sistema logico di concetti o nozioni, poi natura, in ultimo spirito vivente; mentre per Schelling natura e spirito, reale ed ideale, erano entrambi indifferenti, ciò che non è nel pensiero di Fichte, in cui la natura rimane subordinata allo spirito. Hegel tiene il metodo dialettico, il ritmo di tesi, antitesi, sintesi. Egli non crede possibile, come Schelling, la conoscenza filosofica fondata sulla geniale intuizione, ma solo la scienza fondata sui concetti, sulle vere nozioni, che per lui non sono astratte perchè rappresentano la unione del contenuto e della forma, mentre in Kant la vera essenza delle cose resta inconoscibile di fronte alla riflessione, al pensiero formale. L'assoluto di Hegel non è una sostanza riposante ma vivente, differenziandosi e ritornante all'identità per queste differenze; è soggetto sviluppandosi per i contrari, ed è quindi sviluppo, processo reale, a cui pure devono corrispondere la scienza e la filosofia, che è, come quel processo, un movimento dialettico di pensiero, un sistema e un processo di concetti. Se tutto il reale è sviluppo così nel mondo come nella scienza, l'impulso allo sviluppo è la contraddizione, l'opposto, senza cui non è nè moto nè vita; tutto il reale è pieno di contraddizioni e perciò razionale, e la verità non è un singolo concetto, ma il suo completamento mediante il suo opposto, per cui passa in un concetto superiore, il quale però ancora non raggiunge la verità, come non è piena verità la idea stessa assoluta senza l'intero sviluppo per cui si giunge ad essa.

Ora, se si pensa a questa colossale concezione, per cui, se il mondo reale è sviluppo, tale è pure l'insieme dei concetti ossia la storia del pensiero filosofico in cui quello si rispecchia, onde tanto nel mondo che nel pensiero si ha un continuo processo dal posto all'opposto e alla conciliazione nell'intero sistema della idea, natura, e spirito e dello spirito stesso come soggettivo, oggettivo, ed assoluto, se si pensa a tutto ciò, non si può non restar meravigliati del progresso mediante cui dal misticismo e dall'aristote-

lismo medioevale il pensiero seppe dapprima avvicinarsi alla natura, scrutare senza pregiudizî i fenomeni del mondo fisico, raccoglierne le leggi, indi dare ad esse la esatta determinazione quantitativa, facendosi esso stesso più rigoroso e più sollecito di imporsi i metodi necessari alla sicura ricerca del vero, e d'altra parte elevando il valore della ragione umana, che, se non basta da sola all'esame del mondo, è sicura regolatrice anche di ogni criterio empirico, onde la necessità della critica della ragion pura per determinare gli elementi « a priori » e quelli empirici nella conoscenza, e finalmente la tendenza a stabilire il valore non solo formale ma assoluto del pensiero che si identifica con la intera realtà. È questo tutto un immenso processo di pensiero che s'avvia verso uno scopo di elevazione sempre maggiore e che rivela, anche là dove la verità sembrerebbe essere alcun che di inerte e costante, un progresso indefinito nella sua attuazione empirica ed infinito come possibilità pura di pensiero. — Così il pensiero stesso di Hegel sembra trovare una conferma nel fatto stesso della opposizione e attrazione che il suo sistema provocò fra i pensatori posteriori.

Cominciarono ad opporsi ad Hegel i filosofi psicologi, i quali come Fries vedono nella critica della ragione qualcosa di psicologico e di empirico, una conoscenza derivata da esperienza interna o autoosservazione, e fanno posto, fra il sapere e il credere, fra natura e libertà, al sentimento, e nella filosofia teoretica introducono la psicologia. Così pure Beneke pone a base della conoscenza la esperienza, di cui il punto di partenza è l'autoosservazione; onde scienza fondamentale è la psicologia, e in essa importanti due fattori, stimolo e suscettività insieme operanti. — D'altra parte si oppone ad Hegel il realismo e con esso Herbart, che considera la filosofia come una elaborazione di concetti, di cui si danno varie specie: la logica si occupa del divenir chiaro e distinto dei concetti. Questi ultimi sono fisici ed estetici, e tra questi sono i morali. Nella sua metafisica generale tratta metodologia, ontologia, sinecologia o dottrina

della continuità, eidolologia o dottrina delle rappresentazioni. Herbart si oppone all'atomismo quantitativo, plurimo, sostituendovi il reale mediante le sue proprietà che lo fanno essere una specie di atomismo qualitativo, che respinge tanto l'uno che la pluralità. La vera realtà è una non infinita ma grande pluralità di reali ultrasensibili non spaziali nè temporali, specie di monadi possedenti la semplice qualità, che è essi stessi. Già vedemmo che Herbart trattò del continuo (*συνεχές*): la realtà non è continua, l'apparenza è il continuo. Nella metafisica richiama Fichte col suo concetto dell'« io »; ma la rappresentazione dell'« io » insegue sè stessa in infinito, come si insegue quella del volere il volere; onde l'« io » che sa e l'« io » saputo, l'osservante e l'osservato non sono la stessa cosa, ma due diversi gruppi di rappresentazioni. L'« io » non è una sostanza unica che si rappresenta, ma piuttosto il rappresentato è un molteplice, e l'« io » è il punto d'incontro di innumerevoli serie di rappresentazioni, e muta posto ora in questa ora in quella rappresentazione. La rappresentazione è il fondamento della psicologia, non così l'« io », che richiama in Herbart, in opposizione a Kant, la sostanzialità dell'anima, l'immortalità, la preesistenza, il reale o uno dei reali. Nella psicologia invece egli pone un meccanismo psichico, combinazioni di semplici rappresentazioni, di cui le più semplici sono le sensazioni. È qui importante vedere come l'idealismo logico, l'idea assoluta di Hegel, sia seguita e, direi, completata dalle dottrine psicologiche, che considerano non l'elemento assoluto del pensiero, ma le relazioni continue con la realtà e quindi scendono ad un ulteriore scandaglio della conoscenza e de' suoi fondamenti. — In fondo tutto ciò è movimento di pensiero che deriva dalla osservazione, considerazione, e determinazione del mondo, e precisamente del mondo fisico: considerazione, la quale per un lato promosse lo studio dei fenomeni del mondo in quanto oggetti della conoscenza, e per un altro lato lo studio della conoscenza stessa, del soggetto e delle condizioni essenziali al conoscere.

Ma diamo uno sguardo ad altre posteriori conseguenze di un tale sviluppo. — Diverso da quello di Herbart è il pensiero di Schopenhauer, che torna a poggiarsi sulla geniale intuizione anzichè sui concetti herbartiani. Per Schopenhauer si continua il soggettivismo kantiano, in quanto il mondo è una rappresentazione del soggetto. Nella natura la legge di causalità, valevole solo pei fenomeni, si risolve nella serie graduale di causa meccanica, stimolo, e motivo; il motivo è causa conscia, ma non libera. Tutto ciò che è conoscibile è fenomeno: così spazio, tempo, causalità si frappongono fra noi e la vera essenza del mondo, fra noi soggetto e ciò che non è fenomeno, mentre la immediata (diversa dalla conoscenza oggettiva) coscienza di noi stessi ci conduce ad ammettere la nostra vera essenza, il volere. Secondo analogia con noi stessi, che siamo come fenomeni oggetti materiali e in sostanza volontà, deve pur giudicarsi ogni essere. Quindi l'universo è il *Makranthropos*, e, come la volontà è l'elemento primario in noi, così il mondo in sè è volontà. Al pensiero in sè, all'intuizione, alla rappresentazione, s'aggiunge qui la importanza del volere come cosa in sè, non come libertà soggettiva, ma come realtà oggettiva. Dal punto di vista estetico ed etico Schopenhauer ammette invece la contemplazione e il contegno morale indipendenti dalla volontà; nell'intuizione estetica l'oggetto non è in rapporti causali, spaziali, temporali, ma è solo un rappresentante dell'idea, così come la musica è una specie di inconscia metafisica al di sopra del mondo materiale. Nella vita egli vede la cecità e la irrazionalità del principio dell'universo; e però, se è vana la esistenza individuale e il tendere al piacere, gli individui non sono che fenomeni di una medesima volontà originaria, e possono giovarsi reciprocamente con la compassione, al di sopra della quale sta ancora la totale negazione della volontà, il quietismo, il vuoto nulla della conoscenza e del fenomeno. Malgrado il suo determinismo, lo Schopenhauer riferisce il sentimento della re-

sponsabilità all'atto indivisibile del carattere intelligibile. Alcune idee sue coincidono con quelle delle più antiche e più perfette religioni; per ciò egli ritiene che quella religione che come la filosofia ha origine dalle medesime esigenze metafisiche, sia come la metafisica del popolo, e come tale ponga, vestite del mito e dell'allegoria e sotto la dipendenza di una autorità esterna, le medesime verità fondamentali che stabilisce il filosofo in forma di concetti e sul fondamento della ragione: quindi per lui pessima religione, per il suo ottimismo e il teismo astratto, è l'Islam, ottima la buddistica che è idealista e pessimista e senza dei.

Se così si è giunti ad un pessimismo teoretico, si arriva poi ad un individualismo col Nietzsche, che ripudia la morale degli schiavi ed eleva la forza, il concetto del superuomo. — Ma altre e varie correnti di pensiero si delineano in vari sensi verso l'infinito progresso del sapere. — Già aveva da noi G. B. Vico stabilito le basi della filosofia della storia, di contro alla diffusione di una filosofia affine alle dottrine di Cartesio e Malebranche. Vico aveva scorto nell'antichità tre epoche, teocratica, aristocratica, democratica e monarchica, a cui corrisponde una triplice divisione anche presso i popoli moderni, nella considerazione generale del costume, diritto, linguaggio, e di altre manifestazioni umane. — Così Genovesi tradiva l'influenza di Leibniz e di Locke, affermando che sul mondo dei fenomeni noi creiamo il mondo intellettuale delle scienze, e col voler lo studio diretto del mondo, delle lingue, del sapere matematico, dell'uomo stesso più che delle cose. Con lui etica e politica divengon insegnamento filosofico rigoroso, e completano il sapere con lo studio dell'attività umana nell'ambiente politico e sociale. — Melchiorre Gioja, G. D. Romagnosi continuano l'indirizzo sociale. Galluppi è un kantiano; Rosmini considera la conoscenza come il prodotto comune di sensibilità e intelletto, che danno l'una la materia e l'altro la forma; quest'ultima è unica ed è l'idea dell'essere, innata, immediatamente percepibile con la percezione interna, ed è

l'essere ideale. Gioberti contrappone invece a tale concezione un sistema ontologico (« l'ente crea l'esistente »). — E, mentre in questi nostri grandi si rivela ancora la influenza di uno Spinoza, di un Cartesio, di un Kant, continuano pure da noi le dottrine tomistiche, le hegeliane, le positivistiche.

Intanto in Francia si era affermato potentemente l'indirizzo positivo con Comte, che nel suo « Corso di filosofia positiva » riduce la conoscenza al dato, al fatto, al fenomeno e sue relazioni. Avviene così un riavvicinamento al sapere sperimentale ed alle scienze della natura. Il sapere per Comte è relativo, non vi è alcuna conoscenza assoluta, l'essenza dei fatti è imperscrutabile. Dopo che vi furono nella scienza un periodo teologico e uno metafisico, solo in un terzo stadio, quello positivo, si impara a spiegare i fenomeni mediante le loro leggi. Quindi la filosofia positiva ha da ordinare in un sistema universale le leggi fornite dalle singole scienze positive. E Comte dà anche, come Aristotele, come Bacone, come poi Spencer, una sua classificazione delle scienze, fra le quali emerge la sociologia, a cui come pure alla biologia fa capo la psicologia. Questa ultima si serve anche di altre scienze come della frenologia (le tre facoltà dell'anima, cuore, carattere, intelligenza, corrispondono a tre regioni del cervello). Comte pone fra le altre alcune scienze fondamentali, tra cui l'etica o antropologia. Soprattutto è suo merito lo sviluppo della sociologia, che si fonda pure sul metodo delle scienze naturali e sulla esperienza con le relative induzione e deduzione: essa si divide in statica e dinamica, la prima fondata sul consenso, la seconda sullo sviluppo. Comte ammette ancora una religione umana positiva che ha l'amore per principio, l'ordine per fondamento, e il progresso per scopo.

E dopo Comte vennero Littré, ecc. e altri Comtiani di varie tendenze. — Il periodo dell'illuminismo aveva lasciato tracce anche in Francia; e il sensismo di Condillac, la cosiddetta ideologia che considerava sensazioni e idee di due specie cioè ricordi e immagini, s'era continuato in

Cabanis e in molti fisiologi. Ma vi si opposero la scuola teologica con De Maistre, Lamennais, la spiritualistica con Maine de Biran, la eclettica con Victor Cousin, che costruisce la metafisica non a priori ma, come Cartesio, sulla psicologia, benchè per un certo tempo egli fosse rimasto idealista in senso hegeliano. Fu combattuto da alcuni e continuato da altri, fra cui Ravaisson, Janet, ecc. — Parallelamente si ebbero dei seguaci del pensiero kantiano; e si ebbero scienziati pensatori o storici filosofi, come Claudio Bernard, Ippolito Taine positivista, Renan, A. Fouillé, Guyau evoluzionista, lo psicologo Ribot, ecc. — E così, mentre in Francia si allargava il campo del pensiero generale, specializzandosi da una parte nelle singole scienze, dall'altra in singoli e differenziati indirizzi filosofici, tra cui il sensistico, il kantiano, l'hegeliano, il positivistico, in Inghilterra pure si battevano vie notevoli e diverse. Si continuò alcun poco la filosofia scozzese, che era venuta dopo la psicologia dell'associazione di Priestley, l'idealismo di Berkeley e lo scetticismo di Hume derivanti dal valore annesso da Locke alle rappresentazioni. Fra questi continuatori vi furono Mackintosh, soprattutto Hamilton, che fonda la filosofia sul fatto della coscienza e contrappone alla psicologia dell'associazione l'attività spirituale del distinguere e l'importanza del giudicare, e però dice la conoscenza relativa e legata all'oggetto. Una corrente diversa, affine all'antico epicureismo, si forma con Bentham, per cui la virtù è il mezzo al piacere, e questo è l'unico valore. John Stuart Mill ristabilisce l'esperienza come unica sorgente di conoscenza, e avvalora l'induzione: la dottrina della ricerca sperimentale contiene quattro metodi, a cui va aggiunto pei fenomeni più complessi il metodo deduttivo come complemento. Nella morale impera il concetto della felicità, a cui tende ogni essere sensibile che la desidera direttamente o tende al mezzo per essa.

Altro indirizzo maestro è segnato da Spencer. Egli comincia il suo sistema con l'inconoscibile. Un conflitto pro-

fondo egli trova tra religione e scienza: ma l'una e l'altra convengono in questa altissima verità, che l'intelletto umano è capace soltanto di una conoscenza relativa o di una conoscenza del relativo (relativismo). Però, se l'essenza dell'assoluto è inconoscibile, non lo è l'esistenza di qualcosa su cui poggia il relativo e il fenomenico; onde si ha una coscienza indefinita dell'inconoscibile come della causa sconosciuta, della forza universale, e su essa si fonda l'indistruttibile fede nella realtà oggettiva. Quindi tutto il sapere si limita al relativo e consiste in una crescente generalizzazione, sino alla filosofia che è la conoscenza unificatrice di tutte le scienze singole. Nella distribuzione reciproca di materia e movimento si dà una evoluzione e una dissoluzione, di cui la prima è una dispersione di movimento e integrazione di materia, e la seconda è assorbimento di moto e disintegrazione di materia. Soprattutto Spencer stabilisce la conservazione della forza, a cui devono aggiungersi la indistruttibilità della materia e la continuazione del movimento. Inoltre alla crescente integrazione della materia nel caso della evoluzione, è inerente la crescente disformità o differenziazione, determinabilità e individuazione. La filosofia speciale di Spencer si estende dalla natura organica ai fenomeni spirituali e sociali, e perciò abbraccia un campo sconfinato che vuol disciplinare sotto i concetti di materia, forza, e movimento. Essa contiene una biologia, una psicologia oggettiva e soggettiva (la teoria della conoscenza cerca di giustificare positivamente e negativamente il realismo superiore; il criterio della verità è la impensabilità del contrario contraddittorio), una sociologia che considera la società come un organismo, e un'etica della vita individuale e sociale secondo il principio dello sviluppo. — In tutto il suo sistema Spencer proclama lo sviluppo, la evoluzione legge universale, ancor prima di Darwin; e questo indirizzo evoluzionistico darwiniano-spenceriano si prolunga nella storia del pensiero moderno scientifico e filosofico, metafisico e anti-metafisico. Continua nell'agnosticismo di Huxley e Tyndall, nell'e-

voluzionismo metafisico di Clifford, Romanes, Schiller, e nell'etica evoluzionistica di Leslie Stephen. — Coleridge riattaccandosi a Schelling, Carlyle a Fichte, portano in Inghilterra il soffio dell'idealismo tedesco, ed altri cercano di conciliare il pensiero inglese con quello kantiano ed hegeliano. Thomas Hill Green, per esempio, fa consistere la esperienza non nei fatti, ma nei rapporti tra i fatti. Altri ritornano all'agnosticismo, all'anti-empirismo, al teismo. Tra essi è il Martineau, che risente l'influenza di Trendelenburg e Max Müller, il famoso scrittore di scienza comparata del linguaggio. Non solo si moltiplicano gli indirizzi filosofici, ma in essi si moltiplicano ancora le specializzazioni nei rami singoli, sino a toccare i confini delle altre discipline dello scibile. Fiorirono i logici, i propugnatori della dottrina della quantificazione del predicato, o gli psicologi come Sully, i moralisti, ecc.

In America pure vi furon seguaci della scuola deterministica, come Jonathan Edwards, e seguaci di Locke e di Reids, di Hamilton e di Trendelenburg; inoltre degli studiosi di Kant e di Hegel, dell'evoluzionismo e anche del teismo: non pare invece abbia avuto influenza sul pensiero americano il ramo cartesiano mistico di Malebranche, Bayle, ecc. Ultimamente si verificò ivi ciò che avvenne altrove, l'espandersi e l'approfondirsi della psicologia, fra i cui cultori primeggiano lo Stanley Hall, Baldwin, W. James, il filosofo psicologo e pragmatista.

Nella penisola scandinava eran penetrati l'empirismo e poi la dottrina di Kant per opera di Boethius, indi teorie della attività autonoma e del personalismo come quella di Boström, e l'hegelianismo, mentre in Danimarca vi fu pensiero di indirizzo speculativo anche individualista con Kierkegaard, e vi primeggiano i nomi di Höffding, storico e critico della filosofia, e di Kroman.

In Olanda le idee di Hegel e di Kant si propagarono facilmente, ma vi influi pure l'empirismo di Bacone, Mill, Comte. Così questi grandi maestri del pensiero moderno

non furono più ignoti in nessun paese civile, ma vi ebbero seguaci e oppositori, tra cui individualisti e riformatori di minor conto.

In Germania, però, ove dopo il dualismo empirista-razionalista s'era stabilito il nucleo del pensiero moderno con Kant e si era propagato con Hegel, si ebbe un secondo periodo post-kantiano, in cui nella filosofia avvenne una specie di suddivisione del lavoro, ossia quella specializzazione che è caratteristica dello scibile moderno e che, mentre in apparenza separa le scienze singole, in realtà pone ovunque ponti di passaggio, necessità di aiuti reciproci, estensione e approfondimento del sapere in ogni direzione. In Germania adunque, dopo alcuni decenni dalla morte di Hegel (1831), si delinearono, insieme con un movimento neo-kantiano, i sistemi di Lotze e di Hartmann, filosofia naturale con influenze del darwinismo, teorie di etica e di estetica, e le nuove ricerche psicologiche. Questo movimento diverso di pensiero era stato preceduto da una specie di sdoppiamento della scuola hegeliana in ortodossi e progressisti, in conservatori e in negatori delle verità religiose come giustificate dal pensiero filosofico, mentre per Hegel la filosofia ha lo stesso contenuto della religione ma diversa la forma, in quanto mediante il concetto o nozione essa trasforma il dogma in verità speculativa, e però in modo che la fase inferiore non è nè soltanto conservata nè soltanto negata ma elevata nella superiore. Fra gli hegeliani ortodossi o antichi sono Göschel, Gabler, ecc., i quali formano la cosiddetta destra; fra i giovani hegeliani sono Strauss, Feuerbach, che intende spiegare la religione nella sua genesi psicologica, Bauer, ecc., che costituiscono la cosiddetta sinistra. Tra gli uni e gli altri s'insedia il cosiddetto centro con Rosenkranz, Michelet, ecc. La sinistra hegeliana era giunta con Bauer ad ammettere soprattutto l'« io criticante », e in questa direzione essa trovò un continuatore in Kaspar Schmidt, noto sotto lo pseudonimo di Max Stirner, che propugna l'« io » egoista. — Un altro indirizzo derivò ancora dalla scuola hegeliana, quello della

democrazia sociale con F. Lassalle e Carlo Marx, il quale ultimo risentì l'influenza di Feuerbach rispetto al naturalismo, e di Saint Simon e Louis Blanc, e fondò il cosiddetto materialismo storico, che tien conto soprattutto dei rapporti economici, delle energie produttive e del modo di produzione: quindi l'edificio giuridico e politico si mutano secondo la tecnica dello sfruttamento della natura e sono una conseguenza della economia, come pure da essa dipende la vita spirituale nella morale, religione, arte, filosofia. — Accanto alle tre correnti hegeliane su citate hanno posto gli avversari della filosofia di Hegel, come la scuola teista, la quale vuol fondere l'assoluto immanente con Dio trascendente, cercando di far rientrare il panteismo come momento entro la concezione del teismo: fra costoro è I. H. Fichte. Vi sono anche correnti panteistiche, neo-hegeliane, neo-kantiane, idealistiche, filosofico-naturalistiche.

Ma oltre a queste impera il materialismo, il quale rappresenta da un lato l'indebolirsi della spirito filosofico, e da un altro le pretese filosofiche dei naturalisti non paghi della scuola idealista. Nasce così un sistema di pensiero, il quale non è in fondo che la tendenza metafisica a generalizzare e riunire in un quadro totale tanto i problemi naturali che quelli filosofico-religiosi, e si diversifica solo in quanto non separa campi così diversi di pensiero, ma li considera dal solo punto di vista della materia e della forza, riducendo gli avvenimenti a vibrazioni del cervello, la libertà del volere e le rappresentazioni religiose a pure illusioni. È nota la disputa sul materialismo tra Rudolf Wagner e Carlo Vogt, l'opera di Moleschott che si oppose alle idee di Liebig, e il famoso « Kraft und Stoff » di L. Büchner. — Nello stesso tempo si formavano sistemi originali. Günther ricorda Cartesio con il dualismo tra natura e spirito. Trendelenburg è critico delle dottrine hegeliana ed herbartiana, studioso di Aristotele, e pensa possibile la coincidenza della conoscenza con la realtà, essendo fondamentali il moto e il fine, e quindi essendo l'universo tutto

un organismo in cui ciò che è morale è la fase più alta di ciò che è organico. Come storico della filosofia ha il merito di aver stabilito l'esame storico dei singoli concetti, ed è in ciò seguito da Teichmüller e da Eucken. — Ai problemi dell'anima si volsero con intendimenti speciali e metodi esatti il Fechner e il Lotze.

Il primo combatte la divisione astratta tra Dio e il mondo, e pone in relazione reciproca anima e corpo. L'anima umana, per lui, si trova nel mezzo di una gradazione di vite spirituali, come quelle delle piante e degli animali, della terra e degli astri, tutte sopraffatte dalla coscienza dello spirito universale. Come la intuizione prepara il ricordo e rivive in esso, così la vita terrestre passa in quella futura. Nella psicofisica i meriti di Fechner sono ben conosciuti. Con questa egli si ricongiunge alle ricerche di Bernoulli, Eulero, e specialmente di E. H. Weber: con essa egli vuol dare una scienza esatta dei rapporti tra anima e corpo, ciò che non era riuscito direttamente ad Herbart; e si propone la misura delle grandezze psichiche. Unità di misura è la differenza appena osservabile delle sensazioni. Nota è la legge di Weber, e noi abbiamo già avuto occasione di parlarne. Fechner la applicò a tutti i gruppi di sensazioni, ed insegnò che la sensazione cresce e diminuisce proporzionalmente al logaritmo dello stimolo e dell'attività psicofisica dei nervi, la quale ultima è direttamente proporzionale allo stimolo esterno. Notevoli sono di Fechner le ricerche sulla soglia di differenza, sulla soglia assoluta dello stimolo o del divenir appena osservabile della sensazione, sui metodi di misura, ecc., e inoltre i suoi propositi di connettere la sua psicofisica con i suoi convincimenti metafisici. Posto che anima e corpo si appartengono vicendevolmente e che in fondo son la medesima essenza, ciò che a noi appare come mondo esterno materiale, non è nient'altro che una coscienza generale sovraordinata alla nostra coscienza individuale. Di Fechner è pure a ricordarsi la estetica secondo il principio associativo. — A Fechner in qualche

modo si riattacca il Möbius. — Un altro filosofo di somma importanza è contemporaneamente il Lotze. Acuto osservatore quanto Fechner, ha minor tendenza al mistico. Il suo famoso « Mikrokosmos » è più di una antropologia, mentre vorrebbe essere soltanto tale. Notevolissimi sono il suo incompiuto « Sistema di filosofia » e la « Psicologia medica ». Nella metafisica pone per oggetto la realtà: essere è stare in certi rapporti, e l'essenza delle cose, il « quid » che entra in questi rapporti, non è una qualità riposante, ma può considerarsi piuttosto come una regola o una legge. La metafisica non può che darci il concetto vuoto di un assoluto, il quale riceve il suo contenuto concreto soltanto dalla filosofia della religione; il concetto della divinità come di una personalità infinita che non ha nulla a vedere con la nostra persona, riunisce il postulato ontologico di una sostanza universale con il postulato morale di un altissimo bene o di una idea generale del mondo. La « cosa » (« Ding ») è il soggetto uno di stati mutevoli; ma questa unità ci è solo rivelata dalla coscienza, la quale sola può distinguere sè stessa dai diversi stati che si verificano entro di essa, e però nella memoria si riconosce come l'identico soggetto degli stati diversi. In quanto tutte le essenze sono spirituali e come tali sono reali, Lotze si richiama alla monadologia di Leibniz e al panteismo di Spinoza; ma egli sa ancora conciliare la concezione meccanica naturalistica con la teleologia e l'idealismo etico di Fichte. Difatti Lotze pensa che il mondo delle forme ha soltanto la missione di realizzare lo scopo ideale dell'assoluto, del mondo dei valori. Rispetto all'idea di spazio, il Lotze pone anch'egli le cose, gli oggetti, in rapporti soggettivi di spazialità; rapporti che egli chiama intellettuali. Le rappresentazioni, poi, sono non copie ma conseguenze degli stimoli esterni, e la verità non essendo coincidenza della rappresentazione col rappresentato, la conoscenza non consiste nel delineare un mondo chiuso a cui la rappresentazione in via accessoria si accosti, ma piuttosto nel darci quel mondo che ha lo scopo di agire sul

soggetto spirituale e di essere da esso raccolto, vissuto, goduto; quindi consiste nel dischiuderci il senso e la determinazione del mondo. Perciò il fondamento di ciò che è è il dover essere, ed è in quanto in lui si realizza un valore, essendo solo reale il bene. — Nell'etica il Lotze pone la inseparabilità del bene dal piacere, e però diverse forme di questo. Nell'estetica si oppone al formalismo e ammette un contenuto di assoluto valore: il bello, per lui, ci mostra in modo intuitivo le tre potenze del mondo, cioè le leggi, i fatti, i valori.

Dopo Lotze, ferve la contesa del parallelismo psicofisico. Busse, Max Wentscher, Sigwart, Rickert, Ed. v. Hartmann opinano per lo scambio, per il rapporto vicendevole (« Wechselwirkung ») tra anima e corpo; mentre Paulsen, König, Wundt sostengono il parallelismo. — Ed. v. Hartmann concilia in certo qual modo il pessimismo di Schopenhauer con la dottrina hegeliana, e pone il suo assoluto nell'inconscio. Il suo è un realismo trascendentale, in quanto egli dice che le impressioni sensoriali differenti fra di loro e accompagnate dal sentimento della costrizione, non possono venir spiegate dall' « io », ma soltanto dall'azione di cose esterne in sè, indipendenti dalla coscienza e diverse anch'esse. Vi è un mondo trascendente dell'essere, e un mondo immanente delle rappresentazioni: ponte tra i due mondi è la causalità delle cose in sè, la quale è indice della loro realtà. Egli da fondamenti induttivi giunge così a risultati speculativi. L' « in sè » del mondo empirico è l'inconscio. Questo è l'elemento assoluto, che ha due attributi, l'uno attivo o volontà infinita non logica, e l'altro passivo o rappresentazione; il primo infinito e irrazionale, il secondo finito e finale: senza il primo mancherebbe al secondo la realtà, senza il secondo la volontà in sè irrazionale non potrebbe divenire un determinato volere; e così ne viene un dualismo relativo o immanente degli attributi, dualismo che è un momento necessario del monismo assoluto. Per v. Hartmann il fine dello sviluppo del mondo, passato dall'essenza al fe-

nomeno, dalla potenza in atto, è la redenzione o liberazione dal tormento dell'essere per ritornare all'equilibrio armonico originario e alla premondana identità dell'assoluto: il processo del mondo è, per così dire, la incarnazione, la passione e la redenzione dell'assoluto, e, conformemente a ciò, condizione della moralità è la visione della infruttuosa tendenza al piacere e della identità di essenza delle singole essenze tra di loro e con lo spirito generale che esiste in e al disopra degli individui. Rispetto alla religione, egli pensa che la religione dell'avvenire preparata dal presente protestantismo speculativo sia il monismo concreto, che in sé comprende come momenti superati il monismo astratto delle religioni indiane e il monoteismo giudaico e cristiano. La religione dello spirito si scinde in tre parti: la psicologica che considera il lato soggettivo o il credere; la metafisica che, mediante la induzione dai fatti religiosi, dimostra l'esistenza, onnipotenza, spiritualità, onniscienza, giustizia, santità dell'uno e del tutto coincidente con l'ordine morale del mondo, e la capacità e il bisogno della liberazione dell'uomo dalla colpa; e l'etica che tratta del pentimento e miglioramento dell'individuo e del nuovo culto ecclesiastico dell'avvenire. E. v. Hartmann ha saputo estendere la propria attività sino ad abbracciare disparati campi, con considerazioni filosofico-naturalistiche sulla materia e sull'energia degli atomi, concezione meccanica e teleologica della vita e del suo sviluppo, l'istinto, l'amore, la morale, la religione, assurando sempre al principio metafisico. — Ed è questo un segno evidente delle necessità più numerose e più urgenti imposte al pensiero moderno dallo sviluppo che questo pensiero ha subito: necessità che si rivelano sia nell'amplificazione dello scibile scientifico, sia nella specializzazione delle scienze naturali e filosofiche, che dagli elementi della natura fisica si estendono sino ai problemi metafisici, etici, sociali e religiosi, attraverso tutta una serie di discipline della natura inorganica ed organica, biologica, fisiologica, psicologica, logica, teoretica, morale; e sia ancora nel fatto che si danno filo-

sofi seguaci di un distinto indirizzo specializzato o menti sintetiche che producono sistemi originali, in cui è moltiplicato il numero dei problemi e più complessi sono i risultati raccolti e unificati sotto un principio metafisico. — Perciò non può far meraviglia il vedere che, accanto ad un E. v. Hartmann, fioriscono ancora in Germania il neo-kantismo con Zeller, F. A. Lange, che integra il mondo sensibile della esperienza e del divenire meccanico col mondo ideale del dover essere, Helmholtz che fa coincidere i risultati della fisiologia con quelli della critica della ragione, Liebmann, F. Paulsen, che vede nella filosofia kantiana i fondamenti di quella dell'avvenire, pone la volontà e non l'intelletto determinatrice della intuizione del mondo, la dice un credere, e nel mondo della rappresentazione vede un mondo intelligibile nella forma di simboli, ed afferma il parallelismo psico-fisico. Sono ancora a ricordare Albrecht Krause, Classen, Volkelt, che mostrò anche a quali e quanti principî e punti di vista possa dar luogo il pensiero kantiano (scettico, soggettivista, metafisico, razionalista, aprioristico, pratico). Da altri neo-kantiani fu discussa la questione se le funzioni « a priori » vengano esercitate dall' « io » singolo oppure da una coscienza trascendentale. — Lotze aveva posto, parallelamente alla soggettività delle qualità della sensazione, la soggettività dello spazio, del tempo, e dei puri concetti. Il Lange pensa l'individuo umano così organizzato da poter concepire il dato sensibile sotto quelle forme su citate. Altri invece affermano che anche l'anima individuale e la sua organizzazione sono un fenomeno, e che quindi spazio, tempo, e categorie, come condizioni della esperienza, sono delle funzioni di una presupposta coscienza pura, onde il soggetto empirico sarebbe, al pari del mondo degli oggetti, un prodotto e non un produttore delle forme « a priori ». Così si ha un gruppo di neo-kantiani trascendentalisti, tra cui Hermann Cohen, Natorp, Stadler, Kurd Lasswitz, ecc., a cui si aggiunse anche il giurista Rud. Stammler. Ma se vi sono i trascendentalisti, vi sono pure

i positivisti, i naturalisti, gli idealisti. Tutte le principali correnti di pensiero si manifestano liberamente, dal materialismo allo spiritualismo, dal trascendentalismo al positivismo e all'accordo con le scienze della natura.

Tra i positivisti tedeschi di questo periodo posteriore, ricongiunti a Kant per il metodo critico, sono Laas, Riehl. Con Laas ricompare una teoria della conoscenza fondata sul sensismo; il positivismo è quella filosofia che riconosce nessun altro fondamento all'infuori dei fatti positivi, ossia delle percezioni; sua esigenza è che per ogni opinione si dimostrino le esperienze su cui essa riposa. Con questo criterio si afferma anzitutto che soggetto e oggetto sussistono insieme, che gli oggetti della percezione sono variabili, che tutte le differenze specifiche nella coscienza, persino i più alti processi spirituali ed il pensiero stesso, sono trasformazioni graduali, anzi sono percezioni regolarmente trasformate, e devono considerarsi come vicende di una natura senziente, tendente, memore, spontaneamente moventesi. Perciò quelle della metafisica sono illusioni insostenibili scientificamente, e praticamente evitabili. Come la fisica si è liberata dalle cause trascendenti, così l'etica deve trattare il bene morale senza ricorrere al soprannaturale per riceverne il suo valore: anche nell'etica si parte da rapporti umani, da bisogni terrestri e naturali. — Riehl parte dal fatto fondamentale della sensazione, e contrappone alla metafisica, per lui antiscientifica, la teoria della conoscenza, che per lui costituisce la filosofia scientifica: inoltre tratta dell'ideale pratico. — R. Avenarius fonda un criticismo empirico, ed Ernst Mach fonda il fenomenalismo con una metafisica evolucionistica della volontà. — Mach si oppone ad Helmholtz e crede scopo della ricerca la completa descrizione dei fatti: la metafisica dev'essere eliminata; l'« io » e il mondo non offrono alcun dualismo, ma sono una massa coerente di sensazioni, giacchè il mondo non consiste che di sensazioni nostre; le proposizioni matematiche sono giudizi empirici, e la loro forza di convincimento deriva dalla loro facile verificabilità; il con-

cetto non chiaro della causa deve esser sostituito da quello del rapporto matematico di funzione. — Un altro gruppo affine a quello dei neo-kantiani e dei positivisti, è rappresentato da alcuni che credono che ogni essere pensabile non sia che contenuto di coscienza, e così pensano un monismo della coscienza stessa: in questo gruppo sono lo Schuppe, Leclair, Schubert-Soldern, ecc.

Ora, se con questo suddividersi, la corrente totale del pensiero filosofico si accosta da un lato alla metafisica, al trascendentalismo, e persino al teismo e al pensiero religioso, dall'altro essa va sempre più avvicinandosi in tutti i suoi rami (dalla filosofia della natura a quello dello spirito sociale) ai risultati delle scienze naturali, che nel frattempo hanno ricevuto nuovi impulsi e sono perciò uscite dal puro campo della ricerca singola per accostarsi a quello delle leggi generali e delle conclusioni di valore universale. Avviene così una specie di incontro delle grandi correnti del pensiero speculativo e del pensiero empirico; e dalla fusione e dagli urti di entrambe derivano nuove e più complesse necessità, che si rispecchiano nella irrequietezza tormentosa del pensiero contemporaneo, il quale è stimolato da ogni innovazione empirica e da ogni bisogno pratico, e nello stesso tempo ogni raccolta empirica ed ogni azione pratica penetra ed avviva di spirito filosofico, di idealità non individuale nè soltanto sociale, ma universale. Sorgono sempre nuovi fatti e nuovi bisogni, e però sempre più si estendono ed intensificano i rapporti che li collegano. È quindi, secondo noi, notevole il fatto che in una stessa epoca, come quella che corre intorno alla metà del secolo XIX, insieme ed accanto alla speculazione idealistica, al materialismo, agli indirizzi neo-kantiano, neo-hegeliano, neo-baconiano o positivista che nega il valore alla metafisica e lo aggiunge alla teoria conoscitiva, non cessino di imporsi i risultati delle due principali scienze della natura, la fisica e la fisiologia, le quali già in altri tempi e soprattutto nel principio del Rinascimento avevano trasformato la filosofia.

Anche questa volta si verifica il fatto che, se il pensiero filosofico grandeggia allora che è svolto in sistemi indipendenti e originali, esso riceve più vitale impulso e si rinnova quando torna ad abbeverarsi alla fonte di tutto lo scibile quale esso si presenta ordinato nelle singole discipline scientifiche e naturali. In codesti casi il mondo viene concepito in natura, e le nuove scoperte e le recenti leggi non intralciano, ma favoriscono (come per altro verso si era già verificato al tempo della comparsa della teoria copernicana) la concezione generale di un sistema della realtà.

Difatti la dottrina di J. Müller della energia specifica dei sensi acquista un significato più ampio che non quello di una semplice teoria fisiologica; essa anzi, come ben fece notare l'Helmholtz, è una conferma empirica dell'apriorismo kantiano. Un'altra legge che segnò un passo decisivo nella scienza della natura è quella della conservazione della energia, dovuta a Robert Mayer (1842, 1850) e Helmholtz (1847, 1862), e della quale diremo un po' più innanzi; ne è esempio la trasformazione del calore in moto, ecc. E se pensiamo ai nostri Volta e Galvani, allo studio dei fenomeni elettrici, ad Enrico Herz e all'affinità rilevata tra elettricità e luce, all'estendersi delle teorie meccaniche che Lotze applicò persino ai processi della vita, poi allo sviluppo della chimica, al grande incremento della matematica e dei nuovi sistemi di calcolo, alla teoria darwiniana che fa svilupparsi con la selezione naturale nella lotta per l'esistenza, e col mezzo dell'eredità e dell'adattamento, le specie organiche le une dalle altre ¹⁾, inoltre se si pensa al rinnovato conflitto tra atomistica e dinamismo ²⁾, ai progressi dell'anatomia,

¹⁾ Intorno alla rivoluzione prodotta nel campo delle idee scientifico-naturalistiche dal principio della conservazione dell'energia e dalla teoria della discendenza, cfr. WUNDT: *Essays (Philos. u. Wissensch.)*, II Aufl. 1906.

²⁾ W. OSTWALD: *Die Energie u. ihre Wandlungen*, 1888; *Naturphilosophie*, 1901; ecc. O. combatte l'atomismo e pone il concetto dell'energia.

dell'istologia, della fisiologia e psicologia fisiologica, degli studi sul cervello e della frenologia perfezionata, alla patologia e allo studio delle malattie mentali, alla meta-geometria di Gauss, Riemann, Helmholtz, Erdmann, G. Cantor ecc., se tutto ciò si considera e si tien conto di molt'altri insegnamenti delle nuove scienze nelle direzioni più diverse, non si può ammettere che il pensiero filosofico rimanesse indifferente e non sentisse, sia pure indirettamente, l'influenza della ricerca sperimentale, specialmente là ove essa irrompeva in un campo generale di ricerca. Così le teorie sull'origine delle specie, sulle epoche geologiche, gli studi di glottologia comparata, le discussioni sulle origini della vita, sulle condizioni e limiti di essa, sui confini tra natura organica ed inorganica, sulla materia e sull'energia, sugli ultimi elementi, sugli elettroni, sulle proprietà radioattive, ecc., non è chi non veda che sono indispensabili a chi vuole oggi porre le basi di un sistema cosmologico, sia pure con criterio filosofico-teorico. È ben vero che anche dalle scienze della natura pervennero non solo fatti ma ipotesi; ma queste, nella scienza, hanno un valore non solo di possibilità generale supposta, ma ancora di probabilità, e inoltre sono esse appunto che facilitano il passaggio dalla semplice raccolta dei dati empirici alle leggi e alla concezione generale del mondo. Di più è generale ed umana la tendenza all'estendere il valore di un principio riconosciuto giusto o importante: così i darwinisti ¹⁾ ingrandirono l'ipotesi biologica del maestro sino a porla come principio filosofico universale e a ridurre persino le scienze dello spirito in servaggio di una dottrina meccanica evoluzionista. L'influenza del naturalismo si manifestò ancora in altro e forse in più alto modo, in quanto non poteva riferirsi soltanto all'oggetto del conoscere. Quindi la stessa teoria della conoscenza si giovò delle ricerche degli sperimentatori; e la psicologia

¹⁾ Cfr. ERNST HAECKEL: *Der Monismus*, 1893; — *Die Welträtsel*. 1899.

e la morale sono oggi scienze che si sviluppano e procedono coi metodi affini a quella delle scienze naturali. La psicologia in specie, dopo gli herbartiani e Fechner, giunge oggi a risultati esatti nell'esame dei fatti psichici e nello studio dei rapporti tra le manifestazioni psichiche ed il substrato corporeo, pur serbando ancora in qualche modo le tracce del concetto spinoziano delle due esistenze materiale e spirituale parallele fra loro.

Lo spirito scientifico ha adunque in questo periodo pervaso il campo generale dell'attività cogitativa; e se anche ha provocato una pronta reazione idealistica, questa non deve considerarsi, secondo noi, come una corrente di pensiero affatto indipendente e fornita del solo carattere dell'opposizione. Essa è invece ricca di spirito costruttivo e ottimistico, nè si isola dal mondo dei fatti, bensì lo completa. Così vediamo che W. Dilthey si propone soprattutto di combattere l'applicazione dei metodi scientifico-naturali alle scienze dello spirito, che hanno bisogno di un fondamento proprio. Così W. Windelband, il critico ben noto, separa le scienze dello spirito da quelle della natura; ed anch'egli fa opera non di negazione, ma di distinzione e di integrazione. La stessa cosa può dirsi del Rickert. Altri, come Steinthal e Lazarus, danno importanza allo spirito non dei singoli ma della generalità, ed allargano il campo della psicologia estendendolo ai popoli; e quindi non limitano la vera scienza ma la amplificano, poichè per essi s'apprende come lo spirito popolare non sia solo una espressione verbale ma una reale energia, non solo una somma di elementi individuali ma una forza dominante, che nella sua totalità produce fenomeni, che non ricorrono negli individui in quanto tali. Il vero uomo è non l'uomo isolato ma l'uomo in quanto membro della società, e la comunità è il soggetto di una più alta vita dello spirito. Questa, è una delle più importanti affermazioni del pensiero moderno, che sotto un rispetto estende il campo della scienza psicologica sino a comprendere la società e lo spirito gene-

rale, sotto un altro riguardo avvalora per via empirica l'idea dello spirito oggettivo di Hegel. In questo caso lo spirito scientifico è posto al servizio di una corrente idealistica, e questa si afferma sul fondamento di nuove rivelazioni del pensiero scientifico. — Rudolf Eucken vuole che la scienza fondamentale o la dottrina dei principii non si svolga soltanto sul conoscere per sè, ma sulla totale vita dello spirito: all'estetismo antico e al dinamismo moderno, che connette naturalismo e intellettualismo, egli contrappone il concetto del mondo personale. Di questo è principio la formazione dell'essenza, il salire sino a questa e il raggiungerla non coi processi di pensiero, ma con qualcosa che li sorpassa, coll'attività morale. Notevolissimo è questo sistema di pensiero, che intende porre le basi più in là che nel pensiero stesso. — G. Class mira pure ad una specie di idealismo oggettivo. La parte fenomenologica del suo sistema di pensiero considera i rapporti scambievoli tra i contenuti storici e gli individui; la parte ontologica o pneumatologica tratta del vero reale, del fondamento più profondo d'ogni fenomeno. Egli separa dalla vita personalistica animica-naturale determinata dal sentimento, la vita spirituale o effettiva regolata dal pensiero: la vera realtà è lo spirito. La immortalità è ammessa, ma non per l'anima naturale sibbene per lo spirito personale, essendo anima e spirito diversamente concepiti, in quanto l'anima (« Seele ») è spirituale in potenza e può mediante un determinato processo attuarsi nello spirito (« Geist »).

Per tal modo si manifesta la tendenza a voler fondare una metafisica non isolata, ma emergente dai fatti e al di sopra dei fatti, ricollegantesi quindi coi precedenti storici e con le esigenze recenti del pensiero scientifico-filosofico. — Altre scuole, come quella dei positivisti, dei neo-kantiani, dei monisti della coscienza, negano la possibilità della metafisica. D'altra parte gli idealisti, gli hegeliani, gli herbartiani, i schopenhaueriani, si riattaccano ad una metafisica speculativa di vecchio stile. Stanno tra gli uni e gli altri alcuni

pensatori, i quali non rinunciano nè ad un solido fondamento teoretico-conoscitivo col concorso della esperienza, nè ad una totale concezione metafisica. Fra costoro basti ricordare il Liebmann, Bergmann, ecc., ma sopra tutti W. Wundt, che dalla psicologia fisiologica ha esteso la sua attività da un lato alla psicologia dei popoli, dall'altro ai problemi cosmologico, logico (teoretico-conoscitivo), etico, sociale, e i risultati di innumerevoli ricerche raccolte in sistema. Egli concepisce l'anima non come sostanziale ma come attuale, ed ha un concetto voluntaristico dell'attività appercettiva; onde la necessità del parallelismo psico-fisico, di principi speciali che regolano la vita spirituale, come la sintesi creatrice, l'eterogenesi dei fini e il conseguente accrescimento dell'energia, che separano nettamente il campo della causalità psichica da quello della causalità naturale. — Nel campo della pratica si ha pure una reazione contro il pretto naturalismo; tracce di essa si vedono anche nell'economia politica, nel giure. Si giunge in questo campo piuttosto ad un realismo, al principio dell'interesse e dell'utile sociale. — La storia della filosofia entra a far parte della filosofia sistematica.

Per tal guisa si venne costruendo storicamente il pensiero filosofico odierno, che è per un lato un divenuto, e per un altro un divenire. Più sinteticamente considerato, questo movimento storico di pensiero può presentarsi sotto diversi aspetti, fra i quali hanno primaria importanza quello storico-filosofico e quello filosofico-storico, secondo che si guarda allo svolgimento successivo del pensiero filosofico o alle tendenze ed esigenze psicologiche, teoretiche e morali che sono fondamentali dell'attività spirituale umana in genere, e al contegno dei diversi indirizzi di pensiero di fronte a ciascuna o a qualcuna di quelle esigenze ¹⁾). Storicamente considerata, la corrente del pensiero filosofico in questione,

¹⁾ Cfr. W. WUNDT: *Einleitung in d. Philosophie*, V. Aufl., Leipzig 1909.

dopo esser passata nella Grecia per un primo periodo di speculazione cosmologica con la idea macrocosmica e la unità della materia nei fisici jonici e dell'ordinamento del mondo con i Pitagorei, gli Eleati, Eraclito, indi con la idea microcosmica negli atomisti, nei jonici minori (Empedocle, Anassagora), essa era ancora passata per un secondo periodo di sistematizzazione universale del sapere, dagli scettici moralisti negativisti e dalla sofistica al sapere universalizzato e alla autoconoscenza con Socrate, all'opposizione di mondo ideale e reale con Platone, alla unità di entrambi in Aristotele, ed era giunta ad un terzo periodo di rigorismo stoico, scetticismo pirronistico, eudemonismo epicuro. Dopo ciò si erano iniziati i sistemi della emanazione, della mistica religiosa, e quindi coi neo-pitagorici, i teosofi giudaici, e i neoplatonici a poco poco la filosofia trapassò in teosofia, finchè, tra le concezioni rigorosamente razionalistiche e il gnosticismo perfetto, tra il neo-platonismo e il neo-aristotelismo, si affermò la dottrina ortodossa e la pura mistica, e riprese il primo posto il problema cosmologico con la creazione « ex nihilo », il problema teologico con Atanasio, quello morale con Agostino; poi dalla patristica sorse la tendenza più razionalistica della scolastica con i suoi tre stadii successivi del realismo trascendente dei secoli XI e XII, la ontologia e l'« universalia ante rem » (S. Anselmo, ecc.), poi il realismo immanente e l'« universalia in re » degli aristotelici più puri (Alberto Magno, S. Tomaso, Duns Scoto) nel secolo XIII, indi il nominalismo e l'« universalia post rem » del secolo XIV (Occam), con che si inizia la separazione netta di scienza e credenza, di ragione e fede, e si gettano i germi di due grandi correnti, mentre più innanzi nello stesso razionalismo dovevano manifestarsi, come un loro riflesso, le due tendenze, le razionalistiche pure e le empiriste. Il primo impulso, dato in gran parte dal nominalismo, doveva portare alla emancipazione del pensiero, che considera non più un mondo meschino e chiuso, ma un infinito cosmo in accordo

con le nuove scienze della natura e l'indagine sistematica dei cieli, la perfezione e la compiutezza identificata non col limitato ma coll' illimitato, Dio posto come un infinito di ordine superiore o l'idea dell' infinito assoluto. Da ciò si venne alla considerazione, per analogia, dell' uomo come di un microcosmo e di Dio come della « monas monadum », e più tardi alle due suaccennate correnti induttiva-empirica, poi naturalistica, ed alla deduttiva-speculativa indi teologica: l' una con Bacone, Hobbes, Gassendi, giù sino al materialismo, l' altra con Cartesio, Geulinx e Malebranche verso lo spiritualismo, mentre si afferma anche il misticismo e lo scetticismo con Pascal e Bayle. Le due correnti dovevano cedere il posto ad altre due più decise, una razionalistica sia nel realismo panteistico universale di Spinoza che nell' idealismo individualistico e nel teismo di Leibniz, l' altra empirista nel senso di una naturalistica dottrina della conoscenza con Locke, donde vennero tanto l' idealismo soggettivo del Berkeley quanto l' oggettivismo materialistico inglese e francese. Termini estremi di questo movimento duplice di pensiero furono l' empirismo scettico-critico del Hume, l' eclettismo dommatico dei Wolffiani, e la filosofia sentimentalistica con Rousseau, Hamann, ecc., fin che si aprì la via alla critica kantiana, la quale a sua volta apriva la via a due grandi correnti, idealistica e realistica. La idealistica, come affermazione del primato della ragion pratica, divien la dottrina dello Stato e della educazione in Fichte, come dichiarazione dello sviluppo parallelo di natura e spirito è la filosofia panteistica della natura con Schelling, come primato della ragion teoretica è la filosofia idealistica della storia in Hegel. La corrente realistica conduce invece all' individualismo monadologico di Herbart, alla metafisica voluntarista universale di Schopenhauer e giunge all' estremo opposto rispetto alla ragion pura pratica, cioè al positivismo imbalanzito dalle conquiste delle scienze positive singole sino a un relativismo teoretico, umanismo, ecc.

Da un punto di vista teoretico considerata, codesta

storia della filosofia si trasforma invece in una specie di filosofia della storia. Difatti essa non è uno svolgimento cieco, ma un cosciente sviluppo di pensiero unitario che mira alla propria compiutezza, e quindi è il vero stesso che più intensamente si attua per la cresciuta cooperazione intellettuale e il più avanzato sviluppo. Mentre alla storia della filosofia ci conclude piuttosto la filosofia genetica con la dottrina conoscitiva formale o logica e con la reale o propria teoria della conoscenza e poi con quella del metodo, perchè appunto essa ci indica gli strumenti dello sviluppo del pensiero teoretico e quindi la sua ragione storica singola e universale, la filosofia sistematica ci conduce non alla storia della filosofia ma alla sua interpretazione; essa ci insegna la dottrina dei principii, generale o metafisica, e speciale, in quanto dalla filosofia della natura, attraverso le discipline cosmologiche, biologiche, antropologiche, per una serie di scienze intermedie (che oggi si moltiplicano per l'attuarsi della fusione sempre più intensa del sapere specializzato), si passa alla filosofia dello spirito, che si stabilisce con una specie di diritto di prevalenza nell'etica e filosofia del diritto, nell'estetica e nella filosofia della religione, e in sintesi più alta e comprensiva di tutto lo scibile e l'attuabile, nella scienza, nell'arte, nella fede umana, costituenti la ragione ideale e finale del progresso spirituale, il motivo filosofico della storia della filosofia e il suo valore obbiettivo. — Ora, da questo punto di vista teoretico obbiettivo, può stabilirsi appunto tanto un complesso sistematico di conoscenze (o sistema filosofico) ripartite in conoscenze teoretico-conoscitive, metafisiche, e morali o anche in dottrina del pensiero, filosofia della natura, e filosofia dello spirito (con una specie di disposizione storico-formativa, dagli elementi psicologici del pensiero alle funzioni e ai prodotti più alti dello spirito generale), quanto una visione sistematica della storia della filosofia. Difatti in questa si intravedono tre grandi direttive del pensiero, non solo nel senso di tre fasi o stadii

successivi di sviluppo, ma in quella di tre punti di vista alternantisi nella vicenda storica, quali sarebbero la direttiva teoretico-conoscitiva, la metafisica, e l'etica.

La prima comprende l'empirismo, il razionalismo, (a-prioristico, ontologico, panlogico), il criticismo negativo-scettico e il criticismo vero e proprio.

La direttiva metafisica è o materialistica o idealista o realista. Come materialistica, è o dualistica (Democrito e Gassendi), o monistica in senso meccanistico (Hobbes) o psicofisico (Toland, Diderot), comprendendo da questo lato tanto l'estremo criterio fisiologico sino alla frenologia o alla psicologia materialistica, quanto l'estremo sociologico sino a Marx ed Engels. La direttiva metafisica idealistica è o oggettiva (dualistica con Platone, monistica con Leibniz) o soggettiva con Berkeley, o trascendentale, diramandosi dal realismo ideale di Kant al trascendentalismo soggettivo di Fichte, a quello oggettivo di Schelling e all'idealismo assoluto di Hegel. La direttiva metafisica realistica appare o dualistica o monistica; come dualistica riguarda i principî come in Aristotele o le sostanze come in Cartesio, mentre il realismo metafisico monistico è o trascendente come in Spinoza o immanente in forma individualistica herbartiana o universalistica voluntarista come in Schopenhauer.

La direttiva etica è quella che si contrappone, come categoria dei sistemi della morale, alla direttiva critico-conoscitiva e a quella metafisica. Essa comprende i sistemi eteronomi ed autonomi. I primi si attengono alla eteronomia politico-religiosa e quindi all'etica teologica, alla legislazione morale imposta dal di fuori alla coscienza: invece i secondi separano il punto di vista religioso-teistico dall'autonomia morale, e questa confermano, sia che essa si consideri come trascendente, sia come immanente. L'autonomia trascendente è o intellettualistica (oggettiva con Platone, intuizionistica soggettiva con Cartesio e Spinoza), o voluntarista e imperativa con Kant: l'autonomia imma-

nente è o dottrina della virtù o dottrina dei beni. Come dottrina della virtù è un soggettivismo o rigoristico (Cinici, Stoici) o relativistico (Aristotele), o edonistico come nei Cirenaici ed Epicurei. Come dottrina morale oggettiva o dei beni, è o individualista sino all'egoismo (Hobbes), o si limita all'altruismo, alla morale di Locke e a quella sentimentale di Shaftesbury, Hume, Smith, oppure è universale e evoluzionista o perfezionistica come in Leibniz o è lo storicismo di Hegel.

Ma una tale interpretazione teoretica è pur essa pensiero contemporaneo storicamente formato. Non può interpretarsi teoricamente la storia filosofica se non raccogliendola entro il pensiero odierno, il quale a sua volta la compendia e deve esso pure venir interpretato. Se guardiamo a questo pensiero odierno, non può dirsi che un deciso indirizzo vi prevalga. Se mai vi fu epoca, nella quale le più disparate tendenze poterono trovar svolgimento in accordo o in disaccordo tra di loro, tale è certamente la nostra. Dacchè la critica kantiana e le teorie conoscitive, il progresso delle scienze e dello spirito positivo, hanno contribuito a rimuovere il concetto unitario della filosofia e promossero la specializzazione, entro il campo filosofico stesso, di innumerevoli discipline concernenti ciascuna un problema storicamente e sistematicamente considerato, noi assistiamo ad una suddivisione dello scibile umano in branche sempre più numerose, ma però tutte coordinate, sia rispetto al metodo di indagine, sia rispetto al fine, e sia ancora rispetto ad una concezione generale che le raccoglie. Ancora si ripete il fenomeno di una influenza esercitata dall'indagine empirica sullo spirito filosofico, ed ancora si rinnova, per opera di singoli o di scuole, il predominio finale del pensiero puro che generalizza e trae argomento per un concetto metafisico del mondo. Si sono certamente abbandonati alcuni punti di vista; soprattutto la logica ha subito forti scosse dalla critica della conoscenza; la filosofia della religione ha potuto ampiamente svilupparsi, e così pure la estetica, la morale, che

da Kant in poi ha sollevato uno speciale interesse, la filosofia e il problema sociale, la filosofia del diritto, la politica, la filosofia della storia, la storia della filosofia, e la psicologia, che all'autoosservazione contrappose in gran parte i metodi adoperati nelle scienze della natura. A questi grandi rami del sapere si aggiungano tutte le discipline naturali, nelle quali la specializzazione va aumentando ogni giorno per la necessità di un ordinamento dello scibile e per il principio della suddivisione del lavoro; inoltre tutte le scienze biologiche dalla biochimica e dalla chimica fisiologica alla fisiologia comparata ed umana, sino alla psicofisica, ed alla psicologia. Per tal modo ci si presenta dinanzi un quadro immenso, nel quale le singole discipline potrebbero considerarsi come raggi che non partono da un criterio centrale, a meno che come tale non si consideri lo spirito stesso d'indagine e il fine della ricerca sistematica, ma che tutti convergono in un punto lontano, la idea definitiva del mondo, scopo dell'attività conoscitiva umana. E nondimeno ogni disciplina è condotta ancora sotto diversi punti di vista, critico, sperimentale, comparativo, storico, pratico, educativo, sociale. Onde si mira ad un pensiero totale, in cui posson riflettersi tendenze e temperamenti speciali. Ma se queste diverse tendenze conducono, singolarmente considerate, a conclusioni diverse, costituiscono però nell'insieme una effettiva continuità col pensiero passato e nel presente, e riflettono sempre la stessa sete di verità, la quale non è estinta soltanto nella ricerca sperimentale, come non lo è soltanto nella argomentazione metafisica. In ogni angolo del mondo civile sono diffuse teorie idealiste e teorie empiriste, indirizzi speculativi e tendenze pratiche, positivismo e metafisica, psicologismo e ontologismo, materialismo, naturalismo, pragmatismo, persino l'individualismo, il solipsismo accanto al socialismo, ecc., come è evidente oggi in parte anche in Italia. Onde mal si saprebbe dire in che cosa finalmente consista, a che miri lo spirito filosofico contem-

poraneo. In fondo esso, secondo noi, si è giovato di una accresciuta esperienza empirica e si è soprattutto affermato in una concezione attuale, fattiva, volitiva, espansiva del mondo, in un idealismo rinnovato e rinsanguato dal contatto con la realtà e con la pratica. Ma poichè è attivo, esso è anche inesauribile nel progresso storico. Non è più semplicemente il naturalismo pre-kantiano che poneva solo oggetto di studio la natura, fatta anche criterio di spiegazione dell'attività spirituale. La considerazione della natura fu l'impulso; e noi abbiamo voluto partire appunto dall'epoca del rinnovato studio della natura, che ebbe per conseguenza mediata e immediata il rinnovamento del pensiero filosofico. Ma dapprima fu il pensiero solo della natura che occupò per lungo tempo gli spiriti, sia quelli che ebbero la tendenza alla concezione meccanica dell'universo, sia quegli altri che ne ebbero un concetto intellettualistico e pensarono lo spirito mediante la conoscenza pura. In questo periodo, accanto alla credenza dogmatica nella forza della ragione, si impose la realtà empirica sia nella filosofia che nei sistemi di scienze; si giunse a cercare nei metodi matematici una garanzia per l'assoluta sicurezza del sapere, e d'altra parte si tentò scoprire i mezzi e i limiti della conoscenza umana. Ed anche qui diverse tendenze: spiegazione meccanica, separazione di spirito e corpo, il pensiero come essenza dello spirito oppure una sostanza assoluta, sicurezza indiscussa della conoscenza difesa di contro al dubbio, indagine dell'origine delle rappresentazioni. Queste questioni possono già farsi risalire a Cartesio, che le disseminò poi separatamente fra i successori occasionalisti, monisti, pluralisti, sensisti, razionalisti. E però, attraverso il dualismo sensista-razionalista, si operò un profondo progresso, che per un lato va da Bacone a Hume, per un altro da Cartesio a Leibniz e più oltre. Si giunse a Kant come si era giunti a Socrate, cioè preparati alla riforma sia con la sofistica e lo scetticismo, sia con la ragione pura

Kant impera poi per lungo tempo, nè sarebbe vano affermare che ancor oggi il suo grande spirito domina i nostri intelletti. Col criticismo egli completa il problema della conoscenza, e contrappone intellettualismo e moralismo: la metafisica come dottrina delle condizioni « a priori » della esperienza, è assunta a vera scienza. Lo spirito diviene il legislatore della natura, la volontà essenza dello spirito e chiave della vera realtà. In quest'ultimo senso ricorrono i concetti kantiani dell'assoluto valore del sentimento morale, dello scopo morale finale del mondo, del carattere intelligibile e del male; concetti che dal cristianesimo entrano nella corrente della filosofia moderna. Dalla dottrina kantiana della ragion pratica derivano soprattutto Fichte ed Hegel, ed in generale quel grande spirito di idealismo morale che ancor oggi informa di sè la scienza e la vita. Esso ha ragioni storiche e ragioni scientifiche, ispirazione cristiana e spirito moderno. È ben vero che il naturalismo ha ricevuto dal Rinascimento in poi tale un impulso e una giustificazione storica, che esso non cessò di imporsi, sia direttamente con lo sviluppo scientifico, sia indirettamente con l'influenza generale sul pensiero, anche di fronte al pensiero di un Fichte, di uno Schelling, di un Hegel, dei kantiani maggiori e minori e degli idealisti moderni; ma non è meno vero che si impone oggi la necessità di considerare la concezione meccanico-naturalistica non come tutto il vero, ma come una parte di esso, anzi come una verità di ordine subordinato. Una mente come quella del Lotze seppe vedere che allo spirito scientifico non ripugna una conciliazione con le convinzioni idealistiche circa i massimi problemi; e noi abbiamo pure visto che l'Eucken concepisce un'ascensione non ancor finita verso la essenza, che non è neppur raggiunta nel suo punto culminante da alcun processo di pensiero, ma bensì dalla esplicazione della attività morale; e Wundt, che dagli elementi empirici della esperienza assurge ad una concezione voluntaristica, nella quale è superato il concetto della causa-

lità naturale. — William James, pure essendo stato psicologo vigoroso nel metodo della esperienza, non potè adattarsi nè all'associazionismo spenceriano, nè al materialismo, e neppure alla tradizionale teoria dell'anima: criticò severamente le teorie del pulviscolo mentale e dell'automatismo. Empirista per temperamento e metodo, egli giunge in fine al di là dell'empirismo, in pieno spiritualismo; scienziato e ricercatore egli stesso, non ha piena fiducia nel valore della scienza. Non ch'egli la ripudii, ma essa non basta alla sete del suo spirito moderno, che dal contatto con la psicologia empirica è condotto non ad appagarsi dei risultati ottenuti, ma a guardar più innanzi nel mistero e nell'ignoto. Il sapere che egli ha acquistato, gli fa vagheggiare altre forme superiori di sapere, delle quali ancora non abbiamo certezza: perciò ammira la rivoluzione logica operata dal Bergson, e pensa possibile una continuità dell'esperienza, una coscienza superumana e una composizione delle coscienze; concetti questi, che sono tanto più notevoli in quanto ricordano altre concezioni antecedenti e recenti, e però le animano di uno spirito irrequieto tutto nuovo. Strano a prima vista, ma comprensibile con attento esame, è il fatto che in un grande psicologo empirista si trovino congiunti come principii inseparabili questi due elementi: volontà, fede. La verità ha bisogno di esser creduta, ha d'uopo di fiducia; ma credere non è attendere, è agire e volere, è fede nell'attività psichica, è preparazione della verità. La realtà è il volere, da cui tutto emana e a cui tutto ritorna. James, come è noto, pone accanto alla esperienza scientifica quella religiosa, e nell'una e nell'altra giunge in fine a un « forse »; il concetto dell'« io » in lui oltrepassa i confini della esistenza individuale umana. Ora la filosofia del James può assumersi appunto come esponente delle tendenze del pensiero filosofico contemporaneo: ricerca scientifica sperimentale, criterio psicologico, concezione umanistica dei valori morali e sociali, spiritualismo rinascnte, fede nel volere, nell'attività della

coscienza accresciuta e crescente in infinito, in senso intensivo ed estensivo ¹⁾).

Ora, guardando indietro all'epoca in cui le scienze della natura avevano ridestato l'interesse del pensiero prima isolatosi dalla realtà, vediamo che, se un progresso immenso ne seguì nel pensiero totale, onde s'ebbe una successione e opposizione inesauribile di sistemi, si mantenne però inalterato quel filo ideale intorno a cui come a una direttiva centrale tutti i diversi pensieri si raccolgono: la sete della verità, la ricerca del vero ossia di quello stato di coscienza che è desiderato e voluto dall'uomo; stato finale che non consisterà nell'esercizio della sola esperienza, nè nelle affermazioni della pura ragione, ma in una attività più complessa, in cui si compendiano l'interrogare, il conoscere, sapere, credere, agire. — Ora è anche notevole che questo indefinito sviluppo di pensiero si sia iniziato nel Rinascimento, quando non solo si volse la mente alla natura, ma allo studio si congiunse l'entusiasmo, e nella natura non si vide soltanto un quadro limitato dai contorni decisi, ma un campo infinito di esplicazioni, non indegno dell'infinita attività di Dio. Sicchè, se il progresso che da un tal modo di concepire è derivato, può dirsi infinito, infinito si mantenne pure l'ideale della mente umana durante il medesimo. La vastità è in tutti i sistemi filosofici moderni; anche là dove persiste la opposizione delle due sostanze o dei due attributi o dei due mondi dello spirito e della materia, si sente la necessità di una problema generale risultante. D'altra parte si dà nuovo vigore al metodo, si affina la conoscenza, si prepara la critica e l'elevazione del valore morale, e così si inizia la coscienza moderna, conoscitrice critica di ampie verità di esperienza, idealista nella esplicazione morale e sociale, e soprattutto volitiva. L'infinito nella natura era

¹⁾ Cfr. l'articolo: *William James* di G. TAROZZI in *Nuova Antologia*, 1.^o Novembre 1910.

stato l'ideale della Rinascenza filosofica, e l'infinito è ancora oggi l'ideale nostro nel senso che esso è riposto nella fede in una realtà attiva ¹⁾. Ora questa realtà attiva è per

¹⁾ Anche lo STUMPF pochi anni or sono a Berlino parlava in questo senso di rinascita della filosofia. Una coscienza filosofica più ampia, del resto, si rivela nelle più frequenti comunicazioni dei pensieri dei singoli ai più e fra di loro, nello spirito polemico, nelle nuove tendenze della letteratura, dell'arte, nella musica nuova, nelle questioni religiose, nella politica più ravvicinata alle esigenze sociali e individuali, nella critica storica, nello spirito di internazionalismo. Nella gnoseologia il punto di vista scettico e quello dogmatico si integrano in un più completo realismo. Oggi si assiste ad una rinascita e ad un accrescimento dei valori spirituali, unificati in una specie di monismo, come direbbe lo STEIN. Il CHIAPPELLI (*Dalla critica al nuovo idealismo*, Torino, Bocca 1910, p. 73 sgg.; v. anche G. VILLA: *L'idealismo moderno*, Torino, Bocca 1905) dice che il mondo delle leggi e quello dei valori devon ricomporsi per le esigenze superiori del pensiero moderno. Difatti lo stesso positivismo è più conforme ora al valore umano, cioè è, più che meccanico e naturalistico, umanistico in quanto lo spirito umano è misura dell'universo si nell'ordine conoscitivo che in quello valutativo. Vediamo un idealismo oggettivo contrapporsi, come fa il neo-hegelianismo, al naturalismo oggettivo. Ogni dato empirico non è più perduto in un pluralismo statico, ma acquista, oltre che una storia psicologica, un valore morale. Anche il *noûmeno* kantiano è divenuto un valore, essendo un pensabile. Ma il valore umanistico implica ancora l'estendersi della filosofia a tutti i valori universali, da quelli della natura fisica alle superstrutture ideologiche del MARX. In questo senso si giunge persino a una ragione ultrapersonale, a un trascendente rispetto alla coscienza individua ma non però per la totalità infinita dei fatti e degli atti.

Per approfondire questo movimento contemporaneo del pensiero filosofico, occorre leggere i lavori dell'HÖFFDING (*Gesch. d. neuer. Philos. e Moderne Philosophen*), del VILLA (op. cit.), del CHIAPPELLI (op. cit.), del ROYCE (*Lo spirito della filosofia moderna*, Bari, Laterza), del WUNDT (*Die Aufg. d. Philos. in d. Gegenwart*), gli studi del GENTILE e del CROCE sulla filosofia e la letteratura italiana del Secolo XIX, PAULSEN, EUCKEN, BRANDES, ecc. Una visione generale si ebbe nel discorso inaugurale tenuto dal BARZELLOTTI al III Congresso di filosofia in Roma: si disegnano le diverse correnti in speciali organi filosofici e riviste (V., fra molti notevoli lavori, *Intellettua-*

ciò stesso incompiuta, ossia infinita in questo senso. — Ma se ciò è del pensiero filosofico generale, non è meno vero per le singole discipline derivanti dal nucleo centrale e divergenti in apparenza fra di loro.

La cosmogonia naturale era già stata in qualche modo trattata dall'antica dottrina materialista, per cui era ammesso l'interminabile movimento parallelo degli atomi attraverso l'interminato spazio, e le graduali complicazioni e combinazioni degli atomi in corpi solidi e liquidi, viventi e senza vita. Nel Rinascimento queste idee non rimasero senza efficacia. — Helmholtz ricorda che l'interesse di Kant, il quale come cosmologo può considerarsi il padre del dinamismo che si connette con la continuità, per la descrizione fisica

lismo e prammatismo di fronte alla morale di G. VIDARI in *La coltura filosofica*, anno IV; ed ivi pure, anno V, 1, uno studio di R. MONDOLFO sopra la esigenza filosofica costante attraverso la caducità dei sistemi: ivi è osservato che l'avvenire della filosofia sta più nel tendere con sempre maggior desiderio alla verità ed alla eliminazione teoretica dell'errore e pratica del male, anzichè nel definitivo conseguimento di essa verità — altri osserva che anche nell'etica si assumono dei concetti di valore euristico —; e si mettono bene in rilievo alcuni aspetti del pensiero filosofico odierno, come la filosofia della immanenza dello SCHUBERT-SOLDERN, SCHUPPE, REHMKE, ecc. sino all'estremo del solipsismo, derivante in fondo dal BERKELEY, e la filosofia della contingenza con BOUTROUX, BERGSON, ecc., che ripristina i valori finali anche in seno al positivismo: da una parte adunque il puro intellettualismo, dall'altra la finalità voluntaristica e il pragmatismo, ai cui eccessi nella logica e gnoseologia si oppone però il neo-hegelismo e la filosofia dell'assoluto, che ricorre a un « io » più ampio e profondo o ad una volontà finale; onde, in fine, la verità della conoscenza è, come il bene morale, un divenire e una esigenza continua e interminabilmente insoddisfatta). — Ricordiamo ancora, per la conoscenza del pensiero filosofico contemporaneo, MÜRSTENBERG, ZIEHEN, ecc. — Sulla nomenclatura di speciali indirizzi e correnti della filosofia è notevole un lavoro di RANZOLI (*Le forme dell'idealismo e del realismo*) in *La coltura filosofica*, anno V, 1, 1911, come pure del WUNDT la già cit. *Einleitung in d. Philos.*, I, III Th., e del medesimo *Ueber naiven u. kritischen Realismus* in *Philos. Stud.*, Bd. 12-13; v. poi DE SARLO (*Scritti filos.*) LEVI, CALÒ, ecc. — Per

della terra e dell'universo, si ricollega al suo appassionato studio delle opere di Newton e dell'attrazione universale; e inoltre che in Kant è un'altra concezione genialissima, connessa sotto certi rispetti con sistemi molto antichi, che cioè la forza di attrazione di tutta la materia ponderabile, che ora sostiene il corso dei pianeti, dovette una volta esser stata capace di formare il sistema planetario con la materia diffusa nello spazio cosmico: ipotesi ammessa, indipendentemente e più tardi, e introdotta nell'astronomia dal creatore della meccanica celeste, Laplace. Questa ipotesi del condensamento trovò un appoggio nell'analisi spettrale, che ha mostrato che della stessa materia di cui è costituito il nostro pianeta, risulta pure formato tutto il sistema solare,

orientarsi in modo più specifico, sono opportune le molteplici collezioni (*Uomini e tempi, I grandi pensatori, I grandi filosofi, Biblioteca di varia coltura, Coltura dell'anima, Les grands Philosophes, Bibliothèque de philosophie scientifique, Bibliothèque des sciences contemporaines, Biblioteca di coltura moderna* del Laterza, *Biblioteca di filosofia e pedagogia* del Formiggini, e molte altre), poi le riviste, tra cui eccellenti la *Rivista di Filosofia, La coltura filosofica, la Rivista pedagogica, La critica, Scientia*, e quelle innumerevoli e ben note dell'estero. — Recentemente, poi, il IV Congresso mondiale di filosofia in Bologna (aprile 1911), apertosi con uno splendido discorso di F. ENRIQUES (pubblicato poi in *Scientia*) sul problema della realtà, in cui convergono, tendendo a valori invarianti, il pensiero scientifico e il mondo dei sentimenti, diede modo al BARZELLOTTI di proclamare l'integrazione graduale della filosofia con le scienze; al BOUTROUX porse occasione di affermare che la ragione deve integrare la scienza con l'esperienza della vita regolando i rapporti della prima coi modi della condotta; concedette l'opportunità al BERGSON di osservare che l'essenza della filosofia sta nella sincerità e vivacità di una intuizione, mediante cui si cerca di comprender l'universo scoprendo in sè stesso la spinta vitale; CROCE, nel campo della estetica in cui è illustre, ricordò che la intuizione musicale partecipa agli elementi di psichicità più alti; OSTWALD fece presentare una relazione sulla base fisica della volontà, di ARRHENIUS si riudì la teoria del divenire dei mondi, mentre manifestarono il loro pensiero TOCCO, MINOCCHI, DE LORENZO, GEMELLI, e due intelletti moderni e arditi, POINCARÉ e SCHILLER.

e che persino la si ritrova nel mondo della stelle fisse. La nuova geologia ha introdotto la teoria delle rivoluzioni terrestri, per cui la teoria della stabilità ha soltanto un significato relativo. Anche in un altro senso la stabilità è cosa controversa: pure calcolando con Czolbe un rallentamento di $\frac{1}{300}$ di secondo nel tempo di rotazione della Terra dai tempi di Ipparco al secolo scorso, si avrebbe un ritardo di 1" in 600.000 anni, e ad ogni modo si giungerebbe a un'epoca lontana, in cui il rapporto tra giorno e notte e quindi i fenomeni vitali sulla terra e il giorno siderale subirebbero forti alterazioni. Che questa stabilità non sia assoluta è dimostrato anche dai fenomeni del flusso e del riflusso in rapporto all'accostamento e allontanamento della superficie terrestre rispetto al Sole e alla Luna, dell'attrito terrestre nel giro di rivoluzione, ecc.; il ritardo, però, è in questi casi compensato dalla progressiva contrazione terrestre e relativa accelerazione della rotazione dell'asse. Vi sono comete che descrivono ellissi sempre più ridotte intorno al Sole; il che fa pensare ad una resistenza di un mezzo. Persino il calore solare non durerà eterno, se esso è in rapporto con la gravitazione e si diminuisce la forza meccanica della rotazione. Così si è calcolato che dovrebbe cessare la vita in tutto l'universo, secondo la teoria meccanica del calore: ma questa teoria, che ricorda quel materialismo medioevale, il quale ammetteva il divenire e il perire del mondo, non può soddisfare che a patto di ammettere in compenso infiniti mondi. — Certo la cosmogonia ha allargato il concetto dell'origine del mondo, allontanandola nel tempo, rendendola graduale, causata anch'essa nell'ordine naturale e collocata in uno spazio incommensurabile popolato di innumerevoli altri sistemi.

Un altro problema che si ricollega coi progressi moderni della cosmogonia è quello della origine degli organismi. In principio del Rinascimento, sotto l'influenza di Paracelso e van Helmont, si poneva un abisso tra organico e inorganico. Più tardi fu posto il problema della « generatio ae-

quivoca ». Vogt ci ha descritto le discussioni scientifiche avvenute in Parigi con l'intervento di Pasteur. Già S. Agostino aveva supposto sin dal principio del mondo due specie di semi di essenze viventi, la visibile (piante ed animali), e la invisibile celata in tutti gli elementi, e che da principio dovette essere la sola agente. Invece altri, in nome di antica autorità scientifica, sentenziavano: « Omne vivum ex ovo ». Nelle sue considerazioni sulla natura, Bonnet aveva combattuta la « generatio aequivoca »; e sin quasi ai nostri giorni valse il principio « omne vivum ex ovo », in cui concordarono la ortodossia e la ricerca esatta. Meier in Halle delinea le caratteristiche della teoria della preformazione, secondo la quale si era giunti ad ammettere che, nella produzione naturale, tutte le future generazioni fossero già contenute nell'ovo o nello spermatozoo originario. Modernamente lo Schwann mostrò in parte che l'elemento proprio di ogni forma organica è nella cellula, e in parte mostrò che nell'apparente origine degli organismi per « generatio aequivoca » deve sempre presupporci la presenza di ova o di semi. Tale ipotesi fu però combattuta da C. Vogt nel 1852. Gli infusorii hanno origine nel concorso di aria, acqua e materia organica: ma anche ciò sotto date condizioni, e in modo che la « generatio aequivoca » non potè essere dimostrata. Da esperienze fatte da Bastian e von Huizinga e altri, risultò che dopo dieci minuti di ebollizione del loro liquido in un matraccio ben chiuso, si formavano batterii e soltanto batterii, onde si credette di poter dimostrare per questi semplicissimi organismi la « generatio aequivoca »: si vide poi che con una ebollizione prolungata per ore e col successivo raffreddamento non si avevano più batterii. Ad ogni modo la soluzione del problema rimase incerta. Una nuova possibile soluzione per l'origine degli organismi apparve con la scoperta delle monere, che si conservano, si nutrono e propagano senza possedere determinati organi ma soltanto una piccola massa protoplasmatica. Il fisico inglese William Thomson deriva l'origine degli organismi

sulla nostra Terra dallo spazio cosmico, e considera le meteore come conduttrici dei medesimi; egli fu però contraddetto da Zöllner, che trovò l'ipotesi antiscientifica, perchè i meteoriti coll'entrare nella nostra atmosfera divengono incandescenti per attrito. Helmholtz invece osserva che le più grosse meteore si riscaldano soltanto negli strati più esterni, ma nell'interno, ove possono ben tener nascosti quei semi, rimangono fredde, e ad ogni modo ritiene conforme allo spirito scientifico opporsi all'ipotesi di una origine di organismi da sostanza priva di vita. Si deve però pensare che, come da principio il nostro pianeta doveva essere privo di vegetazione quand'era ancora in uno stato igneo liquido, così anche altri corpi celesti potevano analogamente in precedenza aver subito lo stesso processo; e allora bisogna ammettere che ciascuno di essi abbia ricevuto la propria vita da un secondo, e questo da un terzo e così via. La questione è soltanto spostata, e però rimane. Zöllner ed Haeckel concordano nel ritenere che la « *generatio aequivoca* » non può « *a priori* » esser negata che col sopprimere la legge di causalità. Soltanto che Zöllner, invece di concludere per un atto creativo soprannaturale, suppone la questione come risolta per via deduttiva, e ritiene una lacuna della conoscenza il fatto che il naturalista attribuisce un sì grande valore alla dimostrazione induttiva della « *generatio aequivoca* », che da Pasteur e da altri era stata contraddetta in modo definito; ed Helmholtz, il quale vide che Zöllner si era così portato sul terreno della metafisica, pose la questione nei suoi minimi termini, che sono i seguenti: la vita organica o ha cominciato ad esistere in un tempo qualsiasi, o esiste dall'eternità. — Fechner suppone che le molecole organiche siano le primitive di fronte alle inorganiche, e che le ultime si sviluppino dalle prime, e non viceversa, per il principio della stabilità crescente. Ma, a parte questa supposizione, è evidente che le ipotesi su citate sull'origine del mondo e della vita nel mondo, moltiplicano in infinito le probabilità di soluzione; inoltre fanno sì che nella scienza

stessa della natura il puro materialismo venga superato dalle nuove vedute sulla vita e da altre che dimostrano il nesso intimo tra la ricerca empirica e le esigenze idealistiche per una completa rappresentazione del mondo.

La scienza allargò anche il suo orizzonte, non solo risalendo all'origine del mondo organico ed inorganico che si sviluppa sotto i nostri occhi sul nostro pianeta, ma ancora seguendo le vicende delle specie animali sino alle nostre prossime. Col darwinismo si creò tutta una vasta letteratura sulla teoria della discendenza, sull'allevamento naturale, sull'origine dell'uomo. Darwin appare quasi come il rappresentante più influente della spiegazione naturale delle forme organiche. La teoria dell'origine delle specie ci riconduce a epoche lontane, e vi fu chi si servì della dottrina darwiniana per convalidare la opposizione, già anticamente sostenuta da Empedocle, contro la teleologia, e però trovò anche che tale dottrina non è completamente dimostrata. Certo la forma antropomorfa della teleologia è allontanata dai fatti; la natura progredisce in un modo che non ha analogia alcuna con la finalità umana, e che anzi, confrontato col criterio di misura della ragione dell'uomo, può essere eguagliato al cieco caso; ma il caso, nello sviluppo delle specie, non deve intendersi nel senso delle leggi generali della natura e dei loro effetti, ma è « caso » solo in opposizione ad una intelligenza umanamente calcolatrice. Difatti, se noi negli organi degli animali e delle piante troviamo la finalità, il conforme allo scopo, dobbiamo ammettere che nell'eterna caduta del debole vengono distrutte innumerevoli forme meno adatte allo scopo, in modo che ciò che si conserva è soltanto il caso speciale più favorevole nell'oceano del nascere e del morire. Qui nasce però un'altra questione, quella della possibilità del caso sostituita alla causalità effettiva: se non che, negandosi la finalità antropomorfa, non si nega tuttavia la necessità, nel senso che il singolo caso è possibile perchè coordinato al meccanismo di leggi che, se non rispondono direttamente alle conseguenze del nostr^o

concepire, tuttavia esigono che fra i casi innumeri si trovino i più favorevoli, i quali poi sono fatti reali e come tali conformi alle eterne leggi dell'universo; e codeste leggi, se non corrispondono alla sapienza umana più alta, ma ad elementi che sono per il loro logico contenuto decisamente i più bassi che noi conosciamo, implicano pur sempre un apprezzamento di valore fondato sulla natura umana. — Quanto alla natura e all'essenza dell'individuo organico, è a ricordarsi che Goethe ha insegnato ciascun vivente essere non un singolo ma una pluralità, una raccolta di nature viventi indipendenti: quanto più imperfetta la creatura, tanto più le sue parti sono eguali o simili tra loro, e tanto più è facile che il tutto sia eguale alle parti; quanto più la creatura è perfetta, tanto più dissimili le parti tra loro e rispetto al tutto; quanto più simili le parti le une alle altre, tanto meno esse sono subordinate le une alle altre; la subordinazione si riferisce ad una creatura più perfetta. Questo modo di vedere fu utilizzato da Virchow in una sua conferenza sugli atomi e sugli individui; e la patologia spiega l'individuo come una comunità unitaria, in cui tutte le parti cooperano ad uno scopo uniforme, che per Virchow è interno ed immanente, e fa essere l'individuo una unità reale in opposizione alla pura unità pensata che è l'atomo. Ecco così un nuovo e grande concetto: l'unità fisiologica, la forma dell'organismo come individuo, ossia l'individuo risolto non in un singolo puro elemento ma in una forma, in un modo di essere. — Rispetto alle più alte forme organiche, se esse nel decorso di tempi molto lunghi si sono così formate e limitate le une rispetto alle altre in modo da apparire così come oggi noi le vediamo, dobbiamo ammettere che esse possiedono in generale un alto grado di stabilità; e la opinione che noi oggi dobbiamo farci della serie totale degli organismi non è più quella di una scala in una regolare e ben ordinata successione dal più basso al più alto, ma bensì quella di un'immensa base di un sistema completo, che è ancora in movimento durevole, e da cui si

elevano verso l'alto le forme distinte e sempre più stabilmente segnate delle piante superiori e degli animali. Ora, se la dottrina della discendenza ammette le forme di transizione, siamo però oggi in grado di rilevare che le variazioni negli organismi abbandonati a sè stessi non si sono avverate in modo così lento e inosservato, come sembrerebbe seguendo Darwin ; ma piuttosto che, ad ogni mutamento notevole delle condizioni di esistenza, sian subentrati, non in modo inosservabile, ma d'un tratto, a urti, a scosse, un rapido sviluppo di alcune forme e un regresso di altre; il che non esclude che ogni alterazione dell'equilibrio naturale produca una tendenza al variare, e con ciò dia occasione all'origine di nuove forme, che rapidamente si stabiliscono e delineano quando si diano circostanze favorevoli. Nella dottrina della discendenza si deve sempre risalire ad un principio decisivo, quello dell'alterazione dello stato di equilibrio e della conseguente e necessaria stabilità delle specie nel caso di una lungamente durevole eguaglianza delle condizioni di vita. In generale il periodo di adattamento segue ad una alterazione di quell'equilibrio ed è collegato con una crescente tendenza alla variazione; il che fa pensare alla possibilità di un immediato nesso causale tra il mutamento nelle condizioni di esistenza e il mutamento delle forme, e fa anche ricordare che, secondo il pensiero di Lamarck, l'ingrandimento, il rafforzamento, e lo affinarsi nello sviluppo di un organo qualsiasi deriva dall'uso accresciuto di esso; e inoltre che è importante quel principio della imitazione, a cui si riconnette l'adattamento dei colori e della forma degli animali al loro ambiente o anche ad altri organismi. Dalle ricerche di Pouchet risulta non solo il fatto già noto che spesso i pesci hanno la colorazione del fondo del liquido in cui stanno (nel che può essere talora entrata come mezzo la selezione naturale), ma ancor questo, che i medesimi pesci (rombi e magnaroni) entro poche ore mutano il loro colore a seconda di quello del fondo su cui si sono portati. Anche ammesso nelle

mutevoli loro cellule del pigmento, un meccanismo che spieghi quel cambiamento rapido di colorazione, resta ancora a vedere come colori di oggetti esterni producano colori analoghi nell'animale per l'intermediario del sistema nervoso: questione, questa, che si ricollega a quella più complessa dell'interno eccitamento del desiderio e del volere, e che apparentemente sembra esser risolta con l'ipotesi dei riflessi ordinati e conformi allo scopo. Ad ogni modo tutto ciò non infirma affatto nè la selezione naturale nè la lotta per l'esistenza, e quindi non è in disaccordo con il perfezionamento e completamento di tutte le forme, la soppressione delle forme intermedie imperfette, e la conservazione totale dell'equilibrio fra tutti gli organismi, in modo essenziale. — Alla selezione naturale e alla lotta per l'esistenza lo stesso Darwin aggiunge un altro grande principio regolatore, la correlazione dell'accrescimento, per la quale hanno origine delle variazioni di forma, che sono conseguenza necessaria di un mutamento condizionato dalla selezione naturale, e che di per sè non han nulla a vedere con la lotta per l'esistenza. Si darebbero sotto certe circostanze delle specie puramente morfologiche inutili in questa lotta. La origine di tali specie fu da Nägeli posta in relazione con l'ipotesi che sia innata negli organismi una tendenza allo sviluppo progressivo; ma da Darwin e Kölliker questa ipotesi non venne ammessa, come quella che implica il principio dell'utilità, mentre le cause positive delle variazioni e dello sviluppo hanno piuttosto il loro fondamento nelle interne disposizioni degli organismi, come pensano Darwin e i suoi discepoli. Darwin stesso ammette però la cooperazione di queste cause interne, e accanto alla selezione artificiale dà importanza massima a quella naturale; onde da una parte la lotta per l'esistenza ci spiega un grande fattore della creazione, e d'altra parte il cercar rifugio nelle leggi dello sviluppo ci soccorre per il pensiero del futuro.

Haeckel pensa che nella natura del carbonio, sebbene in modo non chiaro, sia a cercarsi la causa per i movimenti

propri che noi osserviamo nel protoplasma, e che consideriamo come gli elementi di ogni fenomeno vitale: la qual questione è assai complessa e si estende alla connessione tra la forma di cristallo e il modo di composizione della materia cristallizzata. Ma, qualunque sia questo nesso, ci si affaccia dinanzi in modo più comprensibile la legge di sviluppo degli organismi che non quella di sostituzione dei carburi, e ci appare ben netta e sicura l'ipotesi della lotta per l'esistenza insieme con quel principio di equilibrio che si può esprimere come il maximum della vita possibile in un medesimo tempo. — Quanto alla questione se le forme originarie, da cui deriverebbero le presenti forme di vita, fossero costituite in modo eguale, senza entrare nella ontogenia e filogenia, si può supporre anzitutto che lo sviluppo importi il diverso; e soprattutto deve tenersi nel suo giusto conto il grande principio dimostrato da Darwin della trasmissione ereditaria delle proprietà acquisite. Onde, tanto per l'individuo che per la totalità degli organismi nel suo sviluppo storico, deve dirsi che le forme semplici originarie, che tutti gli esseri devono percorrere, non sono necessariamente consustanziali: esse possono differire in una struttura più fine e intima e per noi inconoscibile, oppure nella loro composizione chimica, pur essendo morfologicamente eguali.

Tutte queste questioni inerenti alla teoria darwiniana e alle sue conseguenze, risolvevano il problema teleologico. Ma questo, nel caso qui discusso, non va più posto col considerare la finalità formale del mondo, ossia la conformità del medesimo alla nostra ragione, bensì adottando un'altra specie di finalità, quella oggettiva, della natura, sebbene anch'essa sia come un principio euristico non esplicativo. Lo stesso Kant ammette che la spiegazione meccanica degli organismi è un processo che corre in infinito, e in cui rimarrà continuamente un resto non risoluto, come avviene per la spiegazione meccanica dell'universo: pure ciò non è in conflitto col principio della ricerca naturale, a meno che lo stesso naturalista non sia

tentato di oltrepassare il limite indicatogli dalla esperienza. E Fechner pensò il principio della tendenza alla stabilità come qualcosa di interposto tra la semplice causalità e la teleologia. E. v. Hartmann nella filosofia dell'inconscio pone invece la teleologia in un senso che nega il nesso causale della natura, e vi sostituisce un presunto calcolo di probabilità, oppure mantiene la causalità, ma la presuppone non soltanto nella materia, bensì ancora tra spirito e materia, e tra spirito e spirito. E però, se si pensa che la dottrina della probabilità è una astrazione delle cause effettive che non conosciamo, mentre ci sono note solo alcune condizioni generali poste a base del nostro calcolo, si vede che essa non ha troppo motivo di rimuovere la causalità naturale, la quale è appunto ciò che il naturalista considera. La probabilità è soltanto la espressione matematica della nostra soggettiva incertezza, e però è legata a un principio che giace al di là della ricerca naturale.

Con ciò noi abbiamo veduto dischiudersi nuovi orizzonti alla cosmogonia moderna, e ancora alla biologia in genere e a quelle scienze in specie, che studiano i rapporti in cui si trovano le forme varie di vita sul nostro pianeta, le condizioni del loro sviluppo e conservazione. Importante è il fatto che si è introdotto anche nella scienza quel grande criterio storico e critico che ha scoperto nuovi rapporti di collegamento e di combinazione in ogni direzione dello spazio e del tempo. La teoria della evoluzione, che ricorda antichissimi precedenti, non è in fondo e nel suo insieme che uno strumento di questa abitudine di pensiero e l'applicazione di un processo naturale cogitativo, ma soprattutto corrisponde ad una esigenza essenziale del pensiero moderno. Nella teoria dello sviluppo, moltiplicandosi i nessi causali, l'idea generale della causalità se ne rafforza; e le difficoltà che questa incontra sono superate dalla necessità del collegamento e si risolvono in una specie di continuità regolare constatata o supposta.

Ma ancora in altro modo lo spirito scientifico si esplicò

in crescente progresso. — Mentre Buffon, De La Mettrie, e più tardi i filosofi naturalisti tedeschi, compreso Goethe, si tenevano al concetto dell'unità della creazione e cercavano di spiegar le forme più alte derivandole dalle inferiori, Cuvier è lo strenuo difensore del singolo, e si oppone al panteismo. Però alla creazione unica si sostituisce quella successiva. Cuvier dice: non c'è alcuna scimmia fossile, nè ci può essere, non c'è nessun uomo fossile, nè ci può essere. Fu anche detto esservi nelle formazioni paleozoiche solo il regno dei pesci e nessun rettile, perchè ciò sarebbe contrario al piano della creazione; così nelle formazioni secondarie esservi solo il regno dei rettili e nessun mammifero; negli stati terziari il regno dei mammiferi e nessun uomo; più tardi l'uomo. Ma ciò, come è noto, fu poi contraddetto da esperienze posteriori; e la contraddizione fu molto ben posta in rilievo dal Vogt. — L'epoca glaciale fu studiata su tracce che si connettono in due modi diversi coi fatti astronomici, cioè una volta col cambiamento periodico della inclinazione della eclittica, e poi persino coi cambiamenti nella eccentricità del percorso della terra. La prima ipotesi porrebbe l'epoca glaciale del nostro pianeta ad un periodo di soli 21.000 anni, nel quale ora l'emisfero settentrionale ora il meridionale avrebbero la loro epoca glaciale; la seconda ipotesi allontanerebbe dal presente l'epoca glaciale di ca. 200.000 fino a 800.000 anni. La presenza dell'uomo si fa risalire fino all'epoca terziaria, quindi molto lontano nel tempo. Le forme di transizione forse devono cercarsi all'infuori dell'Europa odierna. Della interruzione che ne risulterebbe, lo stesso Darwin pensa che essa è stata portata come una grave obiezione contro la ipotesi che l'uomo sia derivato da una forma inferiore, dal momento che non è ben possibile riempire la interruzione nella serie organica graduale tra l'uomo e i suoi più affini mediante specie morte o viventi; ma egli pensa ancora che per coloro i quali in fondo credono al principio generale della evoluzione, l'obiezione non ha più molto valore, giacchè

tali interruzioni ricorrono continuamente in tutti i punti della serie, alcune ben distinte e profonde, altre meno, come p. es. tra l'orango e i suoi più prossimi, ecc.

Delle prime epoche della vita dell'uomo molto si è potuto assodare mediante scavi e scoperte che misero in luce i suoi strumenti, prodotti, mezzi, documenti varii del suo modo di esistenza nei diversi periodi del progresso della cultura. Darwin ammette l'origine del linguaggio anche per imitazione dei suoni prodotti dagli animali, il che può porsi in accordo con la formazione dei concetti, giacchè il suono caratteristico imitato da un animale può suscitare la rappresentazione dell'animale a cui spetta quel suono. L'idea dell'unità del genere umano oggi non ha più bisogno dell'appoggio che già altra volta trovò nella dottrina della comune discendenza. Riguardo alla derivazione dalla scimmia, questa, come è noto, non è in senso rigoroso una conseguenza della dottrina di Darwin, secondo la quale piuttosto si può essere indotti ad ammettere che in un dato momento della preistoria dell'umanità si dislocò una forma primitiva, dalla quale in seguito per un lato derivò con sforzi e col tendere l'uomo, e per un'altra, persistendo la formazione animale inferiore, la scimmia: per cui gli antenati dell'uomo si sarebbero formati come esseri simili alla scimmia, ma già con la disposizione ad uno sviluppo più alto, il che pare sia stato press' a poco anche il pensiero di Kant. Il supporre, come fece Snell (1863), che ciò che v'ha di umano sia uscito fuori dalle precedenti forme animali mediante qualcosa come il presentimento e l'ansia di afferrare, ci porterebbe a scambiare le condizioni della perfettibilità con un manifestarsi anticipato de' suoi frutti, giacchè ciò che ora ci appare più nobile e più alto non è che l'ultimo risultato di una lunga esistenza satura di impressioni varie e resa possibile da tutt'altro genere di proprietà. Il primo passo che presumibilmente rese possibile la cultura dell'uomo, fu il raggiungimento di una preponderanza su tutti gli altri animali, con astuzia e crudeltà, violenza e malignità raffinata, armi,

di cui del resto anche l'uomo moderno con più celato accorgimento si vale nella lotta per l'esistenza, poi ancora con lo sviluppo dell'intelligenza e di virtù sane entro l'ambiente della stirpe e della famiglia. Sicchè anche dal punto di vista psicologico non si può respingere l'affinità di derivazione dell'uomo e della scimmia, nel senso che più sopra accennammo.

Ma, se gli studî sull'origine del mondo e dell'uomo allargarono i confini del sapere e aprirono la via a una continuità incessante nella serie causale della natura, altri non meno potenti fattori della moltiplicata energia espansiva del pensiero moderno furono le ricerche sul cervello e sui suoi rapporti coll'anima. Se è vero ciò che più sopra dicemmo, essere cioè le rivoluzioni, introdotte nello scibile da scoperte e leggi nuove, le più potenti leve del progresso ulteriore, si dovrà anche ammettere che in gran parte l'immenso ingrandirsi del pensiero moderno si deve in gran parte ad alcuni fatti capitali nella storia della scienza, come la scoperta del telescopio e del microscopio e loro conseguenze, gli studî sul cervello e sue funzioni, la conservazione e trasformazione dell'energia. — L'epoca delle grandi scoperte nel campo fisico e matematico era già trascorsa, e le nuove rivelazioni avevano, come sempre, per un rispetto dato nuove certezze, per un altro creato nuovi segreti ed enigmi. Ora, forse più da questi enigmi che da quelle certezze è derivata quella curiosità e sete di certezza che ha condotto, fra l'altro, a indagare anche i misteri della vita organica. — Ingenui dapprima, e pur fatti con tutta serietà, furono i tentativi fatti da un Droz e da un Vaucanson di riprodurre uomini e animali viventi in forma di automi. Il suonatore di flauto che muoveva tutte le dita, il fanciullo scrivente e la suonatrice di cembolo, la quale oltre che le dita muoveva anche gli occhi e si fermava non appena terminata la esecuzione del pezzo musicale, se ora ci appaiono come giuochi infantili, considerati nel loro tempo compajono sotto luce diversa, tanto

più che l'esser stato incarcerato uno di questi inventori per ordine della Inquisizione spagnuola, fa pensare che veramente si sospettasse in quegli automi quasi la origine naturale e vi si annettesse quindi la relativa importanza. Oggi il criterio è inverso; non si cerca di compendiare nell'automa meccanico, che del resto implicava ai suoi tempi il progresso della scienza meccanica e le nuove curiosità fisiologiche, tutte le manifestazioni dell'attività umana, ma si tenta di affidare a macchine speciali il compito di qualcuna delle attività umane di ordine inferiore; il che dimostra quanto siamo ormai lontani dall'idea dell'uomo macchina. — Gli avversarî del materialismo già dimostrarono facilmente che tra la coscienza e il movimento esterno è un abisso. Nondimeno alcune idee generali non potevano non ammettersi; tali erano e tali sono, p. es., l'importanza del cervello come organo principale per le funzioni dell'anima, oppure quella del nesso di singole regioni del cervello con l'attività di nervi determinati. Ma soprattutto si sentiva la mancanza di una ipotesi ammissibile o di una idea approssimativa della natura dell'attività cerebrale. Tanto è vero che da principio molti, pur competenti, ritornarono, sia pur per disperazione, alle teorie, già effettivamente state contraddette, di una localizzazione dell'attività cerebrale secondo le diverse funzioni dell'intelligenza e del sentimento. Regnavano ancora le rappresentazioni inerenti alle famose facoltà dell'anima, che poi dovevano scomparire di fronte ad idee più positive sulle funzioni del cervello. Una forma non pura delle teorie della localizzazione fu la frenologia. Gall emanò una dottrina della composizione del cervello da una serie di organi speciali per speciali attività spirituali; e ammise, dietro osservazioni di varie specie, una serie di organi originarî del cervello, il cui eminente sviluppo deve concedere all'individuo certe proprietà che rimangono, e la cui azione totale dovrebbe determinare il carattere completo dell'uomo. Egli, dietro esempli singoli, cercava proprietà determinate, quali sono

facili a riscontrarsi nei dementi, nei delinquenti, negli uomini di genio, o negli originali, e andava alla ricerca di punti spiccati in modo speciale nel cranio dell'individuo in questione. Se questo particolare si trovava, si considerava l'organo come scoperto e valevole una volta per sempre. Ma Gall e così pure Spurzheim scrivevano in un'epoca, in cui i metodi per la ricerca esatta in problemi di tal natura non erano ancora interamente sviluppati; e Giovanni Müller così ebbe a scriverne: « Was das Princip betrifft, so ist gegen dessen Möglichkeit im Allgemeinen a priori nichts einzuwenden; aber die Erfahrung zeigt, dass jene Organologie von Gall durchaus keine erfahrungsmässige Basis hat, und die Geschichte der Kopfverletzungen spricht sogar gegen die Existenz besonderer Provinzen des Gehirns für verschiedene geistige Thätigkeiten ». Castle nella sua frenologia cita vari casi di perdita di parti considerevoli della massa cerebrale, in cui le capacità intellettive non dinotavano d'aver sofferto alcun disturbo; e in un caso, in cui le lesioni erano nella parte occipitale, si vide, per l'ipotesi dei frenologi, che la energia del pensiero non rimaneva danneggiata; ma d'altra parte si trovò anche che l'individuo lesionato aveva perduto la energia e risolutezza in lui caratteristiche, mentre la parte colpita del cervello non era la sede delle capacità intellettuali, ma quella della energia animale. Si trovò anche che, mentre per i frenologi costantemente il cervelletto è considerato l'organo dell'istinto sessuale, Combette nel 1821 constatò un caso di forte istinto sessuale nella totale assenza di cervelletto; e Flourens in un gallo, a cui aveva asportato una gran parte del cervelletto, riuscì a prolungar l'esistenza per ben 8 mesi, e verificò la conservazione dell'istinto sessuale. Così si trovò che non è neppure a prendersi in senso assoluto la dottrina che pone nei lobi frontali del cervello la sede dell'intelligenza, giacchè non sempre l'esame dei cranî di uomini illustri rivelò vaste ed alte fronti: piuttosto si trovò che, anche quando un ampio cervello frontale coincide di

regola con una grande intelligenza, la dimostrazione non può in alcun modo farsi per una attività localizzata di questa parte del cervello. Difatti, mentre si vide in genere che le diverse parti del cervello hanno essenzialmente la medesima determinazione, può anche darsi che una organizzazione favorevole in modo speciale di tutto l'insieme si connetta con una forma speciale del medesimo. — La proposizione generale che il pensiero sia un'attività del cervello, può in genere esser fatta molto probabile; ma è a osservarsi che persino materialisti come Vogt e Büchner si sono trincerati in una specie di riserbo di fronte alla frenologia, e che si è andati a inseguire le cosiddette idee innate sino in fondo ai segreti di una possibile frenologia, nel senso che nel caso qui citato le idee innate emergono di necessità dalla struttura e composizione del cervello. — Dato ciò, si comprende l'importanza del conflitto tra la antica idea lockiana che fa tutto il contenuto spirituale derivare per mezzo dei sensi, e la idea secondo cui il cervello o l'anima porta con sè certe forme mediante le quali è determinata in precedenza la formazione delle impressioni sensoriali in rappresentazioni e intuizioni. Ciò che v'ha di sicuro è che vi sono condizioni materiali, che esercitano la più essenziale influenza sulla formazione di tutte le idee. Ma però, come lo stesso Büchner osserva, non è a escludersi l'ipotesi che il rapporto tra organi frenologici e impressioni esterne possa anche essere in senso inverso, in quanto all'epoca in cui il cervello cresce e si forma l'organo frenologico, esso può svilupparsi e ricevere impronta anche materiale più energica per le continue e frequenti impressioni esterne e per la incessante attività psichica in una certa direzione. A questo argomento i frenologi rispondono osservando che, per esempio, anche i muscoli sono innati, e come tali sono diversi fin dalla nascita, onde non si può negare che in circostanze eguali un muscoloso fanciullo eserciterà maggiormente i suoi muscoli che non un bimbo di muscolatura debole, e che perciò negando il

cervello innato si negano implicitamente le direzioni innate dell'attività spirituale. — In tal caso quando si parla di attività di un organo, la si pensa come quella di un intero uomo, ossia si applica alle singole parti dell'uomo l'antropomorfismo. E la frenologia, invece di scindere, per così dire, l'anima in elementi reali, la scinde in nature o esseri personali di carattere diverso, e fa una persoficazione di rappresentazioni astratte, invece di procacciare un semplice concetto del reale. In realtà si giunge all'idea del cervello per la idea dei nervi: sui nervi noi possiamo sperimentare, trovarvi conduzioni, correnti elettriche, effetti sulla contrazione muscolare, effetti di ritorno sugli organi centrali; troviamo poi i movimenti riflessi, che posson considerarsi come elemento fondamentale di ogni attività psichica. Pflüger trovò che la rana decapitata ed altri animali, in simili condizioni, ancora per lungo tempo fanno movimenti che non contraddicono al carattere della finalità. Ora, se una rana, decapitata e toccata sulla schiena con un acido, asciuga la goccia adoperando quel piede che le è più comodo per tale funzione, e se essa, non appena le si recide questo arto, dapprima fa tentativi col tronco rimasto, finchè si rivolge al piede dell'altro lato e compie con questo il movimento in questione, sembrerebbe trattarsi qui non più solamente di un movimento riflesso, e si è tentati di ammettere un'anima del midollo spinale. Ma la realtà non è questa: sta invece in ciò, che si cerca di spiegare il processo mediante processi più semplici come sono ad esempio i movimenti riflessi, e non mediante l'idea generale dell'anima. Allontanando quella personificazione, si giunge a vedere in questo sì complicato succedersi di sensazione e movimento, un principio di spiegazione delle attività psichiche più complicate, perchè per la spiegazione della vita dell'anima ci si riferisce ai processi singoli, i quali costituiscono una parte necessaria dell'andamento totale, ma differiscono dal contegno dell'organismo completo. — E qui ecco un'altra grave difficoltà. Se il movimento riflesso avviene senza co-

scienza, la coscienza non può spiegarsi mediante un'attività in tal modo costituita. La risposta scientifica a questo dubbio può tutt'al più contenere la possibilità, per l'apparecchio riflesso, di un certo sentire, per quanto debolissimo, pur rimanendo incerto se in un animale completo e sano, qualcosa di questo sentire dei centri subordinati entri chiaramente nella coscienza. Se negli animali noi ammettiamo sensazioni, concludendo per esse in seguito alle loro espressioni e manifestazioni di dolore, gioia, paura, ira, fino ad un certo punto conformi alle nostre, in animali decapitati troviamo in parte le medesime manifestazioni. Giovanni Müller, a proposito di esperienze di Flourens, ebbe a dire: « Es wird zwar ein Thier nach dem Verluste der Hemisphären des grossen Gehirns stumpfsinnig, aber gleichwohl zeigt es ganz deutliche Zeichen von Empfindung, nicht von blosser Reflexion (Reflexthätigkeit) », quantunque egli si attenga alla teoria della localizzazione, e perciò non ammetta, per esempio, che sia capace di sensazione quella parte del cervello in cui le rappresentazioni ricompaiono come ombre della sensazione, ma ammetta invece il volere e il sentire localizzati nel midollo allungato, le « Sinnesempfindungen » specialmente negli organi alla base del cervello, e il pensiero nel cervello. Müller si appoggia sull'anatomia comparata anzichè sull'anatomia patologica che ha concezioni diverse; e però da questo punto di vista si deve concedere che il graduale sviluppo degli emisferi del cervello nel mondo animale con grande probabilità decide per l'ipotesi che pone in codesto importantissimo organo il fondamento più essenziale della superiorità spirituale dell'uomo. Più recenti ricerche sul cervello hanno posto in chiaro che il cervello stesso non è l'anima e nemmeno un organo che in modo oscuro produca intelligenza e volere, ma che è piuttosto quell'organo che dà origine ai nessi più complicati di sensazione e movimento: non la volontà come tale vi è prodotta, ma vi si produce un effetto analogo ai riflessi, e però in assai più varia guisa

complesso e condizionato da disparate conduzioni provenienti da altre regioni cerebrali.

Insomma il punto di vista si è molto mutato, e le personificazioni che prima si ponevano nel cervello, sono state sostituite da tutt'altri concetti. Si è posto bene in evidenza che il cervello non produce un astratto psicologico, ma un'azione concreta che, come nel riflesso, è una conseguenza immediata dello stato cerebrale e dello stato di eccitamento che si propaga nelle diverse vie. Quindi, se oggi si asporta da un gallo una parte del cervello, non si dirà (come ebbe a dire Büchner riferendosi a Flourens) che gli si è portata via a pezzi l'anima, ma che il coltello ha distrutto un apparecchio di combinazione, che consiste di singole parti aventi importanza diversissima e determinatissima. — Importanti sono, fra l'altre, le ricerche anatomiche e le teorie di Meynert sulla costruzione del cervello, indipendentemente da vedute psicologiche, e sul decorso generale delle funzioni cerebrali in rapporto alle vie possibili dei processi fisiologici. Egli si riferisce anzitutto alla natura parte motoria e parte sensoria dei fasci nervosi del midollo spinale entranti nel cervello. Senza entrare in dettagli, noteremo solo, tra i fatti da lui messi in evidenza, che le vie nervose si complicano nel salire al cervello, e si semplificano nel discendere, che i luoghi di questa complicazione sono organi della sostanza grigia, in cui avviene una complicata connessione di vie conduttrici; che la sostanza grigia si scinde in tre ordini subordinati; che le fibre di direzione o conduzione, che costituiscono la sostanza bianca, sono ordinate nei due sistemi di associazione e di proiezione, cioè in parte connettono diverse regioni del cervello tra di loro, e in parte mettono in comunicazione il cervello col mondo esterno. La sostanza grigia di terzo ordine produce i riflessi; e questi posson esser inibiti da certi punti della sostanza grigia di secondo ordine, i quali alla lor volta sono almeno in parte di natura riflessa per quanto più complessa e diretta ad uno scopo vitale, e

possono essi pure venir inibiti e modificati per influenza del terzo e più alto ordine, il cervello. Qui entra la volontà conscia, ma in fondo si tratta ancora, fisiologicamente parlando, di un ordine altissimo di riflessi, di un apparecchio immensamente più vario e sviluppato. Il sistema di proiezione ha una doppia via. Può sembrar strano che a un più alto sviluppo di una via motoria vada parallelo l'aumento degli emisferi, fino a raggiungere il suo maximum nell'uomo; e difatti dovrebbe attendersi piuttosto un relativo superiore sviluppo delle vie sensorie insieme con lo sviluppo crescente della vita spirituale nell'uomo. Ma occorre pensare che per questa vita spirituale hanno grande importanza il linguaggio, il maneggio, ecc. Sono noti i distretti corticali, in cui i suoni si combinano in parole significative, ed è nota fra i fenomeni di disturbo psichico l'afasia: onde risulta che, tanto per il linguaggio quanto per l'abilità manuale, si richiedono non già soltanto forza e velocità di movimento, ma ancora varietà, finalità, e quindi un esteso apparecchio di coordinazione con connessioni, che da ciascun punto di un dato sistema decorrono ad una molteplicità di punti di altri sistemi. Così nel linguaggio sono compresi non soltanto i movimenti degli organi, ma la significazione loro, e per questo dai luoghi di combinazione di una parola devon decorrere diverse congiunzioni dirette ai luoghi di combinazione delle impressioni sensoriali. Quanto alla mano dell'uomo, bisogna pensare non solo alla importanza della sua mobilità e adoperabilità nelle più ingegnose funzioni in rapporto ai distretti corticali motorii, ma ancora alla scrittura, che è in rapporto così stretto col linguaggio, e inoltre alle funzioni del suonatore di pianoforte e d'altri strumenti, del pittore, del chirurgo, ecc. Onde si comprende l'ampliamento dell'apparecchio corticale motore, in ordine a cui è pur grande l'importanza dei movimenti oculari. In generale nell'esercizio dei sensi entra in gran parte in scena l'apparecchio motore, come si vede dal fatto che nella vista concorre

l'attività dei muscoli oculari, nel tatto il senso muscolare della mano, e negli stessi movimenti del corpo quella varietà e molteplicità e finezza, che manifestano una superiorità dell'uomo nel mondo animale: esempi la danza, la mimica, il passo, lo star diritto, il libero movimento delle braccia, e in genere tutta la espressione ritmica della vita spirituale. Tutto questo fa pensare che già tra le sensazioni, quelle muscolari nell'uomo siano forse tra le più importanti.

La fisiologia ha concorso assai ad istruirci su questo proposito. Essa ci insegnò che in tutti i nervi in stato di eccitamento i processi sono essenzialmente i medesimi. Non vi è un processo speciale per la sensazione e un altro per il movimento; la distinzione può soltanto farsi in base alla forza o debolezza, velocità o lentezza, ecc.; e così la distinzione tra centrifugo e centripeto ha valore in quanto la direzione centrifuga è priva di effetto nelle fibre sensorie e la centripeta lo è per le motrici. Una conduzione che si estende in molteplici direzioni raggiunge la sua effettività soltanto in una sola di queste. Le ricerche di Hitzig e Nothnagel in Germania, e di Ferrier in Inghilterra hanno mostrato che la corteccia dei globi anteriori del cervello ha influenza su movimenti determinati. Nothnagel afferma che, nel caso in cui un disturbo di movimento viene dopo un certo tempo abolito, pure essendosi prima determinato parallelamente un disturbo in una data parte della corteccia cerebrale, deve trattarsi di una paralisi parziale del senso muscolare, e che la lesione concerne non propriamente l'ultimo centro, la vera stazione terminale, ma soltanto una stazione situata lungo la strada, onde possono aprirsi altre vie per la esplicazione della medesima funzione. « Die restitutio in integrum nöthigt zu dem Schluss, dass hier nur eine Bahn unterbrochen ist, dass nicht die Hirnpartie eliminirt sein kann, wo allein der Willensimpuls auf die Nervenfasern übergeht, beziehungsweise wo allein die Bildung der Willenserregung Platz hat. Wenn eine Wiederher-

stellung möglich ist, so müssen andere Bahnen vicariierend eintreten, oder so muss wenigstens die Fähigkeit den Willensimpuls zu erzeugen, auch noch anderen Stellen inhärieren ». Con ciò rimase però in quelle ricerche incerto se la graduale restituzione delle funzioni si operi mediante il concorso dell'altro emisfero oppure per l'origine di nuove vie nel medesimo emisfero: tanto che lo stesso scienziato ebbe a dire che, ove fosse proprio possibile che un dato circoscritto distretto, in cui si compiono funzioni psichiche, dopo esser stato eliminato, venisse sostituito da un altro, si dovrebbe concludere che non si dà una rigorosa localizzazione delle funzioni spirituali in determinati centri della corteccia cerebrale. — Restava a vedere se la sostituzione riguardasse posizioni di passaggio e di trasmissione, oppure organi speciali di origine di una funzione. E qui nasceva una specie di dualismo. Non potendosi ben ammettere nell'ordine spirituale dei processi, una influenza fisiologica, si ricorse a quello stretto criterio fisiologico, secondo cui anche nella produzione di un impulso volitivo conscio si vede un processo organico non diverso dagli altri e nella « facoltà » della vecchia psicologia soltanto la espressione della possibilità del processo; perchè, se così non fosse, non si comprenderebbe come anche la stazione terminale di una via psichica o il punto d'origine di una funzione non possa al pari di ogni altra parte del cervello venir sostituita da altre vie nella sua speciale attività. — Un altro punto controverso era la soppressione dell'impulso volitivo a muovere una data parte del corpo, pur perdurando il dominio della volontà sulle altre parti: il che conduce a pensare la volontà non come qualcosa di unico ma come una somma di funzioni particolari. Quando si parla di unità della volontà, la si intende nel senso formale; questa unità formale conviene anche alla somma delle singole manifestazioni vitali, e nondimeno rimane sempre una espressione riassuntiva, che noi applichiamo ad un gruppo speciale di fenomeni vitali. Ora si capisce che, anche nel caso in cui una fun-

zione cerebrale venga ripristinata per l'intervento dell'altro emisfero, l'impulso volitivo si propaga da un punto diverso da quello di prima; e, siccome appunto questo impulso volitivo è un nome che designa una somma di funzioni avente un determinato effetto esterno, così, essendo le funzioni elementari delle singole cellule e fibre localizzate in modo rigoroso, è presumibile che in tal caso il medesimo effetto esterno si raggiunga per altra via, e che quindi l'impulso volitivo in questione non sia più quello stesso che fu distrutto, ma il medesimo prodotto ottenuto con altri fattori. Per tal modo riesce agevole pensare che la partecipazione di diverse provincie del cervello al pensiero sia già nell'uomo sano assai diversa, mentre il pensiero, che ne è il risultato, rimane il medesimo. — Oltre a questo modo di vedere, secondo il quale la teoria delle localizzazioni delle funzioni viene in parte modificata, si formò una concezione, per la quale si ammettono reali processi spirituali semplici corrispondenti a funzioni di semplicissime parti del cervello, e si scinde il processo psichico in elementi più fini: ma la finezza delle funzioni psichiche non è in alcun modo accessibile ad alcuno sperimento fisiologico, giacchè implica la intensità sottilmente determinata di ciascun eccitamento, e la composizione di diverse attività muscolari per un totale movimento finale. Secondo questo criterio, ciò che è spirituale è riposto nella misura, nella forma, nel rapporto di cooperazione delle funzioni psichiche. Ferrier trattò della origine dei movimenti finali, che attribuì all'eccitamento di una determinata parte del cervello: sussisterebbe un meccanismo di coordinazione riunente in una attività finale ogni gruppo di azioni elementari; e si potrebbe anche ammettere che la rappresentazione di questa attività finale e la volontà di promuoverla abbiano nessuna altra sede all'infuori di quella parte del cervello, nella quale essa attività ha origine. Così nel caso del linguaggio non è improbabile che la rappresentazione della parola abbia la sua sede là ove

questa ha origine. Il nostro pensiero è un linguaggio interiore, e spesso con certa vivacità noi lo accompagniamo con impulsi reali; e se pure ciò è effetto di associazione, non dobbiamo disconoscere per un lato il sussistere di un sistema di svariatissime conduzioni, e d'altra parte anche la parziale identità dei campi di eccitamento, nel nostro caso importantissima. — Hitzig cita una espressione di Fechner, secondo cui la stabilità, fecondità, e profondità di una opinione generale, non si connette col generale ma coll'elementare. In certo senso si è giunti poi a riconoscere che ciò che è elementare nelle funzioni psichiche non può esser altro che un elementare fisiologicamente. Lo stesso Wundt nella sua opera fondamentale di psicologia fisiologica dice: « Wir können uns vorstellen, dass eine bestimmte Nervenfasern oder eine bestimmte Ganglienzelle nur in der Form der Lichtempfindung oder des motorischen Impulses functionire, nicht aber, wie etwa gewisse centrale Elemente der Phantasie, andere dem Verstande dienen sollen. Augenscheinlich liegt hier der Widerspruch darin, dass man sich complexe Functionen an einfache Gebilde gebunden denkt. Wir müssen aber nothwendig annehmen, dass elementare Gebilde auch nur elementarer Leistungen fähig sind. Solche elementare Leistungen sind nun im Gebiet der centralen Functionen Empfindungen, Bewegungsanstösse, nicht Phantasie, Gedächtniss u. s. f. ». Onde ciò che diciamo intelligenza e volontà, se viene seguito retrocedendo sino ai suoi fenomeni fisiologici elementari, si risolve in una trasposizione di impressioni sensoriali in movimenti. Tutto ciò fa naturalmente ritornare al pensiero sopra espresso, che l'unità, e così l'unità del pensiero, è formale: il che riconduce alle sorgenti filosofiche e al formalismo kantiano. In fondo, la fisiologia del cervello, nonostante i grandi progressi, a questo punto si arresta quasi a dimostrare l'infinità del problema.

Anche sotto questo riguardo, adunque, la scienza moderna ci conduce per varia via infaccia all'infinito, nel

senso che oltrepassa confini già consacrati dalle abitudini e dalla familiarità; ma, mentre schiude nuovi orizzonti, fa comprendere che non solo i risultati, ma le difficoltà si moltiplicano. In fondo, la difficoltà rimane la medesima: sia che la si esprima nel semplice dualismo di spirito e materia, anima e corpo, sia che la si celi nei rapporti oscuri tra fenomeni meno elementari nel cervello e le attività finali dello spirito, essa appare come un rapporto provvisorio tra entità inconciliabili, e quindi come una insolubilità per il pensiero, sebbene non escluda la ricerca di un più profondo rapporto conciliativo o addirittura risolutivo, e appunto per questo promuova di necessità l'infinita continuazione del progresso nel pensiero. Apparentemente il riferimento di una funzione all'azione concomitante di infiniti fattori, può sembrare una soluzione, in quanto estende i confini della causalità pensabile e li stabilisce in un remoto, ove essi non possono più per noi esser sorpassati; ma in sostanza o li mantiene in altro modo o li aumenta in infinito. D'altra parte si mantiene costante, sebbene espresso in diversa forma, il punto capitale controverso, finchè esso è posto in modo determinato per via empirica e razionale: così, per esempio, può dirsi che o si guarda ai sintomi o si guarda alla cosa in sè stessa. Ciò che è vero, è che i sintomi sono una condizione necessaria; ma, ammesso uno stato soggettivo e il valore spirituale del contenuto della sensazione, non si giungerà a far del pensiero un prodotto speciale accanto ai processi materiali, bensì ci si limiterà ad ammettere che lo stato soggettivo dell'individuo senziente è nello stesso tempo, per la osservazione esterna (ossia per un altro punto di vista), un movimento oggettivo molecolare. In realtà nella sensazione, oltre ed accanto ai processi nervosi, difficilmente è a cercarsi qualche cos'altro; nondimeno questi stessi processi hanno anche un tutt'altro modo di manifestarsi, cioè quel modo che noi diciamo sensazione. Tutt'al più si potrà sperare di determinare

esattamente la parte di fenomeni fisici, che coincide nel tempo con l'origine di una sensazione dell'individuo, e in questo senso si potrà designare questa determinata porzione dell'ambito dei processi nervosi « sensazione »; ma non potrà andare al di là di questa designazione arbitraria e provvisoria la determinazione esatta dei rapporti tra processo soggettivo di sensazione e processo nervoso oggettivamente osservato. Certamente non si può del tutto separare il valore spirituale di un contenuto di sensazione dal fenomeno fisico. Ma i rapporti non devono stabilirsi in modo assoluto ed irrevocabile, tanto più che in tal caso lascierebbero supporre assoluti i termini, mentre p. es. è evidente che, se si considerano le sensazioni muscolari dell'occhio, si ha a che fare non con la massa assoluta del movimento, ma coi più fini rapporti numerici tra i singoli impulsi al movimento, ecc. Il concorso di innumerevoli e debolissimi impulsi nervosi ci può dar la chiave per la intelligenza fisiologica del pensiero; ma la caratteristica di questa cooperazione è la forma sotto cui soggettivamente si presenta, e inesplicito rimane il modo come il processo naturale sia nello stesso tempo un fatto interno del soggetto pensante. — Ora, dati questi problemi e il modo con cui vennero posti, si comprende come essi costituissero argomento, più che dell'anatomia e della fisiologia del cervello, di una psicologia scientifica sulla base delle scienze della natura, pure lasciando da banda quella psicologia matematica, che con Herbart poneva le equazioni differenziali pel mondo delle rappresentazioni.

D'altra parte, necessariamente lo sviluppo psicologico ci riconduce allo sviluppo sopra accennato del pensiero filosofico totale, essendo appunto una tale psicologia quasi una scienza necessaria tra la speculazione filosofica e la fisiologia più elevata. Per gli scolastici essa era determinata e chiara. L'essenza dell'anima era « a priori » ammessa, e fu persino posta come caposaldo delle ricerche naturali. Lo stesso Herbart intese trovare il principio per

una statica e una meccanica delle rappresentazioni, mediante la speculazione. Se non che merito della psicologia matematica è di aver dimostrato la regolarità di tutto il fatto psichico e di aver combattuto il ritorno alla materia; e suo difetto l'aver riposta l'essenza dell'attività spirituale in un ritorno ad una influenza esteriore, e nell'anima semplice e invariabile anzichè nei rapporti reciproci tra i singoli reali, analogamente come nelle forze fisiche tra gli atomi. Dalla scuola di Herbart uscirono tendenze a fondare una vera psicologia scientifica. Waitz respinse la psicologia matematica. Ma sorsero difficoltà enormi, e anzitutto la questione della convenienza di insistere sulla natura dell'anima, giacchè, si disse, la psicologia è appunto la dottrina dell'anima; e nessuna scienza è pensabile, la quale ci lasci nel dubbio che essa non abbia un oggetto. — D'altra parte, rispetto al procedimento, vi è questione intorno alla famosa auto-osservazione, all'introspezione. Kant già aveva detto che esser osservatori di sè stessi è un comporre metodicamente le percezioni fatte in sè stessi, in modo da dar materia ad un diario dell'osservatore di sè medesimo, ma da poter persino condurre a fanatismo e demenza; e perciò non fondò la sua psicologia empirica sulla introspezione, ma sulla osservazione degli altri, sebbene nella sua « Critica della ragion pura » abbia fatto un posto speciale al senso interno. Ma con « interno » e « esterno » non si può da principio risolvere nulla, giacchè rappresentazioni fuori di noi non possono darsi, a meno che ciò si intenda nel senso della localizzazione loro. Ciò che importava e importa è la eliminazione, nel procedimento esatto della ricerca, delle influenze di opinioni e tendenze preconcepite, con la qualcosa s'intende anche che deve evitarsi che pel tramite della introspezione si introducano arbitrarie concezioni metafisiche sotto l'apparenza di una derivazione empirica. Perciò con pieno diritto la nuova psicologia ha applicato i rigorosi metodi di osservazione, che diedero sì buona prova nelle scienze naturali. In questo senso, seb-

bene con premesse metafisiche, il Lotze scrisse la sua « Psicologia medica » (1852), Fichte il giovane si raccomandò ai naturalisti e ai medici con la sua « Antropologia » (1856), e persino alcuni seguaci della filosofia hegeliana si accostarono ad una maniera naturalistica di considerar la psicologia. George scrisse un libriccino sui 5 sensi, Schaller nel combattere il materialismo si trovò condotto sin entro il campo della fisiologia. Cominciò a farsi strada il concetto che la concordia che regna nell'ambito delle scienze naturali non dipende dall'esser queste scienze limitate a un campo solo, ma piuttosto dall'applicazione di un metodo, che, soprattutto, fra le varie sue misure di prudenza, include la neutralizzata influenza dello soggettività dell'osservatore. Ma vari fattori concorsero a render applicabile alla psicologia il metodo delle scienze naturali. Non solo giovarono a questo proposito la fisiologia del sistema nervoso e i fatti relativi alle sensazioni, ma ancora la ricerca intorno all'azione e al discorso umano, alla natura e al carattere dell'uomo, e in gran parte la psicologia degli animali, la quale non può esser condotta con la sola osservazione poggiata sul cosiddetto senso interno. Difatti in questo campo la osservazione esterna ci presenta soprattutto dei movimenti, delle azioni, degli atteggiamenti, la cui interpretazione facilmente può sottostare all'errore, e quindi richiede di necessità un procedimento esatto, che può attuarsi in quanto è agevole sottoporre l'animale allo sperimento. Per tal modo si rende il metodo innocuo, se non si allontana totalmente la fonte dell'errore. La ripetizione, poi, degli sperimenti permette di rettificare sempre meglio l'influenza, che sulla interpretazione dei fatti può esercitare il pregiudizio personale, che non può esulare dalla introspezione. Quest'ultima, se da un lato è importantissima quando è un sussidio allo studio di noi stessi, perchè è allora la più immediata certezza, non è più così giovevole quando si tratta di determinare fatti, che avvengono fuori di noi, ai quali non dobbiamo sovrapporre i nostri pre-

concetti, ma a cui anzi noi dobbiamo adattarci; e del resto in un caso e nell'altro essa giova per un apprezzamento di confronto e di valore, ma corre pericolo di cogliere non il fatto a cui si rivolge, bensì piuttosto uno stato d'animo che è già introspezione o una preparazione ad essa, ed è quindi eminentemente soggettiva. La psicologia degli animali richiede necessariamente una prevalenza dell'osservazione esterna; e, se non può aversi ora un sistema psicologico completo a tale riguardo, possediamo però moltissime osservazioni raccolte, l'estendersi dei giardini zoologici, anatomia e zoologia comparate, ecc. Importante si presenta la questione dell'osservazione degli animali inferiori in rapporto alle loro percezioni sensoriali, e quindi quella più generale del rapporto tra soggetto e oggetto. Moleschott già aveva mostrato che si danno animalletti dotati di un occhio, che ha soltanto la cornea, e che quindi deve ricevere degli oggetti immagini ben diverse da quelle che può avere, p. e., il ragno, il quale possiede anche la lente e il corpo vitreo. E qui di nuovo un grave problema si affaccia: se cioè il mondo esterno riceva la sua forma dal soggetto percipiente, oppure se attraverso l'intera varietà del mondo animale non si diano sostanzialmente altre sensazioni che le nostre.

Un impulso grande alla nuova psicologia venne anche dalle ricerche sui neonati, che ci conducono, per così dire, all'origine della coscienza. Queste ricerche, se non altro, lasciano emergere che dal puro movimento riflesso sino all'attività finale conscia ha luogo un inosservabile trapasso per il quale gli inizi di quella attività superiore e complessa si ritrovano già prima della nascita.

Un altro campo di ricerche importantissimo è quello della psicologia dei popoli. La linguistica ha portato lo studio del linguaggio nell'ambito strettamente scientifico, come dimostrano l'opera di W. v. Humboldt, la grammatica sanscrita e la grammatica comparata del Bopp, gli scritti di Steinthal, ecc., sino all'opera colossale di W.

Wundt, che studia anche il mito ed il costume. I viaggi scientifici in certa misura diedero qualche incremento all'etnografia, all'antropologia, alla paleontologia (V. Lubbock, Tylor, ecc.). Così pure Darwin ha raccolto un gran materiale per la intelligenza psicologica della specie umana, specialmente con la sua opera sulla espressione dei moti dell'animo. I sintomi somatici eran già stati posti in rilievo da Cartesio nel suo scritto sui movimenti dell'animo, sebbene egli vi annettesse l'idea che l'anima pensa la stessa cosa, che essa percepisce nel cervello come processo corporeo. Venne Domrich, il quale studiò più a fondo i fenomeni corporei, da cui sono accompagnati gli stati psichici. Quanto alla questione come la coscienza dei nostri propri moti dell'animo sia condizionata e provocata dalla sensazione delle loro proprie reazioni, può dirsi che una tal coscienza è analoga a quella dei movimenti del nostro corpo: la si ha immediatamente, ma però alla completa chiarezza del processo noi giungiamo soltanto mediante le sensazioni provocate dal movimento. Nel linguaggio i sintomi corporei sono intimamente congiunti con le espressioni dei moti dell'animo. Quindi si rende necessario lo studio loro nella ricerca psicologica. Naturalmente non si deve giungere al punto di considerare i processi corporei come l'ultimo principio di ciò che è psichico, o come la sola cosa presente, e neppure di lasciarli completamente da parte, considerando il fatto psichico senza fondamento fisiologico; ma si deve piuttosto dare una base sperimentale, oltre che teoretica, alla vicenda delle rappresentazioni. Drobisch ha riferito le diverse attitudini dei poeti a rapporti numerici determinati, senza con ciò considerare particolarmente il cervello e i nervi. I fatti trovati empiricamente e le leggi empiriche, hanno i loro diritti anche senza che si riconducano al principio dei fenomeni; altrimenti si dovrebbe ritenere non sufficientemente esplicativa la fisiologia del sistema nervoso, per il fatto che essa non può ancora esser ricondotta alla meccanica degli atomi, ammesso anche che

questa possa valere come principio di spiegazione dei fenomeni naturali. — Dugald Stewart e Thomas Brown in Inghilterra diedero una psicologia dell'associazione. Spencer e Bain ebbero in considerazione la nuova anatomia e la fisiologia, e cercarono di porre in accordo la psicologia dell'associazione con le nostre conoscenze del sistema nervoso e sue funzioni. Ma anche esplicando con la teoria associativa la vicenda e gli scambi delle rappresentazioni, si presenta il problema se ivi si dia o non si dia una causalità diretta ed immanente, cioè una causalità che esclude estranei nessi interposti.

Per Cartesio anche quelle rappresentazioni, che corrispondono ad una nuova impressione sensoriale, sono prodotte dallo spirito stesso, giacchè, come è noto, Cartesio pone il contenuto rappresentativo dell'anima come un mondo a sè, separato da quello dei corpi. Leibniz pure annette al mondo dei corpi lo stretto meccanismo, che però non è applicabile al mondo della rappresentazione, in cui nulla può esser misurato e pesato; così, mentre Cartesio non ci dà una risposta sicura intorno alla causalità in questo mondo rappresentativo, Leibniz la colloca nel rapporto tra la monade e l'universo, nell'armonia prestabilita. Ora la monade non ha finestre, egli dice, e nondimeno ciò che in essa accade non è regolato da un principio immanente, ma dal rapporto suo col mondo, rapporto accessibile però soltanto alla speculazione e non all'osservazione; con che viene resa impossibile una psicologia empirica e la teoria dell'associazione. Secondo quest'ultima, le percezioni sensoriali provengono dal di fuori, senza che più oltre si indaghi come ciò sia possibile; ed entrando nel mondo delle rappresentazioni, si comportano come fattori nuovi che ne modificano lo stato, e però si assoggettano, dacchè vi sono entrate, alle leggi associative. Il che fa ripensare al tradizionale materialismo inglese di Hartley e Priestley. Stuart Mill si rivolge contro Comte, che negava per gli stati spirituali la immanenza della legge, e solo vi sostituiva l'a-

zione degli stati dei corpi e la uniformità nella successione dei fenomeni, considerando questa come derivata e non originaria, e facendo della psicologia solo una parte della fisiologia. Stuart Mill adunque si oppose a questo modo di vedere, in quanto lascia le percezioni sensoriali alla fisiologia, e gli altri processi psichici raccoglie entro la psicologia dell'associazione. Spencer, che pure ammette sino al limite dell'inconoscibile il materialismo del fenomeno, va oltre il pensiero di Comte quando sostiene che la psicologia è una scienza tutta speciale e del tutto indipendente da ogni altro campo; difatti, egli dice, la cosa psichica ci è data immediatamente, mentre la cosa fisica è soltanto presupposta e, in certo senso, si lascia risolvere nella psichica. Ora, poichè per esempio, colore e suono sono, così come appaiono immediatamente al nostro spirito, dati prima che non la teoria della loro origine da vibrazioni e processi cerebrali, si comprende che il campo dei fenomeni psichici è indipendente, e tale è pure la psicologia. A. Bain dice che il corpo, oggettivamente considerato, è la stessa cosa che soggettivamente, cioè, nella immediata coscienza dell'individuo, è anima. Con questo concetto, se da una parte egli si ricollega a Spinoza, e anche a Kant, che però vi annetteva solo il valore di una congettura, d'altra parte egli si lascia condurre ad ammettere un completo parallelismo tra attività spirituale e attività nervosa, e ad attribuire a ciascun stimolo nervoso un equivalente di sensazione. Egli sostiene la relatività, il cambiamento nello stato di eccitamento, sino a giungere ad una sensazione cosciente; inoltre un medesimo stimolo nervoso può dar luogo una volta ad una sensazione molto viva e un'altra volta a nessuna sensazione. Per tal modo è evidente che si affaccia la questione della possibilità di rappresentazioni inconscie, le quali, secondo le leggi della associazione, vengono introdotte nel decorso delle rappresentazioni, sebbene esse non siano propriamente alcuna rappresentazione, ma piuttosto soltanto funzioni cerebrali della stessa specie di quelle che si ricollegano alla coscienza.

Accanto a queste concezioni scientifiche della psicologia, che ebbero poi grande sviluppo, sia per opera di coloro che si attennero al parallelismo psico-fisico, che di quelli che credettero di aver trovato il nesso causale o il ponte di passaggio tra le due serie di fenomeni naturali e spirituali (concezioni che ci riconducono al problema generale filosofico sopra ricordato, e che dimostrano la cresciuta affinità e reciprocità tra discipline diverse), si ebbero i progressi della psicologia scientifica in rami speciali, o in direzioni affini, come nella statistica antropologica, specialmente in quella morale, che già Kant designava come antropologia pragmatica, in rapporto all'uomo considerato come essere liberamente agente. Quételet cerca di porre in salvo la libertà del volere, accanto alla generale regolarità e uniformità: cioè dà alla libera volontà, entro il grande ambito della legalità regolare, il valore di causa accidentale, il cui effetto ora positivo ora negativo viene neutralizzato poi da leggi generali. In Germania, A. Wagner (1864) trattò della legalità e delle azioni umane apparentemente volontarie. La contraddizione tra libertà e necessità fu meno acuta in quegli spiriti che si rappresentavano natura e spirito raccolti in unità. Già Kant aveva trattato il problema della libertà del volere. Tra la libertà come forma della coscienza soggettiva e la necessità come fatto di ricerca oggettiva, non può sussistere contraddizione. Da Kant in poi la limitazione e condizionalità empirica e la rigorosa causalità di tutte le azioni umane sono cosa sicura e nota; e nondimeno rimane integro, di fronte al fatalismo materialistico, il significato della libertà, specialmente per il campo morale. Non è più però solo il caso di dire che la coscienza della libertà è una realtà; ma ancora che, insieme con la coscienza della libertà e della responsabilità, ha importanza il decorso rappresentativo corrispondente, in quanto comprende quelle rappresentazioni, nelle quali noi abbiamo immediatamente coscienza di un tentativo, di un impulso, di un eccitamento naturale a questa o a quel-

l'altra azione. Buckle si riconnette a Kant; ma, mentre ammette la necessità empirica delle azioni umane, respinge la dottrina trascendentale della libertà.

Importante è inoltre, in questo progresso moderno di idee, il fenomeno della evoluzione morale. In tempi, in cui moltiplicansi le esigenze del movimento industriale, letterario, politico, e la vita giornaliera di per sè riesce a svegliare assai più rappresentazioni, fatti, decisioni, dubbî e pensieri, rendendo quindi più intensa la vicenda della felicità e della sventura, sia del singolo che della generalità, si produce maggiore diversità tra gli individui, e l'individuo stesso è esposto ad un più forte scambio di influenze. Ora, poichè nel rapporto morale una tale evoluzione provoca tanto effetti straordinari di abnegazione e di disinteressata carità del prossimo, o di una lotta eroica per il bene di tutti, quanto anche fenomeni di cupidigia, di egoismo e di passioni sfrenate, così è lecito pensare nel campo morale ciò che può pensarsi per quello teoretico; una specie di equilibrio costante, un punto o centro di gravità morale per le azioni umane, dal quale gli atti singoli derivino, dirigendosi ora in senso buono ora in senso malvagio, oppure anche nel senso di una eccentricità indifferente. Rimanendo un tal centro di gravità costante, si capisce che in popolazioni meno evolute tutte le azioni si raggruppino più presso il centro stesso, e che le eccentricità più notevoli siano tanto più rare quanto anche più malvagie. Ma poichè la legge, crescendo la varietà delle azioni, non può comprenderle tutte, ma solo in certe direzioni pone dei limiti all'egoismo e alle passioni, al di là dei quali comincia la persecuzione e la punizione, così è naturale che una popolazione di più alto sviluppo evolutivo, rimanendo costante il centro di gravità etica, dia un maggior numero di azioni immorali, sia per il maggior numero di singoli e rilevanti atti di volere riuniti in una sola persona, sia anche per la maggiore eccentricità di posizione degli individui, tanto nel senso buono che nel cattivo, e quindi per il loro sfuggire alla notificazione.

Anche per questo rispetto, adunque, non solo vediamo mutati i punti di vista che prima erano esclusivi, ma se ne creano dei nuovi in scienze vecchie e in rami nuovi di scienza. Ora, se noi badiamo, la psicologia stessa, come per un lato non può staccarsi dalla fisiologia del cervello e dalle scienze biologiche in genere, e neppure dalle scienze tutte del mondo organico fino a quelle dell' inorganico (anche queste distinzioni non possono avere in fondo che un valore provvisorio, sebben necessario) fino alla cosmologia, d'altra parte, come vedemmo, essa, come tale, dev'essere scienza indipendente per il suo punto di vista speciale della esperienza immediata. Per questo ci sembra di vedere ingrandito, ma non essenzialmente mutato nel processo progressivo entro le singole scienze, quel fenomeno generale, che potremmo dir di flusso e riflusso di ciascuna disciplina rispetto alle discipline contigue. Mutano i punti di vista per una totale complessiva visione di tutto l'eterno problema dello scibile, ma non mutano le condizioni fondamentali.

E, poichè fu detto più sopra che la psicologia moderna ha bisogno di fondamenti fisiologici, e si vale anche di osservazione e di sperimento, analogamente alle scienze della natura, è opportuno notare che, se in ciò è una condizione parziale e di metodo per lo sviluppo del sapere psicologico, costituendo questo fatto quasi il ponte tra psicologia e scienze naturali, d'altra parte quei fondamenti non cessano di essere una condizione totale per un'altra scienza, la quale per tal modo viene anche a individuarsi, tagliando quel ponte di congiunzione con scienze affini e sussistendo di propria vita. Ciò che intimamente connette queste scienze affini è il comune incremento del sapere e dello spirito scientifico che si propaga continuamente in tutte.

La fisiologia ha fatto passi da gigante, specialmente in quel ramo che contribuisce ad elevarla verso i confini delle scienze dello spirito, la fisiologia degli organi di senso. Difatti quest'ultima esce dal concetto del puro prodotto di

processi meccanici, e sottopone alle medesime necessità naturali anche le rappresentazioni in noi provocate. Così essa giunge sino a risollevar la questione della cosa in sè e del mondo fenomenico, ed è quindi come una continuazione del pensiero kantiano. Helmholtz si è servito delle intuizioni kantiane come di un principio euristico, ed ha cercato di avvicinare al valore intellettuale il meccanismo dell'attività sensoriale. Note sono le scoperte dell'acustica, il riferimento delle vocali all'azione concomitante degli « Obertöne », e l'organo di Corti; in altro campo lo stereoscopio ci scompone la sensazione del corporeo nella cooperazione di due sensazioni di immagini superficiali. Altri gruppi di sensazioni contengono pure delle sensazioni composte. Sensazioni di colore, la grandezza e il movimento di un oggetto, una semplice linea retta, non hanno le lor condizioni esclusivamente nell'oggetto dato e immutabile, ma ancora nel rapporto delle sensazioni tra di loro, decisivo anche per la qualità di ciascuna, e nel rapporto con condizioni date nell'apparecchio sensoriale e in tutto il mondo di reazione del soggetto allo stimolo. In fondo, lo stesso meccanismo che ci dà le nostre sensazioni produce anche la nostra rappresentazione. Già al tempo di Kant era generale la conoscenza della dipendenza del nostro mondo dai nostri organi. D'Alembert dubitava recisamente della riconoscibilità degli oggetti veri, e Lichtenberg, che pure contraddisse il pensiero di Kant, affermò essere una contraddizione conoscere oggetti esterni, giacchè è impossibile per l'uomo uscir di sè stesso. Una nuova luce venne al problema della esistenza degli oggetti esterni, dalla teoria della trasposizione o meglio del riferimento degli oggetti all'esterno, in rapporto al problema del veder gli oggetti diritti e non capovolti. Giovanni Müller mostrò che l'immagine del proprio corpo è guardata sotto gli stessi rapporti delle immagini degli oggetti esterni. Ma allora nacque l'idea che il corpo, così com'è, non sia altro che un'immagine ottica. A questo proposito lo stesso Müller, nella sua famosa « Physiologie des Gesichtssinnes »

prima, e poi nell' « Handbuch der Physiologie » (II Bd., 1840), dopo aver limitata la questione a esaminare se le immagini ottiche, le quali sono capovolte sulla retina rispetto agli oggetti, si vedono effettivamente capovolte come sono, oppure se si vedono diritte come negli oggetti, dice che, quand' anche noi vedessimo tali immagini capovolte, non ne avremmo mai coscienza se non mediante ricerche ottiche, e che, se tutto è veduto capovolto, l'ordine degli oggetti non vien disturbato in nessun modo. « Es ist, wie mit der täglichen Umkehrung der Gegenstände mit der ganzen Erde, die man nur erkennt, wenn man den Stand der Gestirne beobachtet, und doch ist es gewiss, dass innerhalb 24 Stunden Etwas in Verhältniss zu den Gestirnen oben ist, was früher unten war. Daher findet beim Sehen auch keine Disharmonie zwischen Verkehrtsehen und Geradefühlen statt; denn es wird eben Alles, und auch die Theile unsres Körpers verkehrt gesehen und Alles behält seine relative Lage. Auch das Bild unserer tastenden Hand kehrt sich um. Wir nennen daher die Gegenstände aufrecht, wie wir sie eben sehen. Eine blosse Umkehrung der Seiten im Spiegel, wo die rechte Hand den linken Theil des Bildes einnimmt, wird schon kaum bemerkt und unsere Gefühle treten, wenn wir nach dem Spiegelbilde unsre Bewegungen reguliren, wenig in Widerspruch mit dem was wir sehen. Z. B. wenn wir nach dem Spiegelbilde eine Schleife an der Halsbinde machen ».

Si capisce, da questo magistrale passo del Müller, che nulla ci potrebbe far accorti del capovolgimento delle immagini, poichè nulla vi sarebbe che non fosse capovolto; ma, mentre nello specchio l'inversione è solo per i lati ed è quindi avvertibile per rimaner costanti molte altre condizioni, nel primo caso (nel veder capovolto) non si ha alcun altro termine di confronto all'infuori dell'argomento che è origine della disputa, ossia della legge ottica, secondo cui sulla retina la immagine è invertita rispetto alla visione costante degli oggetti esterni localizzati; onde è probabile, secondo tal criterio, che, ove noi potessimo confrontare spesso

e direttamente le nostre immagini retiniche con gli oggetti, ma in modo da veder più immagini e meno oggetti, noi credemmo capovolti gli oggetti e non le immagini. Il vedere dritttamente non è in fondo un problema, giacchè anche la immagine del nostro stesso corpo cade sotto gli stessi rapporti di tutte le altre immagini; e il nostro corpo stesso essendo esso pure un mondo esterno rispetto alla nostra rappresentazione, non sembra esatto parlare di una proiezione delle immagini all'esterno, perchè allora si dovrebbe ammettere una rappresentazione delle immagini sul posto della retina rappresentata, e più precisamente si tratterebbe di oggetti esterni rappresentati all'infuori del capo rappresentato allo stesso modo, e così via. E quando si parla, come fa lo stesso Müller (oltre che nel capitolo « *Verkehrsehen und Geradesehen* », anche nell'altro seguente « *Richtung des Sehens* »), della rappresentazione visiva come di una dislocazione di tutto il campo visivo della retina pensata verso il davanti, si tratta pur anche della rappresentazione astratta di una retina scambiata con la retina reale. E la questione a questo punto si allarga, in quanto comprende i rapporti di soggetto e oggetto, giacchè ancora, per il Müller, il riferimento del veduto all'esterno non è altro che un distinguere dal soggetto la cosa veduta, ossia è la distinzione del sentito dall' « io » senziente. Ueberweg ha chiaramente mostrato l'insufficienza della proiezione all'esterno, perchè il parlar di immagini all'infuori dell'immagine, è come il dover pensare i varî oggetti esterni al nostro corpo, che è pure un oggetto: sicchè ne deriva la conseguenza che tutto lo spazio che noi percepiamo è soltanto lo spazio della nostra coscienza.

E però la intuizione cartesiana e spinozistica delle immagini cerebrali per mezzo dell'anima, quando si rimuova il noto artificio pregiudiziale che colloca, per così dire, nell'uomo un altro uomo, rimane egualmente inspiegabile come la origine dell'immagine psichica direttamente da condizioni fisiche della medesima. Ciò che è necessario è riferire l'o-

rigine di codesta immagine psichica ad una sintesi diretta delle impressioni singole, anche se queste nel cervello si presentino disperse. Nè si comprende come sia possibile tale sintesi, la quale può essere ancora un insufficiente nostro modo di rappresentazione, di cui dobbiamo accontentarci; ma tuttavia di essa si ha bisogno in ogni caso per poter dimostrare la connessione tra processi atomici e la coscienza. Quindi non ha senso il volersi ostinare a veder ripetuti ancora gli oggetti nel cervello, sostituendo al prodotto di quella sintesi e alla rappresentazione come tale di una data cosa, una immagine rimpicciolita nuovamente nel cervello, che è anch'esso poi rappresentato. — Ueberweg, combattendo l'atomismo, trovò nella continuità della materia un nesso sufficiente alla unità delle rappresentazioni. Per lui le immagini cerebrali hanno la « Bewusstheit », con che si giunge subito alle rappresentazioni: per lui esiste il mondo della cosa in sè, con tre dimensioni, riempito di una materia capace di sensazione, e i cui oggetti solo in certa misura differiscono da quelli della nostra rappresentazione. Ma con ciò non si deve pensare che le rappresentazioni siano materiali, giacchè a noi sono dati immediatamente soltanto i fenomeni, e la materia, sia essa pensata atomisticamente o come un continuo, è un principio ausiliario adottato per porre i fenomeni in una connessione di causa ed effetto, ed il mondo concepito come materiale e sussistente di per sè è una rappresentazione ausiliaria per la concezione totale dei fenomeni. In realtà la teoria di Müller-Ueberweg cerca di sradicare l'errore della teoria della proiezione, la quale si fonda sul presupposto che il proprio corpo si consideri come una cosa in sè, ossia come una cosa materiale. E, del resto, oggi si sa che i colori, i suoni, gli odori non concernono cose in sè, ma che sono speciali forme di eccitamento della nostra sensibilità, che sono provocate da corrispondenti processi qualitativamente differenti nel mondo esterno. Dal caos di vibrazioni e movimenti di ogni specie, di cui è riempito il nostro ambiente, certe forme di movimento ripetuto sotto

determinati rapporti numerici, vengono fatte emergere, relativamente rafforzate e presentate alla percezione, mentre tutte le altre forme di movimento passano senza lasciare una impressione nel campo della sensazione. In questi casi si ha adunque a che fare con processi che avvengono nel soggetto, ed i movimenti nel mondo esterno non costituiscono affatto ciò che essi devono rappresentare per noi in conseguenza della loro azione sui nostri sensi: i nostri apparecchi sensoriali, considerati dal punto di vista scientifico odierno, sono specie d'apparecchi di astrazione, in quanto ci mostrano un qualsivoglia effetto di una forma di movimento, ma tale che non si trova affatto nell'oggetto, ove si consideri questo oggetto in sè, e questa specie di astrazione si riflette poi nel pensiero. Ove però non si consideri il confronto con l'oggetto in sè, naturalmente rimane solo il fatto che il mondo sensoriale è un prodotto della nostra organizzazione, che i nostri stessi organi sono pure immagini equivalenti a quelle di tutti gli altri elementi del mondo fenomenico, e che la nostra stessa organizzazione sta quindi anch'essa sotto tali condizioni. — In rapporto a ciò, esiste anche un nesso intimo tra impressione sensoriale e rappresentazione: anzi nel caso della vista, per esempio, dobbiamo parlare non solo di « vedere », ma anche di « concludere », essendo difficile separare nettamente i due atti, a meno che non lo si faccia artificialmente nell'astrazione. Il fatto è che la conclusione si affettua nella forma di una rappresentazione visiva nel caso del vedere, e che essa è soltanto una breve espressione per designare tutto un lungo processo; ma già nelle parole « l'occhio decide, conclude » si comprendono tanto il fatto del vedere con tutto il relativo annesso di fenomeni periferici e centrali, quanto l'altro fatto del concludere. E se per la proprietà della percezione si trovano continuamente condizioni fisiche, si può analogamente presumere altrettanto per le conclusioni; cioè, se nel puro campo sensoriale, ove si ammettono per tutti i fenomeni condizioni organiche, si danno processi che sono es-

senzialmente affini alle conclusioni intellettive, sarà probabile che anche queste ultime possano ricondursi in fondo a condizioni fisiche. Ma tuttavia, se noi parliamo di condizioni fisiche, di materia, ecc., ci resta ancora a chiedere: che cosa è il corpo, che è la materia, che l'oggetto fisico? Ed ecco così, attraverso una intricatissima vicenda di pensiero filosofico e di ricerca naturalistica, dopo un continuo progresso di cognizioni, rinascere la eterna questione posta in termini ben determinati: che cosa significa la designazione della natura fisica? Friedrich Albert Lange ¹⁾ fa a questo proposito alcune considerazioni che vale la pena di riportar per intero: « Die consequent materialistische Betrachtung schlägt dadurch sofort um in eine consequent idealistische. Es ist keine Kluft in unserem Wesen anzunehmen. Wir haben nicht einzelne Functionen unsres Wesens einer physischen, andre einer geistigen Natur zuzuschreiben, sondern wir sind in unserm Recht, wenn wir für Alles, anch für den Mechanismus des Denkens, physische Bedingungen voraussetzen und nich rasten, bis wir sie gefunden haben. Wir sind aber nicht minder in unserm Recht, wenn wir nicht nur die uns erscheinende Aussenwelt, sondern auch die Organe, mit denen wir diese auffassen, als blosse Bilder des wahrhaft Vorhandenen betrachten. Das Auge, mit dem wir zu sehen glauben, ist selbst nur ein Product unsrer Vorstellung, und wenn wir finden, dass unsre Gesichtsbilder durch die Einrichtungen des Auges hervorgerufen werden, so dürfen wir nie vergessen, dass auch das Auge sammt seinen Einrichtungen, der Sehnerv sammt dem Hirn und all den Structuren, die wir dort noch etwa als Ursachen des Denkens entdecken möchten, nur Vorstellungen sind, die zwar eine in sich selbst zusammenhängende Welt bilden, jedoch eine Welt, die über sich selbst hinausweist ».

— Ma, se per il materialismo è uno scoglio insormontabile lo spiegare come da movimento di materia possa venire una

¹⁾ *Geschichte des Materialismus u. Kritik seiner Bedeutung in d. Gegenwart*, Iserlohn u. Leipzig, 1887, S. 731.

sensazione conscia, non è invece troppo difficile pensare la nostra totale rappresentazione di materia e di moto come il risultato di una organizzazione di disposizioni puramente spirituali. Per questo Helmholtz crede di poter riferire l'attività sensoriale ad una specie di conclusione. E per questo si potrà sempre opporre all'atomismo la considerazione seguente di Rokitanski: « Wie die Materie überhaupt, so sind auch die sie constituirenden Atome Erscheinung, Vorstellung, und wie die Frage an die anschauliche Materie, so ist nicht minder die an die Atome berechtigt, was sie ausser der Erscheinung, ausser der Vorstellung, was sie an sich seien, was in ihnen von Ewigkeit her zum Ausdruck gelangt sei ». Inoltre Helmholtz ha detto che i sensi non ci danno nè le cose nè le loro fedeli immagini, ma gli effetti delle medesime.

Questi concetti di relatività ci riconducono per altra via al concetto a cui eravamo giunti nella considerazione del progresso filosofico, cioè all'incremento idealistico dovuto ad una più ampia messe di risultati della ricerca scientifica e al prodursi di nuovi problemi successivi. Anche nel caso presente osserviamo per un lato il manifestarsi di nuovi orizzonti e il sorgere di nuovi punti di vista; ma non si deve neppur negare che il problema urgente si presenta, attraverso sempre nuove forme, sempre il medesimo. Difatti, sia nel campo speculativo che in quello delle scienze della natura, è un continuo chiedersi quale sia la natura dell'universo; ed ogni altro problema, psicologico, conoscitivo, logico, morale, sociale, metafisico, ontologico, religioso, nel campo filosofico, oppure cosmogonico, astronomico, geologico, organico, biologico, fisiologico, ecc. nel campo naturale, non è che una derivazione prossima o lontana di quella interrogazione. Le prime inchieste del pensiero sistematico derivarono da impressioni destate dal mondo empirico; la stessa religione era intimamente connessa cogli oggetti esterni, e le spiegazioni cercate concernevano la natura. Ora, guardando la cosa da un punto di vista generale, è ancor la con-

siderazione della natura che oggi occupa i nostri spiriti. E, se soltanto ci limitiamo a seguire lo sviluppo del pensiero dal Rinascimento in poi, facilmente scorgiamo che dallo studio della natura son derivati il pensiero del filosofo e la ricerca dell'investigatore.

Se noi consideriamo pensiero tanto quello che scopriva le leggi di attrazione universale quanto quello che eseguiva la critica della conoscenza, e se di più sappiamo scorgere il nesso che lega la scoperta di un astro alla indagine sui concetti intellettivi e sui giudizi sintetici a priori, noi non possiamo dubitare della unità e continuità spirituale nella ricerca. Nè dobbiamo dimenticare che al concetto di natura noi annettiamo sempre il significato almeno parziale di origine, fondamento, substrato, ossia di finalità filosofica conoscitiva. Per questo ci sembra che quando si tratta dell'infinito nella natura, deve trattarsi non di una teoria dell'infinito fisico, ma di tutto il complesso di pensiero e di teoria che si riconnette alla natura in genere, e quindi, più che altro, dello sviluppo spirituale che deriva direttamente dalla considerazione dell'universo e che si propaga non in una sola direzione teoretica, ma tanto nel senso fisico che psichico, sociale, morale, storicamente e teoricamente considerato. Quindi per noi la questione dell'infinito fisico si distingue dal problema proprio dell'infinito; giacchè, mentre quest'ultimo è un quesito della conoscenza nel campo speculativo, il primo è semplicemente una specie di storia dello sviluppo nell'ordine fisico, ossia nell'ordine naturale studiato da un punto di vista sistematico e abbracciato nella sua totalità storica. Difatti, ove si volesse soltanto trattare l'infinito fisico come esso può desumersi, per esempio, dalle conclusioni di un astronomo del secolo scorso, noi dovremmo accontentarci di un sistema di pensiero, del quale sappiamo che potè venir superato, ma che noi ci ostineremmo a voler come definitivo. Invece l'infinito è per noi il progresso totale, non solo nel suo decorso conosciuto, ma nella sua continuazione indefinita. Ciò che è proprio dell'infinito è la continuità,

o meglio la continuazione, nel senso che esso è un decorso che sta rinnovandosi ancora mentre lo si afferma: e per questo appunto esso non è, per noi, la natura cristallizzata in un sistema di cognizioni fisiche o di pensieri filosofici, ma è un divenire, una funzione, un'attività incessante. Nel mondo fisico noi vediamo non un quadro fisso, ma il sovrapporsi successivo di una infinità di mondi fisici immaginati da una infinità di menti, e ancora i risultati di tutti quegli altri pensieri che ne derivarono nei varî tempi e luoghi, e che quindi vi si connettono. Se ogni pensiero è un risultato non solo di attività individuale, ma di preparazione storica e di cooperazione sociale, tale dev'essere anche quello generale del mondo come oggi è pensato; un tale mondo non può essere che il complesso delle idee moderne sull'universo, preparate da una infinità di fattori varî, precedenti e coesistenti. Il voler, per esempio, considerare soltanto le conclusioni moderne sull'universo stellare, sarebbe per noi criterio unilaterale, giacchè la volta celeste non è che una ricerca speciale, ed altrettanto diritto alla inserzione nel problema totale hanno le ricerche biologiche e morali. La considerazione di un universo composto di soli corpi solidi o liquidi o gassosi potrebbe comprendersi in un'epoca, nella quale non fossero riconosciuti i nessi intimi che collegano tutte le forme di conoscenza. Ma può essere ciò egualmente possibile in un tempo in cui la materia stessa si considera come un concetto, e l'universo stellare una rappresentazione nell'ordine spaziale? L'infinito nella natura si rivela tanto nella moltiplicazione interminabile dei collegamenti interni tra le diverse discipline, quanto ancora nella evoluzione di ciascuna disciplina e dei concetti propri di essa. Persino i concetti più generali e ritenuti più invariabili, come quelli sulla materia e la sua composizione, si sono modificati. La legge di gravitazione di Newton, quella della affinità di Dalton nel mondo dei fenomeni chimici, l'attrazione chimica identificata con la gravitazione da Buffon, l'impulso all'unione e la cosiddetta « amicitia » che per Boer-

have spiega i processi chimici ricordando la « φύσις » di Empedocle e respingendo la teoria dell'urto meccanico, la scoperta di Gay-Lussac (1808) sui rapporti semplici di volume che collegano gas diversi sotto pressione eguale ed egual temperatura, e poi le teorie di Berzelius sul comportamento elettrico degli atomi, l'isomorfismo e il dimorfismo, la teoria della ondulazione nell'ottica, la dimostrazione che Young diede del numero delle oscillazioni dei diversi colori (anno 1801), l'ipotesi di Ampère e Cauchy degli atomi senza estensione, e dei centri semplici di forza di Faraday, e così le nuove dottrine della chimica e il relativo concetto della quantità o « quantivalenza » degli atomi insieme con la meccanica dell'urto elastico nei gas, tutte queste nuove concezioni ci fanno penetrare sino nell'intima, anzi sempre più remota struttura della materia, e modificano i concetti dell'atomismo tradizionale, sostituendovi una continua varietà di rappresentazione degli ultimi elementi e una trasformazione dinamica del concetto di materia. Difatti un problema capitale è divenuto quello della forza, che nel pensiero contemporaneo ha avuto una ripercussione immensa, essendo esso quasi un avviamento alla risoluzione in senso idealistico del problema cosmico, e quindi un termine medio nel dualismo della natura e dello spirito. Nella psicofisica il concetto di energia è generale, sebbene sotto uno speciale aspetto e valore, e nella fisica esso divenne indispensabile, specialmente dopo le scoperte nel campo elettrico.

Du Bois-Reymond si chiese che cosa noi ci rappresentiamo sotto il concetto di « forza »; e rispose che in fondo non ci sono nè forze nè materia, essendo entrambe soltanto astrazioni delle cose, assunte da diversi punti di vista e riproducenti come tali ancora il medesimo dualismo di Dio e del mondo, di anima e di corpo. Ma non si deve negare che coi progressi delle scienze man mano si andarono sostituendo forze alla materia; tanto è vero che, come dicemmo, l'atomo di Ampère si risolve infine in un punto inesteso, che corrisponde a un niente di materia, e

che di conseguenza la materia si riduce solo a ciò che noi non riusciamo più a risolvere in forze. Redtenbacher dice che noi conosciamo la esistenza delle forze negli effetti molteplici che ne derivano, ma specialmente mediante il sentimento e la coscienza delle nostre proprie forze: il che dimostra realmente il concetto idealistico della forza. Per questa si potrebbe giungere quasi all'ipotesi di energie ultrasensibili, che fanno ammettere, accanto agli elementi della materia, una specie di invisibile persona; ma in realtà la forza non è però considerata la causa del movimento, nè la materia causa della forza; bensì si tien conto solo di un corpo mosso e della forza come di una funzione del movimento. Risultato di questi nuovi concetti nelle scienze è la sempre più profonda conoscenza dei rapporti tra le cose, e la conoscenza sempre più malsicura intorno al soggetto di questi rapporti: nel campo della fisica e della chimica si conobbero sempre meglio le molecole e nello stesso tempo sempre meno sicuramente gli atomi; sempre più chiari i rapporti e il modo, e sempre più oscura la sostanza e il principio.

Si è giunti a prender in esame le più piccole parti di volume, gli elementi di volume, i quali nei nuovi concetti scientifici non sono più disparati e disformi come gli atomi, ma uniformi e continui; onde deriva un dinamismo, una concezione di continuità. Una cosa è non più una sostanza o una parte di una sostanza, ma un gruppo coerente di fenomeni, che noi mediante l'astrazione concepiamo uniti: forze sono per noi quelle proprietà della cosa, che noi conosciamo per determinati effetti su altre cose: materia chiamiamo ciò che in una cosa non possiamo risolvere in forze, e che rimane come un fondo e un sostegno sottoposto alle forze conosciute. Anche prendendo la forza in senso rigorosamente fisico, essa rimane una funzione della massa e quindi nuovamente della materia; ma, se con ciò la materia è alla sua volta presupposta, d'altra parte essa non è più il concetto più concreto,

perchè la forza la si riferisce non più alla materia ma all'oggetto, e quindi la materia finisce per essere un'astrazione di una astrazione.

Se si vuol definire la forza come il principio e il motivo del movimento, si ha solo una espressione ausiliaria; perchè non si può avere alcun motivo del movimento all'infuori degli equivalenti della forza viva e delle forze di tensione. In fondo, però, come ha mostrato Zöllner, il concetto di materia è ancor necessario, e non è soltanto un residuo di ciò che viene riferito alla forza, ma risorge ancora sinteticamente da codesta specie di elementi. Anche i valori potenziali di Neumann, che sono poi grandezze di forza, si muovono attraverso lo spazio; e si è quindi sempre costretti ad attribuire anche ai concetti di forza e di moto una esistenza indipendente, ossia una specie di sostanza, un riferimento al concetto di materia.

In fondo, si potrebbe essere quasi indotti ad argomentare che la materia è pensata mediante la forza, e la forza mediante la materia, in quanto è necessario concepire l'una con qualche proprietà soggettiva e l'altra come una oggettivazione, o entrambe sotto tutte e due queste condizioni.

In realtà, dice Helmholtz ¹⁾, al movimento di ogni corpo terrestre si oppongono sempre forze resistenti, come l'attrito, la resistenza dell'aria, ecc. E, anche ammettendosi ovunque delle forze nella natura, ve ne sono alcune che non possono inserirsi tra le pure forze di movimento, come calore, magnetismo, luce, affinità chimiche, e nondimeno stanno nei rapporti più complessi con i processi meccanici. Ma il concetto stesso della forza si è venuto mutando, sia pel fatto che la materia venne risolta in forme di movimento, e quindi l'universo si spiegò come un sistema di forze; e sia ancora per la legge famosa della conservazione della energia, secondo cui si dà un continuo scambio

¹⁾ *Vorträge und Reden*, V. Aufl., I Ed., Braunschweig, 1903, S. 51 ff.

delle forze naturali, in modo da passare da processi meccanici, attraverso processi chimici, elettrici, magnetici, termici, nuovamente a processi meccanici in una specie di gran circolo, che finisce con un finale profitto di lavoro meccanico.

A questi criteri si sono informati nel principio del secolo scorso Sadi Carnot (1824) ma soprattutto nel 1842 I. Robert Mayer, Colding nel 1843, e contemporaneamente in Inghilterra il Joule e in Germania Helmholtz, il quale pubblicò in merito le sue ricerche, compendiate in un breve scritto, che apparve nel 1847 sotto il titolo rimasto celebre « Ueber die Erhaltung der Kraft ». Tra codesti scienziati, il Mayer è detto dal Dühring il Galilei del secolo XIX, appunto per la scoperta di tale legge, di cui sembra doversi a lui il merito principale. Codesta legge fu nondimeno contraddetta come una specie di conoscenza « a priori », onde si pose da taluni il Mayer tra i rappresentanti del pensiero puro. Helmholtz, quando compose nel 1847 lo scritto su citato, non conosceva le due monografie del Mayer: le conobbe più tardi, e rese giustizia alla priorità di lui, sebbene egli fosse giunto indipendentemente a conclusioni analoghe. La legge della conservazione della energia non deve però considerarsi inaugurata nei primi anni del secolo scorso, giacchè era stata preparata da concezioni antecedenti. Già Leibniz aveva esposto il concetto della forza viva, cioè dell'equivalente in lavoro del movimento di masse: Bernoulli ne aveva studiato varie applicazioni. Però allora si sapeva che la legge della conservazione della forza viva valeva soltanto per quelle forze di movimento, che sono indipendenti dal tempo e dalla velocità, e che potrebbero chiamarsi conservative.

Ma più tardi giurarono altri fatti, come la decisione presa nel 1775 dall' « Académie des Sciences » di Parigi di non prendere più in alcuna considerazione nessun perpetuo mobile, perchè « le mouvement perpétuel est absolument impossible », come la quadratura del circolo e la

trisezione dell'angolo. Roberto Mayer proclama il « nihil fieri ex nihilo », il che costituisce un lato del problema della conservazione della forza, mentre l'altro, il « nihil fieri ad nihilum » non era ancora stato espresso, sebbene esso abbia una grande importanza; perchè, sino a che agiscono forze naturali conservative e vale la legge della conservazione della forza viva, non è possibile la distruzione degli equivalenti di lavoro e nemmeno la riproduzione loro: il che fa anche comprendere il perchè della parola « conservatio » adoperata per designare quel principio. Il vero valore della teoria della conservazione della forza, come oggi è inteso, si affermò quando si conobbe meglio la natura del calore.

La scoperta dell'ossigeno e la relativa nuova teoria della combustione portò alla calorimetria. Nella dottrina del calore si erano anche registrati fatti e processi, che non si potevano conciliare con l'ipotesi di un calorico. Difatti contraddicevano a questa le ricerche di Rumford e Humphrey Davys sul calore di frizione e d'attrito, a cui si volse anche Berthollet, che cercò di ritornare all'ipotesi del calorico imponderabile.

Si trattava di vedere se la legge della conservazione della forza viva, che facilitava la trattazione del problema del movimento, avesse valore anche nel caso su citato del calore. Se sì, naturalmente il calore veniva ad esser considerato come un « quantum » di forza viva, e quindi venivano ad esser eliminate gran parte delle eccezioni, fino allora ammesse, a quella legge. Il calore prodotto mediante l'attrito, poteva così prendersi come l'equivalente della forza viva precedente apparentemente perduta, e perciò come una forma di movimento e una esplicazione speciale della energia che non va perduta nella sua totalità, ma che si conserva perennemente. E difatti R. Mayer afferma che una determinata quantità di calore deve essere equivalente ad un determinato importo di lavoro, e inoltre indica un metodo per calcolare questo importo. In tale calcolo egli,

basandosi su un esperimento eseguito da Gay-Lussac, poneva l'ipotesi che il raffreddamento di un gas che s'espande, corrisponda al suo lavoro esterno. Dal « causa aequat effectum » si giunse ad ammettere che ciò, che agisce come causa, è indistruttibile.

Liebig, nell'anno in cui apparve il lavoro del Mayer, pubblicò il suo libro sulla « Thierchemie », in cui approfondì la questione della origine chimica del calore animale. E così si esplicò sempre meglio la nuova interpretazione del « causa aequat effectum », in quanto l'effetto, col medesimo valore di grandezza, può divenire a sua volta una nuova causa. L'« aequat » potè tradursi non semplicemente in un « è eguale », ma in un « rimane eguale »; e il concetto di causa ed effetto si trasformò in qualche modo in un concetto meno assoluto, come sarebbe quello, che in tedesco si traduce benissimo col « Veranlassung und Folge ». Ad ogni modo, pur considerandosi gli equivalenti di lavoro che si trovano nella natura, come causa ed effetto, l'importante è la dimostrazione della loro indistruttibilità, e quindi l'affermazione dei due principi: « dal niente viene niente e niente si distrugge ».

Il grande complesso degli equivalenti di lavoro dell'universo costituisce un ente, che non sorse dal nulla e che non potrà mai ritornare in nulla. Il Joule, un po' prima della comparsa dei lavori del Mayer, aveva trovato, studiando le relazioni tra calore e energia elettrica di una batteria galvanica, che il totale sviluppo di calore nel circuito di una batteria galvanica, è indipendente dalla composizione di questo circuito, e proporzionale all'importo delle decomposizioni chimiche subentrate in esso. Poco più tardi, e proprio quando usciva la pubblicazione del Mayer, egli avanzava la supposizione che anche nelle combustioni chimiche dirette, lo sviluppo di calore è condizionato da un analogo processo elettrico; e da ulteriori esperienze venne stabilito il rapporto tra il lavoro perduto e il calore acquistato, e inoltre esso fu trovato, in media

di 838 nella misura del piede inglese e per grado Fahrenheit, ossia di 460 m. per 1° C.

La vecchia meccanica ammetteva che nell'urto e attrito di due corpi tra di loro, semplicemente andasse perduta della forza viva. Ora invece si sa che quell'urto e quell'attrito producon calore, anzi una determinata quantità di calore, e viceversa che, quando mediante il calore si ottiene del lavoro, scompare nuovamente una determinata quantità di calore. Il calore non è adunque più a considerarsi, come una volta si credeva, una materia sottile imponderabile; ma al contrario, analogamente alla luce, è una forma speciale di movimento vibratorio delle più piccole particelle dei corpi; e nell'attrito e nell'urto si ha solo in apparenza la perdita del movimento dell'intera massa, perchè in realtà quel moto trapassa in un movimento delle parti più piccole; e viceversa nel prodursi di forza impellente mediante il calore, il movimento di quelle particelle minime si muta nel movimento di tutta la massa.

In fondo, si stabiliscono così diversi rapporti di scambio di energia e soprattutto la inesauribilità di questa, badandosi però che non si possono neppur con questa legge escludere la scomparsa di una forma di movimento e il prodursi di un'altra, come pure non si può evitare la concezione di una massa che una volta si muove nella sua integrità, e un'altra volta nelle sue piccolissime particelle costitutive. Questi concetti sono in fondo il residuo, diversamente rappresentato, di altri meno recenti: ciò che è nuovo è il concetto totale risultante, secondo cui tutta la natura è una immensa provvista di forza capace di produrre effetti; forza, che non può accrescersi nè diminuirsi, onde la sua quantità nel mondo inorganico è altrettanto eterna ed invariabile quanto quella della materia. Una conseguenza di ciò è, secondo Carnot, che soltanto quando il calore passa da un corpo più caldo ad uno più freddo, esso può, solo in parte, mutarsi in lavoro meccanico: ma siccome il calore di corpi riscaldati tende continuamente, per

conduttibilità e irradiazione, a passare nei meno caldi, così tende anche a produrre un equilibrio di temperatura. In ogni moto di corpi, per l'attrito o l'urto, una parte della forza meccanica passa in calore, di cui soltanto una parte viene di nuovo trasformata, come comunemente si verifica nei processi chimici ed elettrici. La parte di energia, che costituisce il calore invariabile, cresce così continuamente nei processi naturali, mentre l'altra parte (forze meccaniche, elettriche, chimiche) continuamente diminuisce; sicchè finalmente dovrà tutta quanta la provvista di forze passare in calore, e tutto il calore si ridurrà nell'equilibrio della temperatura. Ma allora sarebbe esaurita la possibilità di un qualsiasi mutamento, e cesserebbe ogni sorta di processi naturali, compresa la vita delle piante, degli animali e dell'uomo, perchè allora il sole avrebbe perduto la sua più alta temperatura e anche la luce; sulla superficie terrestre terminerebbero le combinazioni chimiche, e il mondo entrerebbe in una eterna quiete; il che sarebbe la conseguenza della legge di Carnot e delle conclusioni di Thomson. A parte queste considerazioni, grandi sono i risultati generali di questa universale equazione delle energie naturali. Per esempio, leggi, che da principio sono dedotte soltanto dai processi fisici nell'ambito dei corpi terrestri, divengono valedoli anche per altri corpi celesti; e la medesima forza che noi sulla Terra chiamiamo gravità, agisce nello spazio cosmico come gravitazione, ed è riconoscibile, nei movimenti di stelle doppie incommensurabilmente lontane, come soggetta alle stesse leggi, a cui obbedisce tra la Terra e la Luna: luce e calore di corpi terrestri non sono essenzialmente diversi da quelli del Sole e delle più lontane stelle fisse: le meteore, che talora dagli spazi celesti precipitano sul nostro pianeta, contengono i medesimi elementi chimici semplici dei corpi del nostro globo. Per cui non solo il nostro pianeta, ma tutto quanto l'universo fisico ci si presenta regolato da un sistema unico di leggi. Ritorna il problema della necessità e della finalità univer-

sale su nuove basi empiriche, e si riaffacciano sotto nuovi aspetti certe questioni non nuove della potenzialità, e così via.

Secondo le ipotesi cosmiche di Kant e Laplace, di cui già abbiamo fatto cenno, il nostro sistema planetario doveva essere una sola nebulosa occupante quella parte di spazio cosmico, che ora è riempita da esso sistema; e l'analisi spettrale mostra, anche nella luce delle nebulose lontane, le medesime linee chiare dell'idrogeno e dell'azoto; e le comete e gli sciami di stelle cadenti e la luce zodiacale, mostrano chiare tracce di una sostanza pulverulenta, che si muove secondo la legge di gravità, e almeno in parte viene gradatamente trattenuta e incorporata nei corpi maggiori: sicchè, a voler calcolare la densità della massa del nostro sistema planetario per l'epoca in cui era nebulosa che si estendeva fino alla via dell'estremo Nettuno, si trova che molti milioni di miglia cubiche dovevano contenere appena appena un grano di materia ponderabile. Per la legge della equivalenza di calore e lavoro, deve poi presupporci nelle originarie forze meccaniche di quell'epoca una sorgente del calore e della luce: difatti, se da principio la densità della materia dispersa a mo' di nebulosa era infinitamente piccola in confronto di quella odierna del Sole e dei singoli pianeti, si può pensare quanto lavoro sarà stato necessario nella condensazione, e calcolare quanto di questo lavoro sussista ancor oggi sotto forma di forze meccaniche, come attrazione dei pianeti rispetto al Sole, e come forza viva del loro movimento, e dedurre quanto di tali energie si è trasformato in calore. Ora l'Helmholtz calcola che dell'originaria forza meccanica soltanto la 443^a parte sussiste come tale, e che il resto si è mutato in calore. Quando il Sole e i pianeti si formarono, le loro parti costitutive dovevano trovarsi in uno stato liquido igneo, ciò che per la Terra fu confermato da fenomeni geologici; e persino la forma sferica appiattita, che è in fondo la forma di equilibrio di una massa liquida rotante, dimostra che anche tutti gli altri corpi del nostro sistema dovevano trovarsi

originariamente in uno stato liquido. E che la luce e il calore debbano aver avuto anch'essi un'origine nel mondo, è stato già un presentimento degli antichi miti e di quelle credenze, che ammettevano da principio il caos e le tenebre, mentre la luce sarebbe stata creata più tardi. La nostra Terra serba ancora le tracce dell'antico stato liquido igneo: i giacimenti di granito dei nostri monti indicano una struttura che può aver avuto origine soltanto per il solidificarsi in forma cristallina della massa fusa. Il calore aumenta nelle profondità; dato che l'aumento sia uniforme, alla profondità di 10 miglia si troverebbe già una temperatura tale da fondere tutte le nostre montagne; alla superficie essa è meno alta, e permette una grande varietà di fenomeni, fra i quali i movimenti e il lavoro degli esseri organici.

Riguardo a questi ultimi, le nuove leggi della conservazione e trasformazione della energia, hanno considerato come importante fattore la nutrizione. In fondo, i processi dei corpi organici non si differenziano totalmente da quelli inorganici. Per gli organici, anzi per gli animali, la sorgente della forza sta nei mezzi di nutrizione, i quali vengono dalle piante. Ma, poichè gli organi digerenti dell'uomo non sono in grado di trasformare gli elementi vegetali di nutrizione, così l'uomo li utilizza sotto forma più acconcia quando sono trasformati dall'apparato digerente del bue, che è assai più robusto, e sono stati già assimilati nella nutrizione del corpo di questo animale. Il principal profitto delle piante sta nei prodotti di combustione che produce l'animale, giacchè esse nella respirazione prendono il carbonio combusto, l'acido carbonico, dall'aria, l'idrogeno combusto come acqua, e l'azoto parimenti nella combinazione più semplice, e poi con questi elementi e pochi altri, che traggono dal suolo, producono di nuovo le sostanze composte combustibili, albumina, zucchero, olio, di cui vive l'animale. Onde lo scambio delle energie qui si manifesta sotto la forma di un sistema di circolazione, che è poi una sorgente perpetua di forza, perchè le piante preparano il

materiale di combustione e la materia di alimentazione, gli animali la assimilano, la consumano lentamente, e le piante tornano poi a vivere dei prodotti di combustione dei polmoni degli animali. E tutto ciò si collega con la circolazione di energia del mondo inorganico, in quanto che ogni forza che fa vivere e muoversi i nostri corpi, trae la sua origine direttamente dalla purissima luce solare: il che fa accordare i risultati scientifici moderni con le concezioni di popoli orientali, ad esempio il cinese. — Naturalmente questa immensa concezione, che stabilisce un nesso intimo fra tutti i fenomeni del mondo fisico, ricorre pur essa, come ogni altra, a concetti astratti, i quali o poggiano su residui concreti materiali già noti, o non bene esplicano la natura di ciò che designano. Per esempio la forza viva, a testimonianza dello stesso Helmholtz¹⁾, corrisponde in meccanica alla velocità di una massa in movimento, ma in quanto è impellente e può produrre lavoro: nondimeno il nome non è ancor felice, perchè richiama alla mente la forza di un essere che vive, e ad ogni modo non è nè solo lavoro in quanto tale, nè movimento, nè soltanto velocità, perchè numerosi esempi, tratti da esperienze fisiche, dimostrano che la velocità appunto va perduta quando subentra essa medesima in forma di forza lavorante. E, quando si parla della velocità di una pietra che cade dall'alto, e la si dice equivalente ad un lavoro meccanico, si ha già con ciò complicato il concetto primitivo della velocità e dello spazio percorso in un tempo, e si è ricorsi al concetto di forza. Negli stessi scritti di Helmholtz troviamo non infrequente la espressione « *Arbeitskraft* », che rappresenta qualcosa di attivo e di produttore. Quando un peso, dice Helmholtz, cade in basso fin dove può cadere, e poi si ferma, si dirà che la sua gravità sussiste precisamente come prima, solo che non può più produrre lavoro. Ma in fondo, dacchè il peso è concepito ancora come premente in basso per la forza di gra-

¹⁾ *Vorträge und Reden (Ueber die Erhaltung der Kraft)*, cit., S. 189 ff.

vità, noi non possiamo esimerci dal mantenere, sebbene indebolito, il precedente concetto del lavoro e della compressione, o almeno della tendenza a un tale effetto, controbilanciata da una energia resistente. La capacità di lavoro di tutte le forze naturali conosciute, si esaurisce a misura che esse producono effettivamente lavoro, e la somma delle forze efficienti nell'universo rimane la medesima eternamente ed invariabilmente attraverso tutti i mutamenti della natura. — Ma è appunto questo scambio perenne di energie diverse, che ci fa mutare il concetto primitivo di energia, in quanto essa ora diviene non più la causa di un movimento, ma una forma speciale del movimento incessante dei corpi. E con lo stesso fondamento non rimane più isolato il concetto di materia, la quale si riduce ad essere soltanto un concetto astratto ausiliario per concedere un sostegno alle energie naturali, le quali hanno invaso tutto l'universo fisico. — Faraday credette che nella materia, e precisamente nei metalli, fosse possibile la trasmutazione: e Ramsay e Raleygh scoprirono l'argon e altri componenti insospettati dell'aria. Ramsay si riferisce agli elettroni atomi di elettricità negativa, che si sprigionano dai corpi radioattivi; e conferma certe trasmutazioni di rame in litio. Ora, se si pensa alla specificità degli elementi affermata da Boyle nel 1600, alla guerra mossa all'alchimia, alla chimica dopo Lavoisier, si vede l'importanza delle nuove vedute, le quali ammettono, accanto ai valori qualitativi e quantitativi degli atomi, tali relazioni tra gli atomi stessi, da far quasi ripensare al problema alchimistico. La vecchia chimica aveva la teoria delle affinità elettive degli elementi: ora i criteri sono mutati. È vero che la teoria molecolare, quella atomica, e quella degli elettroni non sono che trasformazioni successive dell'antica teoria corpuscolare, e che anche l'elettrone è identico a sè stesso: ma, mentre l'elemento è ancora un tutto omogeneo e conserva in tutte le particelle le proprietà della massa (il che avviene per tutte le sostanze pure) per i corpi composti, al di là di certi limiti di temperatura e pressione, bisogna ammettere le più pic-

cole particelle composte ciascuna di parti diverse, ossia le molecole costituite da particelle disgregabili. Il radio svolge una emanazione che sembra imponderabile, e ha molte proprietà dei gas, e si può trasformare in elio. I fenomeni elettrici, cui dan luogo i corpi radioattivi, fecer ritenere che gli elementi chimici, in condizioni di radioattività, espellono particelle elettrizzate dette elettroni: corpi sin qui elementari, si comporterebbero come corpi composti, perdendo la loro omogeneità. L'atomo così sarebbe un concetto oltrepassato, un multiplo dell'elettrone, che costituirebbe l'atomo come questo costituiva la molecola. E però si venne così a concetti ulteriori e intermedi, quali la radioattività del cervello e, ultimamente, persino l'aureola umana.

L'universo fisico, adunque, secondo il nostro modo di vedere, si deve considerare non come un quadro od un momento del pensiero scientifico-filosofico in una data direzione, ma come la storia dei vari quadri e momenti. In esso si ha da esaminare un decorso di idee e di fatti, che per un rispetto si presentano come successivi ed estranei continuamente l'uno rispetto all'altro (la modificazione dei principî e dei sistemi, le scoperte), costituenti una specie di sistema eterogeneo, e per un altro rispetto formano una continuità effettiva, non solo storica e naturale ma anche logica e finale, ossia un pensiero totale, che permane costante a traverso una costante opposizione dialettica, i termini della quale possono essere diversi non formalmente ma rispetto al contenuto loro empirico. Sia nelle scienze filosofiche, morali e sociali, che in quelle naturali, biologiche, psicologiche, si giunse in fondo a riaffermare o direttamente o indirettamente un dialettismo, un dualismo di principî, oppure si trovò qualche principio conciliativo che ha la sua ragion d'essere appunto in quel dualismo stesso. Sebbene di vari elementi si sia arricchita la conoscenza, essa è tuttavia rivolta all'interrogazione dell'universo, e non potrà mai concepirsi una conoscenza non interrogativa. Anche in questo suo contegno essa appare come un con-

tinuo processo dialettico: da un lato afferma, dall'altro interroga; e appunto in ciò sta, secondo noi, l'infinito suo progresso. Non è un infinito fisico una concezione totale dell'universo conosciuto o pensato, e nemmeno quella che supera in estensione questa concezione. Entrambe sarebbero due impo-
nenti affermazioni del pensiero umano. Ma noi abbiamo veduto che, anche nell'ambito della esperienza singola, l'idea dell'infinito non nasce dal riconoscimento della vastità di un sistema e neppure da quello di un sistema ancor più generale, ma bensì dal confronto di entrambi, e ancora dall'idea della possibilità di procedere a nuovi confronti. Soprattutto è questa possibilità che noi pensiamo come un infinito. Se il cielo stellato è immenso, esso diviene infinito in quanto *pensiamo* che quell'immenso che noi *vediamo* finito, non ha limiti. Esso può apparirci indifferentemente finito ed infinito: finito se noi non ci preoccupiamo di conoscere le sue varie dimensioni, ma ci accontentiamo di credere che il Sole e la Luna compiano i loro percorsi in prossimità immediata, e che gli altri astri non siano che quei punti luminosi che noi vediamo disseminati sulla volta celeste; infinito, se noi mentalmente calcoliamo le distanze del Sole, della Luna, degli astri, e confrontiamo queste distanze immense con quelle direttamente controllabili, in modo da vederne la sproporzionata differenza. Ciò non basta ancora, perchè nel primo caso, come abbiamo già detto, non si ha un'idea dell'infinito e neppure del finito: e nel secondo si ha piuttosto quella dell'incommensurabile, e, al più, dell'indefinito. La idea propria dell'infinito sta nel sorpassare mentalmente anche questo indefinito. Perchè ciò avvenga, è necessario che sia concepito ancor chiaramente l'indefinito, ossia che questo diventi determinato, e che al di là di esso si proceda nuovamente. Ma, poichè qui di bel nuovo potrebbe ripetersi il fatto di un immenso universo finito dai confini protratti nell'indeterminato, si comprende che la idea dell'infinito sorge nel momento in cui si pone a codesto indeterminato un ultimo limite e subito dopo lo si dichiara insufficiente. È una im-

possibilità di fermarci a un ultimo confine, ed è quindi una possibilità continuativa, un processo attivo. Per questo noi abbiamo altrove già affermato che l'infinito non è un definitivo che debba cercarsi già costituito nelle conclusioni di uno scienziato o di un filosofo e nemmeno nelle idee filosofiche di un dato tempo, ma è un processo incessante di pensiero; e non di pensiero naturalistico o empirista o metafisico, ma di pensiero totale, essendo sua principal condizione la impossibilità di una delimitazione. Per questo medesimo motivo noi crediamo non soltanto che il pensiero contemporaneo sia integrativo di quello che lo ha condizionato e preparato, ma anche che esso sia un divenire, un transeunte, una attività fattiva, anzi più propriamente infinito in quanto progresso non realizzato, ma realizzantesi e continuamente efficiente. Quanto più di volere impiegheremo nel nostro progresso intellettuale, tanto meno finito sarà questo progresso. Infinito non attuato adunque, ma attuale nel senso che sta attuandosi, ossia potenziale dopo l'affermazione di un finito. Non va però dimenticato che, se codesto infinito è un processo, esso è tuttavia affermato, e che in quanto tale ridiventa un contenuto di pensiero: solo che questo contenuto non è definitivo ma è a sua volta affermazione, poi negazione di questa, indi affermazione rinnovata, e così via, quindi è un pensiero attivo. Condizioni di questa attività di pensiero sono, come vedemmo, il rinnovarsi continuo dei dati empirici sottoposti al pensiero, ossia dei motivi di quella attività, e la continuità dell'attività stessa in quanto tale. E queste condizioni ne presuppongono un'altra fondamentale, che pure da principio abbiamo ricordata, ossia la conservazione del dato empirico nella memoria, la sua trasformazione in astratto e il suo assorbimento entro un processo di pensiero che sa ripetere in astratto il dato singolo, e a cui si adatta continuamente il contenuto empirico. Per questo si impone un altro aspetto nella ricerca, quello dell'infinito considerato dal punto di vista della conoscenza, ossia sotto il riguardo teoretico-critico-conoscitivo.

III. - L'INFINITO TEORETICO-CONOSCITIVO.

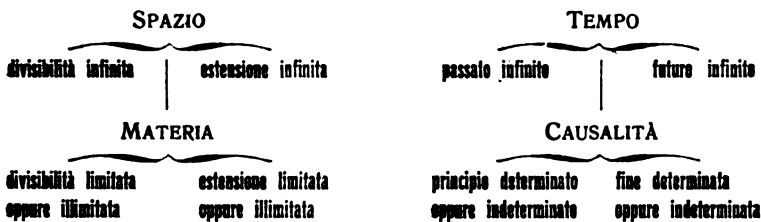
Il mondo fisico, esterno, diviene pel pensiero astratto e pel mondo dei concetti un problema filosofico, e precisamente il problema cosmologico. Il quale, rispetto all'idea dell'infinito, va per noi esaminato dal punto di vista critico-conoscitivo.

Dice il Wundt ¹⁾ che la considerazione scientifica del mondo esterno ci conduce al di là dei limiti di ciascuna esperienza data, nel campo delle idee trascendenti. Tra queste è la idea del trascendente reale, ossia delle proprietà puramente quantitative del concetto del mondo, la estensione spaziale degli oggetti sensibili e il decorso temporale degli avvenimenti; estensione e decorso, che costituiscono un progresso infinito. Hanno così origine le idee generali dello spazio infinito, del tempo infinito, della materia illimitata e della incessante causalità dei fenomeni. Queste quattro idee si raggruppano a loro volta in due gruppi di due ciascuno, in cui le singole componenti corrispondono alla direzione, in cui ciascuna volta si compì il progresso dall'empirico in trascendente. Se lo spazio si può pensare divisibile in infinito ed esteso in infinito, la materia, la quale è pensata come un substrato sostanziale dei fenomeni, dato nello spazio, ed è quindi il contenuto qualitativo determinato dallo spazio, può essere invece divisibile in infinito o può anche esser riducibile in elementi ultimi; giacchè, come sostanza contenuta nello spazio,

¹⁾ *System der Philosophie*, III Aufl., Bd. I, S. 339 ff.

devesi per essa decidere in base alle premesse della esperienza. Non altrimenti, se il tempo si considera come un decorso infinito nel passato e infinito nell'avvenire, la causalità dei fenomeni, che è il contenuto qualitativo determinato del tempo, può pensarsi invece tanto infinita che finita, richiedendosi anche qui una decisione fondata sulle premesse della esperienza. Dato ciò, si comprende come sorga una questione sommamente importante, anche per il fatto che alcuni propendono a determinare « a priori » secondo le forme della intuizione, anche il contenuto di queste forme per rispetto alle proprietà più generali, mentre altri nel determinare queste ultime si lascian piuttosto guidare dalla esperienza.

Adunque, secondo il pensiero del Wundt, nell'illimitato progresso, che ha per suo oggetto il contenuto qualitativo del dato, non si può applicare il medesimo concetto di infinito, di cui noi ci serviamo nel progresso formale nello spazio e nel tempo: ma in quest'ultimo si ha il progresso infinito del campo quantitativo, mentre nel campo qualitativo della sostanza e delle cause c'è la totalità finita e indefinita. — Sicchè il concetto di infinito, che è indispensabile nelle idee quantitative pure del tempo e dello spazio, non lo è più rispetto al contenuto qualitativo di queste idee, materia e causalità. — Il Wundt espone qui uno schema di queste idee cosmologiche, che sarà opportuno trascrivere:



Le idee quantitative o reali a cui qui si è accennato, avverte il Wundt, sono le idee trascendentali di Kant. — Ora è noto che queste idee per Kant conducono a contraddizioni,

alle antinomie della ragione, la quale trova fondamenti tanto per il finito che per l'infinito del tempo e dello spazio. Kant esprime questo dibattito della ragione con sè stessa in altrettante tesi e antitesi, di cui le prime sostengono la impossibilità di uno spazio e di un tempo infiniti, e le seconde ne dimostrano la necessità. Le tesi dirigono i loro argomenti contro il tentativo di concludere dalla riunione di tutti i finiti una completa totalità infinita: d'altra parte le antitesi presuppongono l'illimitato progresso oltre ogni singola grandezza finita. Codesta antinomia dimostra per Kant che tanto le tesi quanto le antitesi hanno torto, e che la ragione non è capace di formare il concetto del mondo nell'uno e nell'altro modo; il che sta in relazione col fatto, ammesso da Kant, che a noi il mondo è dato solo come fenomeno, non come cosa in sè. — Invece le conclusioni del Wundt sono a questo riguardo alquanto diverse; giacchè per lui la antinomia si risolve nel senso che tanto le tesi quanto le antitesi kantiane hanno ragione. Difatti egli pensa che l'idea del mondo quantitativamente infinito si divide in due idee, che si appartengono senza confondersi. Da una parte ogni collegamento del singolo nello spazio e nel tempo presuppone la impossibilità di ottenere la sintesi quantitativa di tutti gli elementi infiniti diversi, ossia presuppone il « progresso infinito » o l' « infinito non mai terminabile ». D'altra parte, poichè la idea del progresso interminabile di per sè sola non renderebbe possibile la nostra sintesi dei singoli, e quindi nemmeno una conclusione per l'unità del concetto del mondo, così v'ha pure la possibilità di raccogliere tutte le cose nello spazio e tutti gli avvenimenti nel tempo sotto la idea di una « totalità infinita » o di un « infinito terminato » (compiuto, « vollendete »). La prima idea non può trovarsi nella seconda, nè questa nella prima: tuttavia entrambe, il progresso infinito e la totalità infinita, sono egualmente giuste e necessarie.

Ma, poichè questi concetti presuppongono la conoscenza delle antinomie kantiane delle idee cosmologiche, così ci riferi-

remo direttamente a Kant ¹⁾, valendoci anche di una ottima critica dettagliata del Wundt ²⁾, nella quale egli si riferisce a un'altra sua pregevole monografia sul problema cosmologico. ³⁾ Le antinomie fanno parte della filosofia trascendentale di Kant, e sono una espressione delle contraddizioni inerenti alle idee trascendentali cosmologiche. È noto che per Kant (egli stesso le avverte sin da principio nella Introduzione), la idea della filosofia trascendentale si ricava in quanto la esperienza sola non ci dà alcuna vera universalità, e la ragione che muove invece alla ricerca di questo modo di conoscenze, è più stimolata che soddisfatta da quella. Così si hanno anche delle conoscenze generali oltre la esperienza. « Solche allgemeine Erkenntnisse nun, die zugleich den Charakter der innern Nothwendigkeit haben, müssen, von der Erfahrung unabhängig, vor sich selbst klar und gewiss sein; man nennt sie daher Erkenntnisse a priori; da im Gegen-theil das was lediglich von der Erfahrung erborget ist, wie man sich ausdrückt, nur a posteriori oder empirisch erkannt wird ». Di queste conoscenze a priori ve ne sono già nella esperienza stessa, nei concetti intellettivi, nelle idee della ragione.

Fra queste idee della ragione, indipendenti dalla esperienza, è quella cosmologica. Ma qui la ragione è però in conflitto con sè stessa, nella contesa dialettica per la applicazione del concetto di infinito al problema del mondo: e così si hanno le antinomie o contraddizioni cosmologiche, che la ragione non può risolvere. — Queste antinomie, che lo Schopenhauer ⁴⁾ chiamò « eine blosse Spiegelfechterei »,

¹⁾ *Kritik d. reinen Vernunft, Text der Ausgabe 1781 mit Beifügung sämtlicher Abweichungen der Ausgabe 1787*, herausgeg. von D. Karl Kehrbach; II verbess. Aufl., Leipzig, Ph. Reclam jun., S. 354 ff.

²⁾ *Kant's kosmologische Antinomien u. d. Problem der Unendlichkeit*, Wundt's Philos. Stud., Bd. II, s. 495 ff.

³⁾ *Ueber das kosmologische Problem*, Vierteljahrsschrift f. wiss. Philos., I, 1877, s. 80 ff.

⁴⁾ *Kritik der Kantischen Philosophie*, Werke Bd. II, s. 583 ff.

concernono, dice Wundt, quattro questioni: 1) il finito ¹⁾ o l'infinito temporale e spaziale del mondo; 2) la finita o infinita divisibilità della materia; 3) la finita o infinita serie causale dei fenomeni; 4) la esistenza o non esistenza di una sostanza necessaria come causa del mondo. Ammesso e concesso che la 4^a antinomia è soltanto una forma diversa della 3^a, e volendo quindi limitarsi alle prime tre, va osservato che di queste le prime due sono, secondo la denominazione stessa di Kant, le antinomie trascendentali matematiche, e si occupano dell'infinito in riguardo alle proprietà date uniformemente nella intuizione; la terza è la antinomia trascendentale dinamica, e si riferisce all'infinito in riguardo al complesso dei fenomeni che si presentano disformemente alla nostra percezione. Delle due prime, poi, la prima ha per oggetto il superiore concetto di infinito (l'infinitamente grande nello spazio e nel tempo); la seconda, l'inferiore concetto di infinito, cioè l'infinitamente piccolo della divisione spaziale della materia. — Qui il Wundt ci fa osservare che Kant presupponeva identiche le proprietà della massa e quelle dello spazio in cui la materia si estende, tanto per l'infinitamente grande che per l'infinitamente piccolo; inoltre che nella 2^a antinomia, che tratta della finita o infinita divisibilità, non è separata dallo spazio la massa che lo riempie; onde lo stesso Kant ha mostrato effettivamente di preferire in questa 2^a antinomia, che però designa tra le matematiche, la antitesi alla tesi, come mostrò in un altro scritto ²⁾; ossia mostrò di preferire l'infinito o la continuità nella materia, risultante dalla divisibilità inesauribile, dall'ἄπειρον κατὰ διαίρεσιν di Aristotele ³⁾ (per Aristotele non esiste l'infini-

¹⁾ Non ci sembra che i vocaboli italiani « finito » e « infinito » corrispondano in modo perfetto a quelli tedeschi di « Endlichkeit » e « Unendlichkeit »: in questi ultimi non si ha più il semplice participio di un verbo o un aggettivo, ma si indica una specie di proprietà, una potenza o possibilità.

²⁾ *Metaphys. Anfangsgründe der Naturwissenschaft.*

³⁾ *Phys.*, III, 5-8.

tamente grande nello spazio, ma bensì esiste l'infinitamente divisibile), o dal « regressus in infinitum ». Questo « regressus in infinitum » è diverso dal « regressus in indefinitum », perchè, mentre nel primo è data la totalità del corpo, anche se non tutta la divisione infinita di esso ¹⁾, nel secondo invece, per usare l'esempio kantiano, si può risalire da un uomo vivente alla serie dei suoi progenitori, ossia ad una origine empiricamente rappresentabile, anche se non è la prima. — Il Wundt nota qui che la questione della infinita divisibilità va considerata non più come una antinomia matematica, ma come una antinomia fisica o dinamica, perchè si riferisce non al concetto dello spazio, ma al concetto della massa della materia, che ci è necessario come quello di un sostegno delle forze della natura. Così si ottiene per il Wundt, accanto ai concetti matematici kantiani riguardanti il tempo e lo spazio, un primo concetto dinamico, quello della massa, ed un secondo, che è quello già ricordato della 3^a antinomia, cioè il concetto delle causalità. Come il concetto dinamico della massa si appoggia a quello matematico dello spazio, in quanto che superiormente i limiti della massa si estendono nella direzione di quelli dello spazio, e inferiormente i rapporti d'ordine degli elementi della massa seguono secondo le generali proprietà dello spazio, così il secondo concetto dinamico (quello della causalità) sta in rapporto stretto col concetto matematico del tempo.

Ne segue, secondo Wundt, un sistema perfettamente simmetrico di antinomie matematiche e dinamiche, così disposto che a ciascuna antinomia matematica corrispondono due dinamiche o fisiche; e precisamente a quella matematica della finita o infinita estensione spaziale, corrispondono quelle dinamiche della finita o infinita grandezza della massa e della finita o infinita divisibilità della materia; e alla antinomia matematica della finita o infinita durata nel tempo, corrispondono quelle dinamiche del finito o infinito princi-

¹⁾ Ausg. von Rosenkranz, s. 407 ff.

pio e della finita o infinita continuazione della causalità dei fenomeni. Le antinomie si presentano, come vedemmo, sotto forma di tesi e di antitesi. Le tesi affermano il finito, le antitesi l'infinito. Delle tesi e delle antitesi sono date le « Beweise », le prove, le dimostrazioni.

Kant osserva che nelle affermazioni delle antitesi si incontra una perfetta uniformità del modo di pensare, la quale, secondo il Wundt, si estende anche alle dimostrazioni, mentre essa manca per le tesi, e impedisce così di stabilire una simmetria tra quelle delle tesi e delle antitesi. Ciò che è necessario, dice il Wundt, è soprattutto che ogni antinomia rimanga entro il concetto a cui si riferisce; che quindi le contraddizioni rispetto al tempo siano tratte dalle proprietà stesse del tempo, e quelle relative allo spazio siano in rapporto con le condizioni della determinazione spaziale degli oggetti. Nelle antinomie dinamiche, le proprietà del tempo e dello spazio invece influiscono solo in quanto il concetto della massa si riferisce non direttamente allo spazio, ma a ciò che è dato nello spazio; ed il concetto della causalità si riferisce non direttamente al tempo ma a ciò che avviene nel tempo: quindi le contraddizioni relative a questi concetti dinamici non devono dedursi dalle proprietà astratte matematiche dei medesimi; e perciò appunto, secondo Wundt, non può approvarsi la dimostrazione, che Kant nella seconda antitesi dà della infinita divisibilità (della materia), perchè i concetti della massa e della causalità hanno origine sotto l'influsso della esperienza; inoltre esistono dei rapporti speciali tra i concetti della massa e della causalità, i quali si presuppongono a vicenda, nel senso che noi consideriamo la massa come il sostegno della causalità nella natura.

La dimostrazione delle antitesi delle antinomie matematiche parte dalla impossibilità di pensare un tempo vuoto ed uno spazio vuoto, e ne conclude la infinita estensione del mondo nel tempo e nello spazio: la dimostrazione delle tesi delle medesime antinomie, ossia della tesi corrispon-

dente all'antitesi ora accennata, parte al contrario dall'impossibilità di una sintesi infinita nel tempo e nello spazio, e quindi anche di un concetto infinito del mondo. In questa dimostrazione si nota che, mentre per la prima tesi la impossibilità della infinita estensione spaziale viene argomentata in base alla impossibilità di enumerare un'infinità di cose coesistenti, ossia in base alla contraddizione che è inerente non all'infinito dello spazio ma a quello del tempo, per la prima antitesi invece la dimostrazione è fondata sulla natura dello spazio. Così pure il fondamento della dimostrazione della seconda antitesi, sta nelle proprietà intuitive dello spazio, e in ciò corrisponde a quello della dimostrazione della prima antitesi; e la dimostrazione della seconda tesi si muove nel campo dei puri concetti. Il Wundt vede però maggior simmetria nelle dimostrazioni della prima antinomia che non in quelle delle altre. Difatti in esse Kant si attiene piuttosto alla intuizione, tanto nelle dimostrazioni che nelle controdimostrazioni, mentre nelle altre la dimostrazione delle tesi vien condotta quasi sempre ontologicamente e quella delle antitesi intuitivamente. Inoltre nelle altre antinomie le antitesi presentano sempre il concetto di infinito in una forma di espressione negativa, o come divisibilità infinita o come infinita serie causale, mentre le tesi presentano una determinazione positiva, di cui l'opposto contrario non è precisamente l'infinito ma un altro concetto; quindi presentano un concetto che non è più, come nel caso del tempo e dello spazio, precisamente il finito, ma ulteriori proprietà del medesimo. In queste antinomie Kant non indica infatti il finito della divisione della materia e della causalità, ma la semplicità dell'atomo, la libertà e l'esistenza di una necessaria sostanza originaria, implicite nella dimostrazione delle tesi. Wundt spiega ciò col fatto che Kant, mediante il concetto delle sostanze semplici, cercava un riferimento al dogmatismo metafisico, e, mediante le idee della libertà e della sostanza necessaria, desiderava un trapasso ai postulati della ragione pratica: difatti nella terza antinomia il concetto della prima

causa del mondo coincide con la libertà della volontà, la quale sarebbe un concetto in sè e per sè estraneo al problema cosmologico. Oltre queste, un'altra incongruenza sarebbe a trovarsi, secondo il Wundt, in questo fatto: che, come nella prima tesi la dimostrazione contro l'infinito dello spazio è condotta col soccorso del tempo, così le dimostrazioni della 3^a e 4^a antitesi riposano a loro volta sull'infinito del tempo. — Se si confrontano le antinomie matematiche con quelle dinamiche, si osserva che le prime non presuppongono nulla all'infuori delle forme intuitive generali del tempo e dello spazio; mentre le seconde, come abbiamo visto, presuppongono non soltanto i concetti generali della massa materiale e della causalità, ma anche altre premesse speciali derivate della esperienza fisica. Vi ricorrono difatti le leggi del punto medio della massa, la dispersione della materia nello spazio vuoto, lo stato finale dell'equilibrio del movimento, leggi che ivi mantengono il loro valore: del che non è a stupirsi, poichè i concetti della sostanza ¹⁾ materiale e della causalità della natura sono intimamente connessi con la esperienza scientifica, senza la quale essi si limiterebbero a vuote ripetizioni delle antinomie matematiche; per questo codeste antinomie dinamiche portano anche le tracce di vedute ed ipotesi controverse, naturali alla discussione scientifica. Del resto, a parte questo, regna, secondo l'espressione stessa di Kant, sotto le tesi e sotto le antitesi « eine vollkommen übereinstimmende Sinnesart ».

Kant non ha soltanto formulato le antinomie, ma ne ha cercato la soluzione. In fondo egli giunge a ciò, che la serie delle condizioni si rintraccia sempre solo nella sintesi regressiva, ma non mai in qualcosa dato anteriormente ad ogni regresso; ossia non è in un dato fenomeno che si trova il finito o l'infinito dell'insieme delle parti. Dal punto di vista dell'idealismo critico il mondo sarebbe dato soltanto come fenomeno: è la ragione pura, che presenta

¹⁾ Cfr. il concetto leibniziano - wolffiano della sostanza.

l'antinomia come una apparenza dialettica, la quale deriva dal fatto « dass man die Idee der absoluten Totalität, welche nur als eine Bedingung der Ding an sich selbst gilt, auf Erscheinungen angewandt hat, die nur in der Vorstellung und, wenn sie eine Reihe ausmachen, im successiven Regressus, sonst aber gar nicht existiren... Der Beweis würde in diesem Dilemma bestehen. Wenn die Welt ein an sich existirendes Ganze ist: so ist sie entweder endlich oder unendlich; nun ist das erstere sowohl als das zweite falsch (laut den Beweisen der Thesis und Antithesis). [Also ist es auch falsch, dass die Welt (der Inbegriff aller Erscheinungen) ein an sich existirendes Ganzes sei ». E qui è un nucleo del pensiero kantiano. — Kant però ha stabilito ciò per le antinomie matematiche essenzialmente, le quali si potrebbero allora riassumere così: Il mondo non è finito nè infinito (nel tempo e nello spazio). Per le antinomie dinamiche invece si dovrebbe dire: Il mondo può essere pensato tanto finito quanto infinito. Difatti per Kant nel tempo e nello spazio avviene solo un regresso da parti uniformi a parti uniformi, mentre per la causalità esso procede a parti disformi. Il risultato è che nel pensiero kantiano la soluzione delle antinomie matematiche cerca di mostrare che tesi e antitesi sono false entrambe; e la soluzione delle antinomie dinamiche cerca al contrario di mostrare che tesi e antitesi possono essere entrambe vere. Ora, come abbiamo già veduto, la divisibilità della materia rientra per Kant nelle antinomie matematiche, sebbene essa debba piuttosto ascrivarsi a quelle dinamiche: così per lui, come il mondo non è nè finitamente nè infinitamente esteso in rapporto al tempo e allo spazio, così la materia può esser pensata nè finitamente nè infinitamente divisibile. Adunque, ciò posto, nelle antinomie matematiche, tempo e spazio sono soltanto fenomeni, ed il regresso è esclusivamente empirico. Ma come tale è un « regressus in indefinitum » non, « in infinitum »: e noi dobbiamo ritenere nè che il mondo abbia un termine nel tempo e nello spazio, nè che esso non ne

abbia alcuno; nè che la materia consti di parti finite nè che sia divisibile in infinito. Così posta la questione, la soluzione della contesa sta nel conoscere che essa è insolubile.

Il Wundt si chiede se questo risultato corrisponda realmente alla impressione che producono le dimostrazioni delle antinomie kantiane e le loro delucidazioni. Egli ammette che, sostituendosi (come ha fatto Kant e come abbiamo ricordato più sopra) nella seconda antinomia matematica la divisibilità dello spazio a quella della materia, si deve ammettere che non è possibile il pensiero di un limite dello spazio e del tempo tanto rispetto alla estensione che alla divisibilità, poichè il tempo e lo spazio non sono cose esistenti fuori di noi, ma forme della intuizione, che noi come tali siamo costretti ad applicare su ogni limite superiore o inferiore del dato nel tempo e nello spazio. Quindi qui per il Wundt non si avrebbe più un « regressus in indefinitum », ma un regresso « in infinitum », che noi dobbiamo continuare non solo al di là di qualsiasi casuale dato empirico, ma anche al di là di qualunque limite pensabile, come del resto dimostrerebbero le rispettive antitesi.

E però — dice il Wundt — le antitesi delle antinomie matematiche, come si presentano, non sono contraddette dalle tesi. Difatti le dimostrazioni delle tesi presuppongono già il concetto di infinito; p. es. dicono; « Denn man nehme an, sie (die Welt) sei unendlich angedehnt... »; quindi questo concetto è implicito tanto nelle dimostrazioni delle tesi che in quelle delle antitesi; nelle prime, in quanto esse se ne distaccano, nelle seconde in quanto queste vi fanno ritorno. Ma v'ha di più: se il concetto di infinito fosse in entrambi i casi il medesimo, nel contraddittorio dovrebbe o la tesi o l'antitesi aver ragione; e viceversa, se le due forme di dimostrazione fossero entrambe giuste, il concetto di infinito non dovrebbe essere identico. Ora, nel caso presente, l'argomentazione delle tesi della prima antinomia

matematica, presuppone il concetto di un infinito già ammesso, di una totalità infinita, che sarebbe poi quello del trasfinito, secondo lo intende lo stesso Wundt¹⁾, ossia ancora un concetto trascendente, che conduce a contraddizioni se lo si applica alla concezione empirica del mondo. Invece le antitesi si riferiscono al concetto del « senza fine » o « infinito », che è compatibile con una tal concezione empirica, essendo soltanto un progresso al di là di ogni limite dato, e non un infinito presupposto come già dato. Il valore positivo delle dimostrazioni delle tesi sta in ciò, che fanno vedere la contraddizione che vi è nell'applicare al problema del mondo il concetto di infinito trasfinito, e quindi hanno ragione in quanto affermano che il mondo è finito, ma non come un infinito dato nella sua totalità. Quindi — dice Wundt — di fronte alle antitesi, le tesi sarebbero in giusta contraddizione ove si avesse il concetto di infinito come di finito illimitato, anzichè quello di un trasfinito, essendo i due concetti ben diversi, come mostrò Hegel con la sua distinzione del vero e del falso infinito, e G. Cantor col suo infinito proprio ed improprio. Ora, poichè il trasfinito è presupposto come dato, e poichè invece l'infinito (nel caso delle antinomie si tratterebbe dell'infinito) sta essenzialmente in ciò, che non può mai essere dato, non si potrà che escludere il concetto del trasfinito, tanto più che la dimostrazione che il mondo non può essere una grandezza finita data, non porta con sè che essa sia una grandezza infinita data, e neppure viceversa. Adunque nelle antinomie matematiche, non essendo identico il concetto di infinito nelle tesi e nelle antitesi, non si può avere neppure una vera antinomia o contraddizione tra gli argomenti delle une e delle altre.

Quanto alle antinomie dinamiche, la terza, come vedemmo, presuppone la causalità, ed è, giusta il pensiero di Kant, e a differenza del tempo e dello spazio, una

¹⁾ *Logik*, II, s. 128.

sintesi del disforme. La tesi, che afferma finita la causalità del mondo, e l'antitesi che la afferma infinita, possono essere vere entrambe. Kant considera la causalità da due punti di vista: quello della causalità derivante dalla libertà, e quello della causalità della natura. Quindi Wundt avverte che pure in questa antinomia si tratta di argomenti non contraddittorî ma dialettici. Contraddittorî — osserva il Wundt — sarebbero due argomenti così posti: « Il mondo è o infinito o non infinito »; e non argomenti come questi altri: « Il mondo è o infinito o finito », perchè in questo secondo caso quando si afferma che il mondo è finito, non solo si nega che sia infinito, ma di più si afferma che è finito.

L'antinomia dinamica si riduce quindi anch'essa, come le matematiche, a una pura apparenza dialettica, e però le tesi e le antitesi sue hanno entrambe ragione, le prime in quanto considerano la questione sotto il punto di vista della cosa in sè, le seconde perchè vedono il mondo come natura o « *mundus phaenomenon* ». Ora, per ciò che concerne le tesi, è a osservare che, secondo Kant, la causalità, come concetto intellettuale, non può applicarsi che ai fenomeni e non alla cosa in sè. Quindi nelle tesi si ammette il carattere intelligibile come causa dell'empirico, e così si ammette l'incondizionato e l'indipendente da cause ulteriori. Ma con ciò si ottiene quel concetto kantiano della causalità, che qui sopra accennammo, cioè quello della causalità mediante la libertà, ossia di una causa, dalla quale dipende il fatto empirico, ma che non dipende essa stessa, una specie di « causa sui ». Questa causa è adunque la volontà, che passa dal trascendente alla realtà empirica, e costituisce, per usare la espressione del Wundt, « *die einzige schmale Brücke, die aus der Welt der Erscheinungen in das Reich des Uebersinnlichen hinüberführt* ». Con tale concetto della causalità, Kant respinge in questo caso l'applicazione di concetti dell'esperienza al trascendente, conformemente alla sua cura di sottrarre la volontà morale alla causalità; perciò nelle tesi e nelle antitesi

dell'antinomia dinamica sono presenti questi due punti di vista: una volta il decorso di carattere empirico della causalità illimitata (antitesi), un'altra volta il carattere intelligibile libero sottratto ad ogni causalità (tesi).

Per ciò che riguarda le tesi, va notato inoltre quello che fu notato a proposito delle tesi delle antinomie matematiche, che, cioè, vi si presuppone la infinita totalità, ossia l'infinito già dato ed ammesso, che è tanto più incompatibile in questo caso, in cui si ha una maggiore dipendenza dalle condizioni dell'esperienza. Nelle antitesi invece si muta concetto: p. esempio, l'impossibilità di una massa finita (3.^a antitesi, corrispondente alla 2.^a antinomia, trasportata dal campo delle antinomie matematiche a quello delle dinamiche), e l'impossibilità di una limitazione finita della causalità futura (6.^a antitesi, corrispondente alla 3.^a antinomia, dinamica), si dimostrano indicando che esse condurrebbero a contraddizioni ove si presupponesse uno spazio cosmico infinito; in esse sarebbe adunque presente il concetto di un infinito già concesso, già dato, l'infinito trasfinito, di cui fu più sopra tenuto parola; e ciò tanto per lo spazio che per la massa. Precisamente nella 3.^a antitesi si presenta l'infinito della massa connesso con il trasfinito dello spazio e del tempo; nella 6.^a, l'infinito della causalità è congiunto con il trasfinito dello spazio e della massa; e ciò, dice il Wundt, dimostra che i termini non sono esatti, perchè questa totalità infinita di spazio, tempo, e massa non può mai essere data,

La 4.^a e la 5.^a antitesi sono in una condizione diversa. La 4.^a (che corrisponde anch'essa alla 2.^a antinomia, trasportata da quelle matematiche a quelle dinamiche) dimostra la infinita divisibilità della materia, mediante la necessità che ciascuna particella piccolissima ci sia data come un effetto misurabile e che essa possa a sua volta pensarsi ancora come divisibile; il che presuppone un principio della causalità in un infinito passato. Ora, per quel che s'è detto sul concetto di causalità, che non può

rendersi indipendente dalle condizioni della esperienza, noi qui non ci troviamo più di fronte alle generali forme intuitive dello spazio e del tempo come nelle antinomie matematiche, ma piuttosto alla necessità di arrestarci a quei punti finali, a cui ci costringono le nostre conclusioni sui dati della esperienza.

Al di là di tali limiti può avverarsi ancora tale regresso, ma nel campo puramente spaziale e temporale, che è poi quello delle antitesi delle antinomie matematiche. Quei limiti sono da considerarsi come relativi, perchè fondati necessariamente sulla limitazione della nostra conoscenza per esperienza, e però sono suscettibili di concedere un ulteriore progresso di questa conoscenza. È questo il vero esempio del kantiano « regressus in indefinitum », nel quale non si prosegue oltre ogni limite dato, in un modo ben determinato mediante la sintesi precedente, ma si prosegue sino ad un determinato limite, oltre cui il procedere è possibile in generale, ma come indeterminato rispetto al suo modo.

Quindi, per tutte queste ragioni, nella 4.^a e nella 5.^a antinomia si trova, accanto al regresso in infinito, che è inerente alle proprietà spaziali e temporali del mondo, anche il regresso in indefinito, che è invece inerente ai concetti della massa e della causalità; e il Wundt pensa che la divisibilità della massa materiale non sia perciò quella dello spazio, cioè non sia nè finita nè infinita, ma piuttosto limitata indeterminatamente, (« unbestimmt begrenzte »), e così pensa anche della serie causale. Questa osservazione dovrebbe pure estendersi alla 3.^a e 6.^a antitesi su citate, perchè anche lì si ha il concetto della massa e della causalità; sicchè in generale. in tutti e quattro i rapporti, sotto cui le antinomie dinamiche trattano il problema cosmologico, ricorre il « regressus in indefinitum ».

Difatti, non solo la divisibilità, ma anche la estensione della materia al di là dei confini di quel mondo che si rivela all'osservazione astronomica, si protende nell'indeter-

minato¹⁾; e, quanto alla divisibilità della materia, la fisica e la chimica hanno bisogno di ricorrere ad elementi non ulteriormente divisibili per i nostri mezzi di ricerca, siano essi atomi o punti materiali (nella fisica matematica), o centri di forza, ecc.; sebbene in astratto sia sempre possibile suddividere questi ultimi elementi, che per il nostro regresso empirico sono indivisibili. Così per la causalità. Difatti per ciascun sistema cosmico si giunge ad ammettere uno stato iniziale qualsiasi, come lo ammettono Kant e Laplace nelle loro ipotesi intorno al nostro sistema solare. Anche qui si fa capo necessariamente a un limite determinato; e, posto che noi possiamo oltrepassarlo, non si farà che arrestarci più in là a un altro limite ben determinato. La stessa cosa si ripete per la causalità nel futuro. Se, per esempio, la teoria meccanica del calore ci conduce ad una cessazione dei mutamenti causali e quindi ad uno stato limite, ciò sarebbe vero per il nostro sistema o, in ogni caso, per singoli sistemi e non per il decorso degli avvenimenti di tutti gli altri sistemi. Insomma si rimane, con queste antinomie dinamiche, nel regresso in indefinito; ma non si deve dimenticare che, essendo la infinità del mondo, per noi, in rapporto allo spazio ed al tempo, un reale regresso in infinito, appunto per questo è relativo il significato di uno stato iniziale e finale quale lo si ricava dal regresso empirico. Insomma, per quanto riguarda i concetti di massa e di causalità, impliciti nelle antinomie dinamiche, la nostra esperienza ci porta sempre a determinati limiti finiti; questi limiti, in conformità della estensione

¹⁾ In una nota del lav. cit. il Wundt precisa anche il valore di « unbegrenzt », cioè dell' illimitato. « Illimitato » è ciò che non ha limiti determinati: « darin liegt, dass es bei einer unbegrenzten Grösse immer einen bestimmten endlichen Werth gibt, der, im Unterschiede von der infiniten Grösse nicht überschritten werden kann, ohne dass aber, wie bei der endlichen und begrenzten Grösse, durch diesen Werth die Grösse selbst absolut bestimmt wird ». Esso è, tutt' al più, una grandezza che attende la determinazione del limite.

e divisibilità infinite dello spazio e dell'infinito decorso del tempo, non possono essere determinati da noi come gli ultimi limiti in senso assoluto. Quindi la natura del regresso in indefinito sta nella sintesi che si compie nel campo del finito, e non nell'infinito, come avviene per il regresso delle antinomie matematiche. Ne viene che per Kant il vero regresso infinito è quello delle antinomie matematiche, ossia delle forme della pura intuizione, mentre nelle antinomie dinamiche, che sono dipendenti dalle nostre conclusioni non più sulle sole intuizioni ma sui dati della esperienza, il regresso è indefinito, e può solo pensarsi infinito ove esso, al di là del limite imposto dalla esperienza, ritorni a godere delle proprietà delle intuizioni pure di tempo e spazio.

Per questi motivi il Wundt vede nella soluzione delle antinomie kantiane della ragione pura, il ricorso a diverse forme o applicazioni del concetto d'infinito. Il regresso in indefinito delle antinomie dinamiche riposa sul concetto del finito relativo, al di là del quale può ancora procedersi senza fine. La distanza di una stella fissa o la grandezza di una molecola vengono subsumte (« subsumirt ») senz'altro sotto il concetto di infinito, sebbene qui si tratti di grandezze finite, che sono soltanto incommensurabili, ossia troppo grandi o troppo piccole per i nostri mezzi di misura. Se questo è uno dei concetti di infinito, presenti nelle dimostrazioni degli argomenti delle antinomie kantiane, un altro e ben diverso è quello di trasfinito e di infinito. Ed anche tra infinito e trasfinito — osserva il Wundt — è a farsi una distinzione. Il concetto di infinito considera la grandezza, di cui si tratta, in rapporto alla sua origine, mentre quello di trasfinito la riguarda in relazione al suo essere, all'essenza; quindi si dirà la serie dei numeri infinita o senza fine, se la si pensa come una reale enumerazione, trasfinita se si pensa la sua somma raccolta in un concetto solo. Secondo questo criterio, due parallele possono prolungarsi infinitamente senza che si taglino, ma il loro punto d'incontro giace nel trasfinito. Non si può pensare un'ap-

plicazione del concetto di trasfinito se non si dà anche occasione alla formazione di quello di infinito; non viceversa. Difatti si può pensare un infinito, il cui valore è quello di una finita grandezza a cui infinitamente si tende, come nel caso delle frazioni $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, che tendono al valore finito 1, o in quello della circonferenza che ritorna infinitamente in sè stessa senza oltrepassare il valore $2\pi r$ o in quello ancora di una serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1, \dots$ che oscilla infinitamente tra certi valori massimi e minimi finiti. Per questo, il concetto di infinito comprende due casi, quello in cui il processo di infinito è pensato come compiuto in un trasfinito, e quello in cui esso conduce ad una grandezza finita: il primo caso è possibile solo nella trattazione matematica astratta dei concetti, ove si dà il regresso in infinito, ossia ove si tratta soltanto della forma pura (intuizione) della esperienza; il secondo è invece inerente, non più alle forme pure della esperienza, al tempo e allo spazio, ma agli oggetti dello spazio e agli avvenimenti del tempo, cioè al contenuto della esperienza stessa. Nelle forme matematiche pure di ogni esperienza, si può dunque passare dall'infinito al trasfinito; nella esperienza stessa si può invece passare dall'infinito al finito. In quest'ultimo caso, non appena raggiunti i limiti della esperienza, le grandezze si mutano in infiniti apparenti, fra cui si distinguono l'indefinito e l'incommensurabile. Da queste distinzioni dei concetti di infinito il Wundt trae il seguente schema:



Il trasfinito è ammesso come una finzione concettuale, che non può trovar applicazione nel campo empirico, e consiste nell'applicazione delle proprietà supposte per la grandezza finita e sottratte alla infinita, ossia la compiutezza, l'esser terminato.

Il trasfinito è insomma, in fondo, una applicazione del finito all'infinito, un infinito pensato come finito. Ora, siccome s'è visto che al trasfinito si può passare dall'infinito, così si ha che il trasfinito si oppone al finito in quanto ha origine dall'infinito, e si oppone all'infinito in quanto è pensato come finito. Per questo motivo il Wundt inclinerebbe a chiamare infinito improprio, come quello che è pensato alla stregua di un finito, il trasfinito anzichè l'infinito, a differenza di Hegel e di G. Cantor. Differente è il concetto di infinito inerente all'indefinito e all'incommensurabile: esso è, come s'è visto, soltanto un infinito apparente. L'incommensurabile è tanto il grande quanto il piccolo non misurabile coi nostri mezzi di misura. L'indefinito è per noi sempre un incommensurabile, quantunque non in modo del tutto rigoroso; mentre l'incommensurabile si riferisce sempre a ciò che ha un limite. Incommensurabile è, p. es., la distanza di una stella fissa; il che non vuol dire che essa si trovi ad una distanza senza limiti, ma ad una distanza che i nostri mezzi non ci concedono di misurare; invece diciamo senza limiti l'inizio del nostro sistema cosmico secondo causalità, e così pure diciamo non soltanto non misurabili, ma senza limiti gli atomi nel senso della piccolezza, perchè in questi due casi non abbiamo conoscenza di stati anteriori o di elementi risultanti da ulteriori suddivisioni. Per tal modo il Wundt ci dà un'altra specie di schema, che comprende da una parte il campo matematico coi due veri infiniti, cioè l'infinito e il trasfinito, e dall'altra il campo fisico coi due infiniti apparenti, cioè l'indefinito e l'incommensurabile. Come, per mezzo delle forme del tempo e dello spazio, il concetto matematico dell'infinito influisce su quello fisico, così d'altra parte, mediante le applicazioni fisiche della matematica, l'indefinito e l'incommensurabile fanno sentir la loro influenza sulla ricerca matematica. Il metodo infinitesimale trae impulso dalla trattazione di problemi fisici, in cui si hanno solo degli infiniti apparenti; e però sta appunto alla matematica l'operare la loro trasformazione in veri concetti

dell' infinito. La matematica in questi casi applica, per mezzo del calcolo differenziale, a problemi fisici, in cui si danno quantità illimitate e soprattutto quantità non misurabili (tutte però finite), il concetto vero di infinito. È vero — aggiunge il Wundt — che si danno ancor oggi applicazioni matematiche e teorie del differenziale, che capovolgono l'ordine qui sopra indicato, in quanto considerano le grandezze infinitesime come finite, e soltanto non misurabili o illimitatamente piccole; ma si comprende che qui si inverte il vero concetto matematico di infinito, sostituendo ad esso quello su indicato dell' infinito apparente (indefinito, incommensurabile). La causa di questo errore sta, pel Wundt, in parte negli scambi dei due veri concetti di infinito, e nella già notata affinità del trasfinito col finito. In realtà il metodo infinitesimale fissa il concetto di infinito soltanto come sussidio al calcolo, e, ciò facendo, considera il processo infinito come compiuto, ossia sostituisce all' infinito il trasfinito. Questa sostituzione è quasi trascurata a preferenza nel campo del concetto inferiore di infinito, nell' infinitamente piccolo, in cui il simbolo infinitesimale può pensarsi tanto nel senso della diminuzione all' infinito di una grandezza data, quanto in quello del processo già compiuto di una tale diminuzione (difatti si può osservare che è data l' infinita totalità degli infinitamente piccoli nel corpo finito, entro cui quelli si pensano). E certamente il fissare il concetto di limite in un determinato simbolo, importa il fatto che si pensa terminato il procedimento infinito; e così si viene ancora una volta a confermare la facilità dello scambio del finito con l' infinito terminato, anche nel campo del metodo infinitesimale.

Quanto alle premesse di una geometria non euclidea, che muterebbero le premesse intorno alla forma pura dello spazio ed eventualmente anche a quella del tempo, il Wundt si richiama tra l' altro al suo lavoro già citato intorno al problema cosmologico, e osserva che, finchè la nostra propria « *Raumanschauung* » rimane invariata, noi possiamo

riferire i mutamenti (per es. nella direzione dei raggi luminosi, che non sarebbe più retta, ma curva) sempre e solamente alla materia nello spazio, ossia a mutamenti nelle proprietà fisiche dei corpi, nelle leggi della propagazione della luce, ma non allo stesso spazio. Se così fosse, egli dice, e se quindi si ammettesse che sotto date circostanze si possa impiegare la retta non più come mezzo di misura di distanze nello spazio, si potrebbe anche ammettere alla stessa stregua l'ipotesi che in una parte qualsiasi del mondo non sia più vero che $A = A$. Così pure, dice il Wundt, ove si ammettano infinite azioni di gravitazione di un corpo, e quindi non più la legge di Newton, secondo cui esse corrispondono ad una serie convergente e perciò non infinita, si potrà bensì concedere che la legge di Newton valga nello spazio sferico, ma si dovrà ammettere che una tale presupposizione è per lo meno arbitraria, « denn wir haben allen Grund, anzunehmen, dass die Fortpflanzung der Kräftewirkungen im Raum von der Beschaffenheit des Raumes abhängt, und dass also das Newton'sche Gesetz, ähnlich wie die analoge Fortpflanzung von Licht, Schall u. s. w., an den dreidimensionalen ebenen Raum gebunden ist ». Naturalmente, queste considerazioni presuppongono concepito lo spazio come una forma pura, separata dai corpi e però sempre soggettiva; tanto è vero che lo stesso Wundt ne dà la conferma con le seguenti parole: « Der Raum ist die Form, in welche unser Bewusstsein die Objecte der Aussenwelt ordnet. Die Gerade ist kein ausser uns liegender Gegenstand, den wir als Masstab an die Dinge anlegen können, sondern eine Constructionslinie, die wir selbst ziehen, die in der abstracten und exacten Form, in der wir sie als Messungshilfsmittel verwenden, in gar keiner äusseren Erfahrung vorkommt, ja die nicht einmal als Abstraction von äusseren Objecten möglich ist, weil keine Abstraction Eigenschaften zurückbehalten kann, die in keinem der Objecte, auf die sie sich bezieht, verwirklicht sind ». E a questo punto il Wundt accenna più spiccatamente al carat-

tere soggettivo, ma anche di origine empirica, delle forme di tempo e spazio: « Hierin verräth sich eben der subjective, lediglich die Einwirkung von Empfindungen auf unser Bewusstsein voraussetzende Ursprung des Raumes wie der Zeit, in welchem zugleich der Grund liegt, dass in Bezug auf diese Anschauungsformen das kosmologische Problem auf einen endlosen, nicht bloss auf einen unbegrenzten Regressus zurückführt ». Dunque lo spazio è considerato come una forma, mentre la materia è legata al contenuto specifico della nostra esperienza.

Per questo non sarebbe impensabile una quantità finita di materia entro uno spazio infinito: questa ipotesi può solamente essere mancante di probabilità, e non raccomandabile. A noi mancano i mezzi necessari per decidere tra questa e qualsiasi altra delle possibili ipotesi. Ma, p. es. nel caso della tesi della 3.^a antinomia, in cui è dato un argomento in favore della limitazione della massa, cioè la necessità di un punto medio della massa, si può togliere ogni contraddizione dicendo, non che la gravitazione non ha bisogno di nessun tempo per propagarsi, ma che questo tempo è trascurabile per la parte di mondo accessibile alla nostra osservazione.

Abbiamo così notato anzitutto la necessità di un punto di vista critico-conoscitivo per la nozione teoretica del problema dell'infinito, in quanto è indispensabile separare fra di loro varî concetti dell'infinito ed esaminare partitamente il valore di ciascuno. Non si può pretendere di discutere intorno all'infinito se non si ha un'idea il più possibilmente chiara non solo di ciò che si vuol discutere, ma di ciò che esso rappresenta nel pensiero, con quale funzione esso sia in rapporto, quale ne sia l'origine e il modo di essere. Nulla si può separare dalla coscienza e dal pensiero, onde la necessità di ricorrere, ove si possa e si debba, all'aiuto della psicologia e della teoria della conoscenza.

Ora noi abbiamo potuto vedere come il concetto di

infinito sia in rapporto diretto con quello del finito, e come esso possa condurre la ragione a contraddizioni, le quali sono però necessarie e perciò non false, come vorrebbe Kant, ma aventi un valore reale di pensiero.

Più specialmente risulta da quanto abbiamo esposto, che vi è un modo di concepire l'infinito, il quale dipende piuttosto da condizioni empiriche, e che ve n'è un altro più essenziale, il quale è in rapporto con forme pure del pensiero, e precisamente col pensiero matematico, ed è, e soprattutto deve essere, una possibilità di oltrepassare un ultimo limite finito assegnato, anzichè essere la totalità finita di un infinito. A questo proposito si è accennato a un infinito proprio e improprio, vero e falso, e si è fatto il nome di Hegel. Onde qui non ci sembra fuor di proposito riassumere brevemente alcuni pensieri di Hegel intorno all'argomento che ci occupa.

Anzitutto occorre premettere che dell'infinito Hegel parla nella « Logica », ossia in quella parte del suo sistema, che ha un'importanza speciale, in quanto è supposta anche da altre parti come la « Filosofia della Natura » e la « Filosofia dello Spirito ». Tre sono le Logiche, che Hegel ha pubblicato. Prima, in ordine di tempo, vengono due volumi contenenti tre parti, di cui le due prime comparvero nel 1812 e la terza nel 1816. Queste tre parti costituiscono nel loro insieme la « Grande Logica », in cui son raccolte ampiamente le teorie e deduzioni hegeliane. Nel 1817 comparve la prima edizione della « Enciclopedia » di Hegel, la quale contiene un primo estratto del suo sistema, ed anche nuovamente la « Logica », ma ridotta ad una serie di tesi o proposizioni sommarie, che condensano in sè le teorie e le deduzioni della « Grande Logica ». Nel 1827 Hegel pubblicò una seconda edizione della « Enciclopedia », in cui per la terza volta compare la « Logica », che è quella della prima edizione della « Enciclopedia », con l'aggiunta di una specie di commentario sotto forma di corollari, (« Zusatz »), che seguono la proposizione principale spiegandola e sviluppandola.

Ora noi ci riferiremo alla seconda Logica, ossia a quella della prima edizione dell'Enciclopedia, essendo essa la più condensata, ed avendocene il Véra offerto una ottima traduzione fornita di una « Introduzione » all'opera hegeliana, e inoltre di un discorso, di una prefazione, di una « Introduzione » dello stesso Hegel, con un commentario esauriente, in cui continui sono i riferimenti alla Grande Logica e al sistema hegeliano in generale¹⁾.

Abbiamo detto qui sopra che la Grande Logica contiene tre parti. Queste sono la scienza dell'essere, la scienza dell'essenza, la scienza del concetto o nozione, e corrispondono realmente nel pensiero di Hegel a tre parti della logica. Dal punto di vista della forma, l'idea logica ha tre aspetti, cioè è l'idea logica astratta, dialettica, speculativa, ed appartiene rispettivamente alla logica dell'intelligenza, della ragione negativa, e della ragione positiva. Ma queste non sono tre parti separate, bensì tre momenti di ogni realtà logica, ossia di ogni concetto e di ogni verità. Le tre parti invece, in cui la Logica si divide, sono quelle su citate dell'essere, dell'essenza, del concetto o dell'idea, che corrispondono rispettivamente alla scienza dal pensiero a) nel suo stato immediato o in sè, b) nella sua riflessione o mediazione; è l'essere per sè e l'apparire del concetto, c) nel suo ritorno su sè stessa e nel suo sviluppo entro sè stessa; è il concetto in e per sè.

Per comprendere questa classificazione, crediamo utile riferire il pensiero, più ampiamente espresso, dello stesso Hegel nella Grande Logica²⁾: « La logica deve operare la fusione dell'essere e del concetto in modo che l'essere appaia come concetto puro, e il concetto come l'essere più reale e più vero. L'essere e il concetto sono i due momenti della logica; ma bisogna rappresentarseli come

¹⁾ *Logique de Hegel*, trad. pour la première fois et accomp. d'une introduction et d'un commentaire perpetuel par A. Véra, Paris, 1859, tome I; tome II, pag. 1, 7, 9, 42, 67, 197, 381, etc.

²⁾ *Grande Logique*, Divis., p. 30-52.

inseparabili, e non tali quali ci appaiono nella coscienza. Il *concetto* si divide in *concetto dell'essere* («*Seiender Begriff*») o *concetto in sè*, e *concetto come tale o per sè*. Il primo si applica alla natura inorganica, il secondo agli esseri organici, agli animali e all'uomo. Ma siccome questi due momenti, che formano l'unità e la totalità del concetto, si differenziano, essi devono essere uniti da un termine medio. Il passaggio dall'*essere immediato* al *concetto* si fa a traverso una serie di determinazioni riflesse («*Reflexionsbestimmungen*»), dove l'*essere* tocca, per così dire, all'esistenza interna («*Insichsein*») del concetto, ma senza elevarsi completamente sino ad esso; il che fa sì che in questa sfera esso non è ancora per sè, e che non ha ancora se non un rapporto esteriore con l'essere immediato». Ciò premesso, si intende come Hegel proceda dalla scienza dell'«*essere*» verso la scienza del «*concetto*». Cominciando adunque dall'«*essere*», egli dice che è il «*concetto in sè*», non «*in e per sè*»; e si deve partire dall'«*essere puro*», perchè questo è anche ben pensato puro, come essere immediato, semplice e indeterminato, il quale non è che l'astrazione pura e, di conseguenza, la negazione assoluta («*das Absolute-negative*»), che, considerata nel suo stato immediato, è il «*non essere*». Ma il «*non essere*», in quanto forma una cosa immediata e identica a sè, non differisce dall'«*essere*»; e la verità dell'«*essere*» e del «*non essere*» si trova, di conseguenza, nell'unità di tutti e due; la quale unità è il «*divenire*» ossia ciò che è e non è.

Ma l'«*essere*» e il «*non essere*», in quanto non fanno che una cosa sola nel «*divenire*», spariscono. Il «*divenire*», in seguito a questa opposizione ch'egli contiene, passa nell'unità, in cui i due contrari si trovano soppressi; il risultato di questo passaggio è l'*esistenza*. Questa «*esistenza*» è l'«*essere*» con una determinabilità, la quale è immediata, e in cui non vi è che «*l'essere*»; e ciò è quello che costituisce la «*qualità*». Quindi la

« qualità » è l'« esistenza », che si riflette su sè stessa in questa determinabilità, è il « Daseiendes » l'« Etwas ». La « qualità » in quanto « determinabilità » che l'« essere » possiede di fronte alla negazione (negazione che è contenuta da essa, ma che se ne distingue), è la « Realität », la realtà.

La negazione, che non è più il niente astratto, ma che è posta « als ein Dasein und Etwas », non è che una forma nuova di questa esistenza, è un « Etwas und Andersein ». Siccome quest'altra esistenza è una determinazione della qualità, dà luogo a una nuova categoria, quella del « Sein-für-anderes », l'essere per [un] altro, che non è che l'estensione dell'esistenza determinata. L'« essere » della qualità, come tale, costituisce, di fronte a questo rapporto, « das An-sich-sein », l'« essere in sè ». Se quest'ultimo lo si considera come non contenente alcuna determinabilità, non si ha che l'astrazione vuota dell'essere. E qui è un punto importantissimo per noi.

Perchè, siccome nell'« esistenza » si ha la determinabilità, la quale si è identificata con l'« essere », questa determinabilità posta come negazione è il « Grenze » o « Schranke », è il « limite ». Quindi l'« Andersein » non è più un elemento indifferente ed estraneo, ma un momento che gli è inerente (all'essere in sè). L'« Etwas » il « Daseiendes », il « qualcosa » è, per la sua qualità, dapprima « finito », poi « variabile », in modo che al suo essere appartengono il « finito » e la « variabilità ».

Ma l'uno dei due termini è anche l'altro, e l'altro è anche ciò che è il primo, e, di conseguenza, questo diviene l'altro, e così di seguito, all'infinito. Difatti, se il limite è essenziale all'« essere », esso limite è appunto quello che costituisce il qualcosa, ed è ancora la sua negazione, perchè questa negazione si chiama l'« altro »; e siccome l'« altro » è anch'esso limite, e questa limitazione è nuovamente il qualcosa che diviene ancora l'altro, così si comprende che il « qualcosa » diventa l'« altro », anzi è

nell' « altro », e l' « altro » è nel « qualcosa », e così via all'infinito.

Ecco qui adunque ricorrere il concetto dell' « infinito ». Ma Hegel avverte subito che qui si tratta di un « infinito falso (« schlechte ») o negativo », perchè non contiene che la negazione del « finito », la quale sempre [si riproduce, e nella quale il « finito » si presenta come dovendo essere, non come essendo soppresso.

Il progresso infinito non fa sparire la contraddizione; ciò che è proprio del « finito » è di contenere i due termini opposti, e il progresso infinito non è che la riproduzione incessante e alternata dell'uno dei due termini, di cui l'uno chiama l'altro. Questo infinito sarebbe dunque per Hegel soltanto un « indefinito », in cui si riproduce il medesimo termine o la medesima contraddizione, senza poter giungere a un risultato o a una determinazione nuova; ossia solamente un infinito della intelligenza, che non sa conciliare le opposizioni. Ora, se tale è il falso infinito, Hegel osserva ancora che in fondo a quel rapporto tra l' « altro » e il « qualcosa » si dà questo, che ciascuno dei due termini è e contiene l'altro, in modo che il termine che passa nell'altro, è lo stesso di quello in cui passa, e che passando nell'altro non fa che ritornar su sè medesimo. Qui è la sorgente del « vero infinito », la quale è costituita dall'unità dei termini di quel rapporto, ed è quindi il ritorno di un termine in sè medesimo per l'intermediario dell'altro e nell'altro.

Considerando il rapporto dal lato negativo, si vede che ciò che cambia è l' « altro »; e così « es wird das Andere des Anderen »: e in questo modo l'essere si produce di nuovo, come negazione della negazione, come « essere per sè ». Aggiunge Hegel che il dualismo, il quale lascia sussistere l'opposizione del finito e dell'infinito, non tien conto di questa semplice osservazione che, se si separano, si otterrà un rapporto, in cui finito ed infinito costituiranno ciascuno una esistenza distinta e particolare. Ma

allora un infinito avente un'esistenza particolare, e che ha accanto a sè il finito, trova in quest'ultimo la sua limitazione, e quindi non è più ciò che deve essere, ma è il « finito ». Sicchè in un simile dualismo, è il « finito » che ha un'esistenza assoluta. E quella metafisica, la quale pone una tal separazione assoluta, non è per Hegel che la metafisica dell'intelligenza più volgare, e ciò che essa ottiene non è che il « progresso indefinito »; cioè ottiene dapprima un finito senza un'esistenza indipendente ed assoluta, e poi lo rappresenta, di fronte all'infinito, come sussistente per sè medesimo e libero da ogni limitazione. Ma allora il pensiero, che crede di elevarsi per tal modo all'infinito, s'accorge d'aver conseguito un risultato opposto a quello atteso; perchè si trova in presenza di un infinito, che non è altro che il finito, un finito che non cessa mai di presentarsi ad esso, e di cui esso fa un'esistenza assoluta. D'altra parte, se si vuol ricorrere all'unità dell'infinito e del finito (e qui l'autore si riferisce al « Filebo » di Platone), bisogna ammettere che, se il finito non fa che una cosa sola coll'infinito, non può sussistere quale esso è fuori di questa unità; e le sue determinazioni devono almeno subir delle modificazioni, come l'alcalino, che, combinandosi con l'acido, perde delle sue proprietà. Ed è appunto ciò che toccherebbe all'infinito, il quale, formando uno dei due membri della negazione, dovrebbe, riunendosi all'altro, modificarsi; il che capita realmente all'infinito astratto ed imperfetto dell'intelligenza.

Ma il « vero infinito », che non si comporta come l'acido, — dice Hegel — è altra cosa: « la negazione della negazione non è una neutralizzazione; l'infinito, negando il finito, non lascia sussistere che sè medesimo, costituisce l'affermazione, e il finito non è che la negazione scomparsa.

Ora, poichè nell'« essere per sè » si produce la determinazione dell'« idealità », e poichè appunto ciò che costituisce la verità del finito è, più che la sua realtà, la sua « idealità », così anche l'infinito dell'intelligenza, il

quale è, come s'è visto, un'esistenza finita perchè lascia sussistere accanto a sè il finito, non ha la sua verità che nella sua esistenza ideale. Questa idealità del finito è per Hegel il principio fondamentale della filosofia; nè vi è, egli dice, vera filosofia all'infuori dell'idealismo: ma proprio ciò che a questo proposito importa evitare, è di prendere per l'infinito ciò che, con le sue determinazioni, non costituisce che un'esistenza particolare e finita.

Spiega qui il Véra che le categorie del finito sono pur momenti dell'idea, ma dell'idea che pone la differenza e l'opposizione, mentre nella categoria dell' « essere per sè » o del « Fürsichsein » l'idea rientra nella sua esistenza ideale per ciò stesso, che la differenza e l'opposizione dei termini spariscono. Ciò si spiega con il seguente pensiero di Hegel, che « la vera idealità non è quella che lascia fuori la realtà (una tale idealità non sarebbe che un'astrazione), ma quella che la comprende e che ne fa la verità ».

A questo punto ecco come Hegel passa dalla « qualità » alla « quantità », rispetto all'essere. L' « essere per sè », in quanto ha un rapporto con sè stesso, non è che uno stato immediato, e, in quanto costituisce un rapporto della negazione con sè stessa, è il « Fürsichseiendes, das Eins », l' « uno ». È un momento, il quale esclude ogni differenza, e dove l' « altro » è scomparso.

Il rapporto di un termine negativo con sè stesso essendo un rapporto negativo, l' « uno » si differenzia e si respinge esso stesso e pone più « uni ».

La determinabilità qualificativa che ha attinto nell' « uno » la sua perfetta esistenza, non è più, grazie alla « repulsione » e alla necessariamente conseguente « attrazione », che un momento, il quale è passato nell'essere determinato come « quantità ». La quale è l'essere puro, in cui la determinabilità non è più posta come non facente che una cosa sola coll'essere stesso (come avviene nella « qualità »), ma come indifferente (« gleichgültig ») e distrutta. Ossia, in altri termini, la quantità è la deter-

minabilità, che è divenuta indifferente per l'essere, cioè il limite che non è più un limite. Difatti nel « qualcosa », il limite, come qualità, è la sua determinabilità essenziale: ma « quando si tratta di un limite quantitativo, per esempio del limite d'un campo, si vede, che se si cambia il suo limite, un campo non cessa d'essere un campo, mentre, se si cambia il suo limite qualitativo, la determinabilità che lo fa campo diviene bosco, prato, ecc. Il rosso non cessa d'essere il rosso, perchè è più o meno vivo; non cessa d'essere il rosso che quando perde la sua qualità » ¹⁾.

Ora, com'è naturale, il problema dell'infinito ritorna più di proposito nella quantità.

Anzitutto, parlando della grandezza discreta e della grandezza continua, Hegel dice che l'antinomia di spazio, tempo e materia circa la divisibilità infinita o l'indivisibilità dei loro elementi, deriva da ciò, che nel primo caso la quantità è considerata come continua e nel secondo come discreta: nel primo, questi elementi sono divisibili all'infinito, nel secondo si giunge a un'ultima divisione, ossia a delle unità indivisibili: ma tanto l'una che l'altra determinazione sono incomplete. In ciò la posizione di Hegel rispetto a Kant non è la identica; perchè, mentre Kant, pur trovando nella ragione il fondamento delle antinomie, per risolverle aveva condannato la ragione stessa e negato ad esse una realtà oggettiva, Hegel riconosce loro un valore oggettivo, e trova che la loro vera soluzione consiste nel dimostrare la necessità dei due contrari, inoltre il passaggio dall'uno all'altro, e infine la loro unità. — Più innanzi viene un altro punto di capitale importanza.

Se il limite è divenuto identico con la totalità del quanto, (la quantità), di conseguenza — dice Hegel — come determinabilità « multipla » la quantità costituisce la grandezza « estensiva »; come determinabilità « semplice », la grandezza « intensiva » o il « grado ». La grandezza estensiva è nello

¹⁾ *Grande Logique*, liv. I, 2^e part., p. 209-11.

stesso tempo una grandezza intensiva, e reciprocamente. Ma è nel « grado » che si realizza il concetto della quantità determinata. Il « grado » è la grandezza, che è in uno stato di semplicità e d'indifferenza, così fatta, che la determinazione, che la fa una quantità limitata, essa la trova fuori di lei, in un'altra grandezza. Vi ha qui — dice Hegel — una contraddizione, che consiste in ciò « dass die fürsichseiende gleichgültige Grenze die absolute Aeusserlichkeit ist ». Il « grado », insomma, è una quantità immediata, che richiama immediatamente il suo contrario, una « mediazione » che va al di là della quantità che l'ha posta. Ed è ciò in cui consiste il « progresso infinito quantitativo ». Il « quantum » non solamente può essere aumentato o diminuito all'infinito, ma, giusta il suo concetto, deve sempre andare al di là di sè stesso. Il progresso infinito è il ritorno « gedankenlose » di una sola e medesima contraddizione, che, nella quantità, determinata, si realizza sotto la forma di « grado » ; il quale è adunque la quantità determinata, un « quantum », una molteplicità. In esso — spiega il Véra in base alla Grande Logica — si realizza quella determinazione della quantità, in cui una grandezza non è essa stessa se non in quanto essa è altra cosa che non sè stessa, e non è essa stessa che essendo altra cosa da sè stessa: quindi un grado ne richiama un altro, un limite un altro limite, ecc. Ma allora, se una quantità non solo può, ma deve necessariamente cambiare, essa è non un limite che « è », ma un limite che « diviene ». Ora un tal divenire trae con sè il « progresso infinito quantitativo » di cui s'è detto più sopra, ma che è un « falso infinito quantitativo », perchè non è altro che la ripetizione indefinita della contraddizione di un « quantum », che, avendo un limite, va al di là del limite, e perciò è la espressione, ma non la soluzione di questa contraddizione.

L'« infinitamente grande » e l'« infinitamente piccolo » non danno neppur essi la soluzione cercata, ma esprimono piuttosto la contraddizione nel suo più alto grado di intensità. Difatti essi sono delle quantità variabili, e, in quanto ces-

sano d'essere delle quantità, ne differiscono, non soltanto quantitativamente, ma anche qualitativamente: così con l'« infinitamente grande » si va alla ricerca di una grandezza o di un « quantum », ma di una grandezza che è « infinita », ossia che non è più una grandezza; e con l'« infinitamente piccolo » si cerca una quantità che è « assolutamente » ossia « qualitativamente » troppo piccola per ogni altra quantità, a cui quindi si oppone. Però, se in una tal serie indefinita di termini una grandezza è negata da un'altra grandezza, la quale è a sua volta negata ancora da un'altra, ecc., vero è che non si ha in tal caso soltanto la negazione, ma bensì la negazione della negazione, cioè un'affermazione, ossia il ristabilimento del primo termine, il qual primo termine ha già negato la prima negazione, che era l'infinito falso. Del resto questo infinito falso era sparito tanto nella prima quanto nella seconda negazione, perchè ci si trova sempre dinanzi ad una negazione indefinita del limite, e quindi al ritorno di un solo e medesimo termine, di un solo e medesimo limite, con cui si stabilisce il « vero infinito », la « qualità della quantità ». Ora la qualità della quantità è la proprietà, che questa ha di trovar la propria determinazione in un'altra quantità mediante l'intermediario della sua propria negazione: ossia, se la quantità non è che nel suo rapporto e per il suo rapporto con un'altra quantità, questa è la sua qualità. Quindi questa qualità della quantità è il « rapporto quantitativo » che si stabilisce con un'altra quantità mediante la negazione e la negazione della negazione ecc., ossia col ritorno al medesimo, che è poi il « vero infinito », giusta quanto abbiamo detto più sopra.

In tale « rapporto quantitativo » il « quantum » non è più dunque una determinabilità allo stato d'indifferenza, come vedemmo essere la quantità pura, ma è determinato qualitativamente in quanto legato a un altro « quantum ». Così, per esempio, nel rapporto di potenza (« *Potenzenverhältniss* »), la quantità esce di sè stessa senza cessar d'essere essa stessa, e rimane identica a sè stessa pur divenendo un'altra

da sè stessa: così la quantità si trova del tutto sviluppata e si pone tal quale è, ossia nella sua « qualità », cioè ancora « in e per sè ». — Quindi, se prima si aveva la « qualità », cioè l'elemento fisso e determinato dell' « essere », di fronte ad essa venne, per così dire, a collocarsi la « quantità » la, quale è invece l'elemento variabile ossia ciò che può essere aumentato o diminuito. Ora, ciò che aumenta e diminuisce deve esso pure possedere un elemento fisso e invariabile; onde la quantità contiene una contraddizione, e questa costituisce la dialettica. Questa dialettica ha per risultato il ritorno della qualità combinata con la quantità, ossia della « quantità qualitativa », la quale è la « misura ». La « misura » — dice Hegel — riunisce la qualità e la quantità in una unità immediata; essa contiene le determinazioni generali dei rapporti della quantità e della qualità, e quindi anche di una teoria matematica della natura. Misurando, noi determiniamo anche la qualità: così, volendo misurare la lunghezza e il numero delle vibrazioni dell'etere, abbiamo in vista la differenza qualitativa dei colori; quindi la misura fissa delle quantità di determinate qualità. La misura è una quantità avente un limite determinato, limite, il quale fa la qualità propria dell'essere a cui è applicata. In quanto allo stato « immediato », la misura è soltanto « in sè » e non ancora « in e per sè »; in questo stato, in essa, la quantità e la qualità, pur essendo inseparabili, non sono ancora identiche. Il cangiamento di quantità, che fa sì che una misura perda la determinazione della sua qualità, importa dapprima la soppressione della misura: ma siccome l'altro rapporto quantitativo, a cui dà origine questa soppressione, è ancora un rapporto qualitativo, la soppressione della misura produce così una nuova misura. Questo passaggio della qualità nella quantità e di questa nella prima, può anche rappresentarsi come un « progresso infinito », nel quale la misura si trova insieme soppressa e ristabilita (intendendosi anche qui il « progresso infinito » nel senso di quella ripetizione indefinita, di cui s'è detto più sopra). Ma — soggiunge Hegel — in fondo a

questo movimento avviene che la forma immediata della misura, come tale, è distrutta. La qualità e la quantità vi si trovano dapprima in uno stato immediato, e la misura non era altro allora che la loro « identità relativa »; poi nella misura si produce la necessità della soppressione della misura; e questa soppressione, che è la negazione della misura, conduce l'« unità della qualità e della quantità », come pure l'unità riflessa della misura medesima. — Ed ora ecco come dall'« essere » si giunge all'« essenza », al « Wesen ».

L'« infinito », l'« affermazione », in quanto « negazione della negazione » contiene ora, invece dei termini astratti, l'« essere » e il « niente », l'« uno » e il « multiplo », ecc., la « qualità » e la « quantità ». Prima la qualità è passata nella quantità e la quantità nella qualità, e di conseguenza esse si sono prodotte come delle negazioni. Poi nella misura, che fa la loro unità, esse si sono dapprima differenziate, e l'una non è che per l'intermediario dell'altra. Infine la forma immediata di questa unità è scomparsa, e così questa unità si trova posta come essa è in sè, cioè come formante un rapporto semplice con sè medesima; rapporto, che involupa e sopprime insieme l'« essere » come pure le sue forme. L'essere immediato, che nella negazione di sè stesso ha posto un termine medio o mezzo per mettersi in rapporto con sè medesimo, mezzo che si è eliminato per produrre questo rapporto e di conseguenza un nuovo stato immediato, questo essere — dice Hegel — è divenuto l'« essenza ». Nell'« essenza » si ha poi il « concetto soltanto posto », mentre il « concetto » stesso è la potenza libera, sostanziale, non esistente che « per sè ». — Ora, senza voler più oltre addentrarci nella Logica hegeliana, rileveremo ciò che già da principio ci eravamo proposti di far notare, ossia la distinzione del « falso » e del « vero » infinito in Hegel.

Il falso è l'infinito dell'intelligenza, che si trova dinanzi una serie di termini che si contraddicono continuamente, senza poter conciliare o far sparire queste opposizioni e giungere così a una determinazione nuova. Un tale infinito sa-

rebbe per lui piuttosto un indefinito, una « riproduzione incessante e alternata di uno dei due termini, di cui l'uno richiama l'altro ». Ma nè il lasciar sussistere questi due termini l'uno a fianco dell'altro in una specie di dualismo, nè il riunirli in uno solo non risolvono il vero infinito; perchè nel primo caso si ha un infinito limitato dal finito con cui è in rapporto, e quindi è finito, e nel secondo si ha una specie di neutralizzazione o almeno modificazione tanto del finito che dell'infinito. Tale è il « falso infinito ». Il « vero infinito » adunque non è quello che lascia sussistere questa contraddizione, ma quello che rappresenta l'unità dei termini del rapporto, nel senso che l'uno ritorna sopra sè stesso per l'intermediario dell'altro e nell'altro: è quindi non la negazione di uno dei termini, ma la negazione della negazione, ossia l'affermazione, il ritorno al primo termine: esso non si oppone al finito ma lo nega, perchè ciascuno dei due termini è l'altro, e perciò, passando nell'altro, è eguale a quello in cui passa, e quindi non fa che ritornar su sè stesso; onde non rimane che questo ritorno, l'affermazione, il vero infinito. Ora, posta la quantità, la qualità della quantità è di essere in sè stessa e al di là (« jenseits ») di sè stessa, e dà origine così al rapporto quantitativo. Ma la quantità e la qualità costituiscono così nuovamente la negazione della negazione, essendo la qualità passata nella quantità e questa in quella, quindi ancora l'affermazione, il ritorno del termine in sè stesso, il « vero infinito ».

Ma noi ricordiamo che il Wundt (v. lav. cit.: « Kant's kosmol. Antin., etc. ») fa corrispondere il concetto dell'infinito concepito come un finito illimitato, all'infinito falso di Hegel e all'infinito improprio di G. Cantor, mentre fa corrispondere il trasfinito al vero infinito di Hegel e all'infinito proprio di Cantor. Lasciando per ora da parte la distinzione di Cantor, di cui ci occuperemo parlando dell'infinito matematico, osserveremo qui solamente che l'infinito vero di Hegel è adunque non il concetto del « senza fine », dell'« interminabile », che implica il procedere al di là di ogni limite

dato, ma è in fondo la totalità infinita già data, è l'infinito compiuto, poichè ritorna in sè stesso e quindi ha trovato quella fine al di là della quale non è che il principio. Ma allora esso, come giustamente osserva il Wundt, è una somma raccolta in un concetto, è un totale. — Come abbiamo già visto, il pensiero compiuto di un infinito reale è possibile solo come una finzione, la quale consiste nell'applicare proprietà di una grandezza finita, cioè di un essere completo, proprietà che sono invece soppresse nell'infinito. È adunque a chiedersi se sia questo « vero infinito » un infinito vero. Esso sopprime bensì le opposizioni dei termini, come dice Hegel; ma appunto per ciò si ritorna al termine unico, che è o la semplice affermazione di esso (come parrebbe secondo il pensiero di Hegel) o l'insieme di tutta la serie indefinita delle opposizioni, pensata come un totale. Ma appunto tanto in un caso che nell'altro si ha, secondo noi, il finito; giacchè ci sembra di dover più ragionevolmente ammettere col Wundt che un infinito improprio è piuttosto il trasfinito (quello che escluderebbe qualunque opposizione col finito), perchè deriva il concetto del « compiuto » o « completo » dalle proprietà del finito, mentre la vera essenziale qualità dell'infinito è di non esaurirsi mai e quindi non di essere dato come terminato, ma come continuamente in procinto di sorpassare l'ultimo limite raggiunto, o se mai come una totalità infinita che esclude la presenza delle opposizioni del finito e infinito, ma che s'è formata posteriormente, e che o li esclude del tutto, e allora non è più un finito nè un infinito, oppure li include ancora, e allora riterrà delle proprietà dell'uno o dell'altro.

Siccome è in quest'ultimo senso che deve, secondo noi, interpretarsi il concetto di infinito o almeno la sua origine e il suo motivo d'essere, così non ci sembra fuor di proposito esaminar brevemente da quest'ultimo punto di vista il problema dell'infinito filosofico, non senza aver premesso che l'importanza dell'« infinito vero » di Hegel non si può certamente disconoscere, ove lo si ponga in rapporto con

tutto il suo grandioso sistema logico e col fatto che appunto in un tale infinito vengono a eliminarsi le contraddizioni continuamente rinnovate, e quindi scompaiono la negazione e la limitazione, essendo già data la negazione della negazione, con la qual cosa non si lascian più sussistere l'uno accanto all'altro i due termini della opposizione.

L'Ardigò¹⁾ è ritornato, or non è molto, sull'argomento dell' « infinito » e « indefinito », di cui s'era già occupato precedentemente nelle sue opere. Egli prende in considerazione piuttosto il modo, onde si vien formando il concetto di infinito, dal punto di vista della conoscenza.

Comincia col ricordare che Cartesio²⁾ ha distinto le due idee di finito e di indefinito, asserendo che dell'infinito non può parlarsi da esseri finiti ma soltanto da Dio, mentre noi non possiamo che stimare indefinito ciò, in cui non riscontriamo limiti. Poi cita un passo di Leibniz, per far notare che un numero, una retta sono sempre finiti ed assegnabili; tali sono i dati concreti, siano estensivi, siano intensivi. Ma un dato numero, essendo sempre aumentabile, viene ad essere finito di per sè, ma non finito rispetto al poter essere aumentato, quindi positivamente finito, negativamente infinito: ciò tanto per l'estensione che per la divisibilità. « Negativamente infinito » non vuol dire però, nel concetto dell'Ardigò, null'altro che possibilità nella mente di immaginare ulteriori divisioni od aumenti, ripetibili interminabilmente. Questo egli chiama anche ritmo cogitativo, che si risolve negli atti mentali della aumentabilità, divisibilità, diminuibilità senza fine del concreto. Ma questo ritmo mentale, se è infinito solo negativamente, è puramente indefinito nel senso su indicato da Cartesio: il che lascia supporre che un infinito positivamente considerato non dovrebbe più essere un processo mentale, e quindi

¹⁾ *Infinito e indefinito*, *Rivista di Filosofia*, 1909, I, p. 1 e sgg.; II, p. 1 e sgg.

²⁾ *Princ. d. Filos.*, Part. I, Cap. XXVI e XXVII.

dovrebbe avere un'esistenza obbiettiva oppure non esistere. Difatti asserisce più oltre l'Ardigò, che il concreto ammissibile scientificamente è solo « quello negativamente infinito, ossia indefinito, che si sperimenta o si induce da questo: tale concreto concepito come indistinto o distinto, come essere o come divenire, come causa o come effetto, e così via per tutte le categorie, nel quale si può scientificamente far campeggiare ». Dato ciò, è naturale la domanda che l'Ardigò si propone, se cioè non possa darsi un infinito in senso positivo. Per rispondervi, egli osserva, che la proprietà dell'infinito di essere « ciò a cui nulla è aggiungibile », non potendo spettare al « concreto », deve essere veramente propria dell'astratto, qualunque sia il genere di questo. Ora l'« astratto » è la « concezione mentale » di una specie o di un genere: « in essa si inchiude necessariamente tutto ciò che è proprio di essi (specie o genere), escludendosi così assolutamente la possibilità di ulteriori aggiunte: onde, secondo la definizione premessa, è da dirsi, l'astratto stesso positivamente infinito ».

Adunque si hanno due concetti di infinito, quello negativo e quello positivo: il primo è un ritmo mentale; il secondo è tale che, per adoperare le parole stesse dell'Ardigò, « le infinità diverse di tutti gli astratti si risolvono nel genere supremo dell'essere astrattamente preso ». Per illustrare meglio questo concetto, l'autore dice che, p. es. « dicendosi l'*essere*, si è coll'infinito in senso positivo; mentre dicendosi *un essere* si è coll'infinito in senso negativo; come dicendosi *il numero* si è ancora coll'infinito in senso positivo; mentre dicendosi *un numero* si è ancora coll'infinito in senso negativo ». Quindi si può fare la distinzione anche in un altro modo, dicendo che l'infinito negativo è un ritmo mentale che si riferisce ad un dato concreto, mentre l'infinito positivo è già astratto, anzi il sommo dell'astrazione.

Per esempio, un dato finito esteso rappresenta, se trasportato entro la idea infinita dello spazio, la possibilità

di allargarlo entro questa infinità spaziale: e allora si vede che, se lo spazio è infinito, la ripetizione del dato in esso costituisce un infinito negativo entro un infinito positivo. Quest'ultimo non sarebbe adunque che una totalità, la quale riassume, come dice l'Ardigò, tutte le infinità diverse di tutti gli astratti, ossia una totalità infinita.

Se non erriamo, ci sembra di scorgere anche qui una distinzione fatta in base ai due concetti, dell'infinito che va al di là dell'ultimo limite assegnato, e dell'infinito che comprende tutti i casi infiniti di sconfinamento, ossia dell'infinito realizzato e compiuto, quindi in certo qual modo assimilato ad una quantità finita.

Ma questa obiezione è preveduta dall'Ardigò, che risponde poter essa aver valore « per l'astratto quale sensibile particolare distinguibile in un oggetto; ma non per l'astratto in quanto funziona quale campo logico comune o quadro indifferente di più particolari, e tipo mentale, onde questi similmente si informano, o possono, quanti pur siano o si immaginino, informarsi; poichè un certo *ritmo fisio-psichico*, onde si ha una certa specialità di coscienza, riproducendosi in particolari simili ed analoghi, si accompagna con essi, facendo rivestire della coscienza stessa la loro rappresentazione, e facendone per tal modo una classe a parte: giusto, insomma, il rimarco per l'astratto in quanto sia la semplice *nota* dei logici; non per l'astratto in quanto sia l'*idea* dei platonici, la *forma* dei peripatetici; l'*universale* degli scolastici, l'*intelligibile* dei metafisici in genere ». Questo « astratto », che è lungi dalle proprietà del concreto, e che esclude il più possibile le diversità individuali nella stimolazione del senso e nella sua disposizione, è una specie di idea « a priori », in quanto può concepirsi indipendentemente dalla « nota » o « sensibile », ma non lo è più in quanto per prodursi ha bisogno che vi concorrano i dati simili ed analogi precedenti: insomma per attenerci alle sue stesse espressioni ¹⁾ « siccome

¹⁾ V. anche *La nuova filosofia dei valori*, n. 12, 1908.

un ritmo fisio-psichico (per quella legge psicologica fondamentale, che è detta comunemente la legge dell'associazione, ed io ho chiamato invece della confluenza mentale), non può prodursi senza che si producano insieme i somiglianti e gli analogi precedenti, così con quello che corrisponde ad una data stimolazione si ravvivano più o meno, indistintamente concertati, i precedenti diversi, e in una meteora psichica, ormai pronta a ripresentarsi, quale totalità a sè, ad ogni stimolazione nuova: e si da farsi ritenere una idea innata; poichè, potendosi astrarre come nota ricorrente, può anche vagamente concepirsi da sè, e, come tale, indicarsi con un proprio nome, e conseguentemente apparirci indipendente nell'essere suo di pura idealità del fatto sensitivo, ed anteriore ad esso nella psiche ». Dunque, per esempio, la gravità sarà un astratto quando diviene un tipo mentale, che si riscontra nella rappresentazione di tutti i corpi, e conviene nella sua essenzialità a tutte le grandezze, comunque e qualunque esse siano, diventando così uno schema.

Un tale schema ha questo di particolare, che è vago ed « indistinto »: e però esso si specifica in qualchecosa di proprio, in quanto il suo nucleo è costituito da sensazioni di una data specie, di una determinata qualità, e poi può presentarsi sotto punti di vista diversi e particolari, perchè « nel proprio astratto, in un dato individuo, si compendiano, consci o inconsci che al momento appariscano, solo i dati procuratigli dalla sua individuale esperienza, o che poterono essergli stati suggeriti dalla esperienza altrui; e basta a provar questo il confronto fra l'idea della gravità dominante prima di Galileo. E così l'idea della gravità (e analogamente qualunque altro astratto), come non è mai la stessa da un individuo all'altro, così non lo è neppure da una età all'altra dello stesso individuo, da un'epoca storica all'altra per le classi colte ».

Con ciò si stabiliscono due proprietà essenziali del dato astratto: l'essere qualchecosa di proprio, di partico-

lare, e il presentarsi in forma schematica, come un « indistinto ». Ma lo stesso Ardigò ammette qui che un tale blocco, così formato, essendo contraddistinto, è « specificamente distinto », onde non vediamo come lo si possa ben far corrispondere all'infinito positivo escludendone assolutamente il concetto del finito, sebbene non concreto, e il concetto del ritmo mentale infinito.

La particolarità stessa, il « proprio » di ciascun astratto, che non sia addirittura il massimo degli astratti, quello che li abbraccia tutti quanti, conduce ad ammettere la possibilità di altri nuclei « proprî » di altri astratti, ossia di varietà qualitative di astratti, e quindi anche di un numero di queste varietà, che, non potendo determinarsi in modo assoluto, conduce nuovamente all'idea di infinito, e precisamente di quell'infinito che vedemmo più sopra indicato come negativo. Tutt'al più un infinito positivo, nel senso su indicato, potrebbe essere il sommo degli astratti possibili, come ad esempio l'« essere », che può contener tutti gli altri come subordinati, e che quindi può supporre mancante di limiti rispetto ad altri astratti; ma non ci sembra che possa dirsi altrettanto di astratti inferiori più definiti, pei quali è ancor possibile la distinzione non solo quantitativa, che è una ripetizione mentale, ma anche qualitativa ossia in rapporto alle loro proprietà specifiche: quantunque nel caso del sommo astratto si abbia ancora una totalità ossia una somma infinita, se si vogliono compendiare in esso tutte le infinite note ed i loro astratti.

L'Ardigò si sofferma a un'altra distinzione, tra l'« idea » e la « nota », di cui la prima è ancora diversa da individuo a individuo, e la seconda, pure essendo astratta dalla esperienza, è omogenea nei diversi individui e persiste la medesima. Ma questa è la nota senza determinazione, astratto, non come sensibile determinato. Difatti « la semplice nota determinata, astratta la prima volta da un dato particolare, è il fatto concretamente tale di un certo sensibile affermantesi nella coscienza; e, come tale, è un finito come

tutti i concreti. L'astratto, invece, riconosciuto come la somiglianza e il tipo comune di più particolari e che si trova applicabile e si applica ad altri e senza limite, è, da questo punto di vista, infinito in senso positivo. Da questo punto di vista; perchè, come il puro fatto del ritmo fisio-psichico della sua concezione, che si verifica un dato momento, in quel modo preciso che si verifica, è un concreto come la semplice nota, e quindi è, anch'esso, un finito ». Il che viene a confermare quanto più sopra osservammo.

Dal punto di vista positivo della formazione naturale, poi, l'Ardigò sostiene la teoria dell'ultimo distinto svolgentesi da un precedente indistinto (cfr. l'« omogeneo » e l'« eterogeneo » spenceriani), e questo da altri precedenti sino a giungere a quelli, che sono sempre meno noti ossia sempre più indistinti, e quindi « negativamente infiniti » o « indefiniti ».

In quest'ultimo caso, poi, la nozione di « infinito negativo » si specifica ancor meglio in Ardigò, in quanto che non solo si ammette il ritmo mentale di ripetizione del finito, anzi del distinto, ma lo si considera come un processo che risale dal « distinto » verso l'« indistinto ». Così concepito, l'« infinito negativo » viene a corrispondere a una specie di indefinito, che presuppone la possibilità di una definizione futura e quindi di un nuovo infinito.

Ma, a parte queste considerazioni, a noi sembra che « l'infinito positivo », di cui parla l'Ardigò, non possa escludere il concetto di totalità, appunto perchè la sua proprietà è, com'egli stesso dice, di avere « tutta la contenenza ed adattabilità sua possibile »; quindi è un infinito totale, non più aumentabile e perciò finito. D'altra parte l'« infinito negativo » è realmente interminato; ma, mentre da una parte presuppone esso pure la formazione dell'astratto, con la divisibilità, aumentabilità, ecc., che hanno di proprio la inesauribilità (non la compiutezza e mancanza di limiti), d'altra parte presuppone un progresso

in indefinito, partendosi da un dato empirico vicino, distinto, per procedere a un limite, e poi ad altri, ma indefinitamente, ossia in numero che è ancora da definirsi e che però è possibile che sia definito.

Questo progresso in indefinito può e deve, secondo noi, in un campo più astratto volgersi in un progresso in infinito, nel senso che è indicato non nelle tesi, ma nelle antitesi kantiane delle antinomie matematiche concernenti tempo e spazio. Quindi o il dato astratto si considera immediatamente senza possibilità di limiti in nessun modo, assolutamente; e allora bisogna anche considerarlo, non solo come fuori d'ogni quantità, ma anche senza alcuna qualità, essendo già questa di per sè una prima limitazione, e senza contenuto, nel qual caso non si tratta più evidentemente neppure dell'infinito, ma tutt'al più di un indefinito; oppure lo si suppone come contenente tutti i finiti dati, ed allora è un infinito totale, una somma infinita.

Nel primo caso si ha un indefinito, che può ancora esser suscettibile di una determinazione definita, e quindi passare al finito e poi alla ripetizione di questo in infinito, giusta quel ritmo mentale a cui accenna l'Ardigò: nel secondo caso si ha una somma infinita di finiti, una finzione od un finito non bene definito ma che tale può divenire. Insomma nell'un caso e nell'altro si ha a che fare con un finito non bene definito, sia per non contenere una precisa limitazione, sia per contenerne infinite.

Ciò che in tali casi vi può essere di veramente infinito, è lo stesso processo mentale di sconfinamento, quel « ritmo mentale » che conduce ad oltrepassare qualunque limite (della estensione, divisibilità, ecc.), anche se immaginato come l'ultimo¹). Il fatto stesso della necessità dell'antinomia e della soluzione kantiana negativa di questa

¹) Interessante per altri rispetti è, a questo proposito, la teoria empirio-critica del Renouvier, che l'Aliotta prende in esame nel suo lav. cit. (in *La coltura filosofica*, anno 1911, 3-4, ecc.).

antinomia, dimostra anzitutto che non si può pensare uno solo dei due termini, e inoltre che la soluzione deve appunto consistere nella non cessazione delle opposizioni, ossia nella continuità di questo processo di opposizione, in una data direzione (estensione, divisibilità, passato, futuro).

A questo punto vogliamo aggiungere alcune considerazioni su una questione collaterale. — Esaminando le antinomie kantiane, noi abbiamo veduto che nelle antinomie dinamiche non ricorrono più solamente i concetti matematici puri di tempo e spazio, ma la massa materiale e la serie delle cause, che includono il fondamento empirico, il progresso in indefinito, e una maggiore determinazione qualitativa. Come già notammo, Kant presuppone per la massa le proprietà dello spazio; quindi non si attiene rigorosamente a considerare di per sè la massa della materia. Difatti a quest'ultima compete non solamente l'estensione spaziale, ma altresì la « densità », la « spessezza » (« Dichtigkeit »); quindi non possono conciliarsi i due concetti dell'infinita « estensione » della materia e dell'« infinito della massa »; perchè, se si ammette che a partir da un dato punto la densità diminuisca verso ogni direzione in ragione della distanza, si avrà bensì l'infinita estensione della materia, ma si avrà la sua massa rappresentata da un numero di grandezza finita. Così Kant non distingue la massa dallo spazio neppure quando le presuppone la divisibilità come un regresso in infinito. Dato il concetto aristotelico, che la divisibilità è possibile in infinito, perchè il corpo infinitamente divisibile è dato immediatamente come un tutto con le sue parti, si viene implicitamente ad ammettere che si comincia la divisione da un finito, che è dato, e si termina in un infinito, che non può mai essere dato. Ma è questo un concetto, che dà appunto origine all'antinomia della divisibilità finita ed infinita della massa materiale anzichè dello spazio, perchè si parte appunto da un corpo materiale finito e si procede mentalmente all'infinito. Ora per lo spazio

si può ammettere bensì la divisibilità, ma in un modo diverso. Ammessa la divisibilità per lo spazio, bisogna pensar lo spazio come la forma pura del rapporto che intercede fra parti discrete, e quindi essa sarà un regresso in infinito: ammessa la divisibilità per la massa, non potendosi questa pensare se non come il sostegno delle forze naturali e quindi in base ad effetti empirici, essa sarà invece la divisibilità di questo sostegno empirico, e quindi importerà soltanto un regresso indefinito, ossia non una infinita divisibilità come nel caso dello spazio puro.

Ora Kant, nelle sue prime opere cosmologiche, ammette, accanto all'infinita estensione dell'universo, la costituzione atomica della materia ¹⁾, ossia la esclusione del concetto di infinita divisibilità della materia. Ma per lo spazio essendosi posta la divisibilità in infinito, ciò vuol dire che, come per il tempo, anche per lo spazio una tal divisibilità condurrà alle contraddizioni famose di Zenone l'Eleata sul movimento e sul cangiamento, e però anche all'origine e alla soluzione di queste contraddizioni, al concetto di continuità. È chiaro adunque che, per il tempo e per lo spazio, considerati come forme intuitive pure, in cui possono poi collocarsi rispettivamente la massa materiale e la serie causale, è essenziale la continuità, sebbene anche qui per noi non possa assolutamente prescindersi da originarî dati empirici e quindi dal principio del discreto. Se così è del tempo e dello spazio, della massa dovrà dirsi altrimenti; poichè abbiamo visto che essa può concepirsi con criterî empirici entro lo spazio giudicato con criterî puri o matematici, a meno che non si voglia, come fece Kant, attribuire alla massa le proprietà dello spazio. Per la massa materiale si è costretti a fermarsi continuamente a determinati limiti, perchè essa è oggetto di esperienza; e l'esperienza ha dei confini, che devono poi considerarsi relativi, in quanto sappiamo che hanno il loro fon-

¹⁾ *Naturgeschichte des Himmels*, 1. u. 6. Hauptstück, Ausg. von Rosenkranz, S. 93 f. u. 151 f.

damento nella limitazione della nostra conoscenza per esperienza, o possono permettere un progresso ulteriore di questa conoscenza, pur rimanendo fissi, e concedendo solo l'ipotesi della possibilità generale di un avanzamento indeterminato. Ma se così sta la questione rispetto alla materia, è evidente che la divisibilità di questa sarà limitata, però in modo indeterminato. Giusto quanto abbiamo osservato più addietro parlando di Kant, come la infinita estensione della materia significa rendere indeterminati o spostare lontano nell'indeterminato i limiti imposti dalle esperienze al nostro universo astronomico, (e quindi, in questo senso, anche pensare una massa di grandezza finita estendentesi in infinito), così la infinita divisibilità della materia si riduce allo spostare nell'indeterminato i limiti imposti dalla esperienza alla divisibilità stessa, e perciò può anch'essa permettere in questo senso il pensare un ultimo elemento finito, che non sarà l'ultimo possibile del pensiero, e potrà quindi concedere ulteriori suddivisioni in infinito, ma che nondimeno costituirà un bisogno necessario e conforme alle condizioni della esperienza.

Per questo motivo, ove si parla di materia o di massa, o anche di energia cosmica, si devono ammettere atomi, o punti materiali, o centri di forza, ecc., ossia elementi ultimi, non ulteriormente divisibili. Si comprende, con ciò, come la teoria atomica sia quella che si oppone alla divisibilità infinita, in quanto considera l'elemento primo e necessariamente costitutivo della materia ¹⁾. In questo senso va giudicato anche l'a-

¹⁾ L'atomistica antica dà infatti il chiaro esempio della concezione materialistica. Nella dottrina atomica metafisica di Democrito, accanto al principio « Dal niente vien niente; niente, che è, può esser distrutto: ogni mutamento è soltanto congiungimento e separazione di parti », se ne trova un'altro, che dice, fra l'altro, che gli atomi non hanno alcun stato interno, ma agiscono gli uni sugli altri solo per urto e pressione; e un altro ancora, in cui si dice l'anima costituita di atomi fini, lisci e rotondi, uguali a quelli del fuoco, e sono i più mobili, attraversan tutti i corpi e producono i fenomeni della vita. — Cfr. F. A. LANGE: *Geschichte d. Materialismus*, Iserlohn u. Leipzig, 1887; cit.

tomo sostanza semplice di Kant, supposta nello spazio: così pure si comprende la opposizione, in cui si trova Aristotele rispetto a Democrito; in quanto che, mentre quest'ultimo ammetteva estensione infinita e divisibilità limitata, quegli pose limitata estensione e illimitata divisibilità. Aristotele, in generale, ammette l'infinito potenziale, come nel caso in cui, di contro a Zenone, che parlava di reale divisibilità in infinito del tempo e dello spazio, sostiene che non vi sono punti di riposo, ma vi è la uniforme continuità; e che l'illimitato è solo *δυνάμει*. Però questo infinito potenziale è negato da lui per la estensione, ed ammesso per la divisibilità della materia, alla quale applica le proprietà stesse dello spazio, mentre per il numero si suppone il contrario. Adunque, per il concetto della materia, sembra evidente che la divisibilità venga intesa come infinita nel senso di una possibilità indeterminata di pensiero oltre un ultimo elemento ritenuto irriducibile, e però ben determinato e finito per necessità di esperienza. Così inteso, anche l'atomo, il centro di forza, il punto materiale sono concetti ausiliari comodi, intuitivi, afferrabili: e così anche ne viene che un tale elemento possa concepirsi come indipendente da noi, in quanto gli si è attribuito uno speciale carattere di inalienabilità, e si può, in quanto lo si prende come empiricamente indivisibile, pensarlo insieme con la continuità della materia.

Ma naturalmente, se ciò vale per l'atomo materiale, non ha più egual significato se si applica ad altre specie di atomi o, diciamo meglio, di indivisibili, di enti primi costitutivi. — Se noi pensiamo alla « monade » di Leibniz, per esempio, ci accorgiamo subito trattarsi di puri obbietti concettuali, e quindi ci troviamo di fronte a punti di vista del tutto diversi; giacchè, per accennare subito a una differenza sostanziale, Leibniz considera lo spazio come fenomeno e la monade come la reale sostanza, che non ha alcuna esistenza nello spazio. Quindi si hanno qui di fronte due concetti fra loro diversissimi. Da una parte un punto materiale senz'altra qualità che grandezza, figura e peso (secondo il

concetto materialistico di Democrito e di Epicuro); questi atomi possono anche essere più piccoli di qualunque grandezza misurabile, e quindi non aver nè questa nè quella determinata grandezza, ma nondimeno una grandezza, onde saranno per noi soltanto supposti ed ammessi indivisibili. D'altra parte, come dice il Lange (op. cit., S. 80), « dieser Satz, der das Vorhandensein innerer Zustände im Gegensatz zu äusseren Bewegungen und Verbindungen förmlich leugnet, bildet einen der charakteristischen Punkte des Materialismus überhaupt. Mit der Annahme innerer Zustände hat man bereits das Atom zur Monade gemacht und man bewegt sich zum Idealismus oder zum pantheistischen Naturalismus hinüber ». Perciò se « atomo » è una finzione, che non esce dai limiti della determinazione quantitativa, ed in parte anche qualitativa (figura, peso, ecc.), e come tale può costituire un principio materiale, esso può essere, apparentemente solo sostituito da concetti assoluti come quelli di sostanza semplice, di monade, ecc., i quali non accennano più ad alcuna determinazione quantitativa e qualitativa, ma ne sono piuttosto la negazione. Così Spinoza, il quale sostiene che ciò che è la causa di sè stesso non può aver limitato sè stesso, dice pure che la sostanza assolutamente infinita è indivisibile; nè con ciò allude all'atomo materiale e alla sua relativa indivisibilità, ma piuttosto ad una sostanza assoluta, la quale, se fosse divisibile, si scinderebbe in parti, le quali o avrebbero la natura della sostanza assoluta, e allora vi sarebbero più sostanze della stessa natura, o avrebbero una natura diversa, ed allora cesserebbe d'esistere la sostanza assolutamente infinita; il che non potendosi ammettere, secondo Spinoza, ne viene che nessuna sostanza e quindi nessuna sostanza corporea, in quanto sostanza, è divisibile. Per Leibniz le monadi, come pure i gradi di coscienza delle rappresentazioni in ciascuna monade, sono in numero infinito, e presenti in innumerevoli gradi infinitamente poco differenti fra di loro: ciascuna parte del mondo contiene in sè un infinito attuale di parti, come necessaria conseguenza del si-

stema dell'armonia prestabilita. Le monadi sono adunque unità sostanziali, e però, giusta il suo pensiero, sono non spaziali, essendo per lui lo spazio soltanto una forma dell'ordine sensibile delle cose. E, se pure considera ogni macchina naturale costituita infinitamente di monadi, quasi che queste fossero unità puntuali di forza od atomi dinamici, tuttavia sembra che esse debbano considerarsi come unità sostanziale, quindi in accordo con la legge della continuità tanto sostenuta da Leibniz, mentre l'atomistica pone la resistenza al confine di ogni atomo e nega la continuità. Oltre di che, per Leibniz, a ciascun grado di chiarezza delle nostre rappresentazioni devon corrispondere monadi: la qual cosa è un concetto affatto estraneo all'atomistica. Leibniz riesce anche meglio di Cartesio nelle obbiezioni all'atomistica, perchè Cartesio identificava corpo e spazio, e perciò non dava a quest'ultimo le proprietà che assolutamente lo distinguono. — Insomma l'atomistica materialista è ben diversa dalla concezione monadologica leibniziana, a cui anzi si oppone, essendo la risultante di un pensiero che considera la massa, la materia, e condizioni inerenti alla esperienza relativa ad essa. Con la materia viene allora a trovarsi in nesso necessario, se non sufficiente, la concezione dell'atomo, ossia di un indivisibile che contrasta con le teorie dell'infinito, sebbene pel pensiero puro l'infinito ricorra anche entro e al di là dell'atomo. Concezioni come quelle della sostanza assoluta o della monade, verrebbero esse pure a escludere il concetto di infinito, in quanto ricorrono anch'esse all'indivisibile; ma d'altra parte pongono l'infinito, in quanto col loro elemento indivisibile escludono la limitazione quantitativa e qualitativa, e ammettono l'infinito come già dato, come reale, non solamente come possibile, essendo per esempio per Spinoza impossibile la pluralità di sostanze assolute, e per Leibniz vera e reale la continuità, mentre la discontinuità è conforme alla nostra imperfezione. Siccome però, in quanto queste concezioni non entrano nel campo matematico, esse concernono un infinito totale che

nell'insieme è piuttosto un indefinito per l'assenza di determinazioni quantitative e qualitative, così non ne parleremo più oltre, bastandoci aver rilevato alcune differenze dalle teorie atomiche materialistiche.

Ma di un altro fatto conviene far cenno: dell'atomo dinamico, e del criterio intensivo, che modifica il concetto materialistico di atomo. — Già per Barrow il punto, che indica la direzione e la velocità del movimento, è in rapporto coi reali processi naturali, e rientra così nel problema non più geometrico, ma meccanico. Così si allontanano dalla teoria atomistica quelle concezioni, che considerano la flussione (Newton), l'acceleramento, il prodursi, ecc., e in generale la velocità, il movimento e i suoi momenti, quindi la continuità e non l'arresto. Perciò anche Galileo si oppose alla dottrina dell'indivisibile, perchè un indivisibile, congiunto con un altro indivisibile non potrebbe dar luogo a ciò che è divisibile; dal che deriva che l'indivisibile non è più concepito come avente le proprietà di ciò che è solo ipotetico, della materia e della estensione, ma come qualcosa di diverso dalla quantità comunemente intesa. Difatti Galileo ricorre a un superiore concetto di grandezza, non esaurita soltanto dalla quantità; e parla di parti, le quali, per essere non indivisibili, ma infinite, sono « non quantae »; e di queste parti non quantitative è costituito il continuo. Tali parti infinitesime sono apparentemente degli atomi, e Galileo stesso li chiama « atomi assolutamente indivisibili del continuo »; ma sono atomi o indivisibili, non perchè siano quantità arbitrariamente determinate come le ultime, ma perchè anzi non sono quantità, non sono estensioni, ma sono grandezze di un nuovo genere, come sarebbe a dire del genere intensivo, quali p. es. l'intensità della velocità, la forza dell'acceleramento, ecc. Ecco adunque un nuovo modo di concepire l'indivisibile, per cui questo, da punto materiale immutabile diviene un « grado », ossia un momento di un processo intensivo, non isolabile entro un continuo infinito. I concetti del differenziale sono una nuova ed ampia dimostrazione di

un modo diverso di concepire ciò, che si riteneva l'indivisibile: difatti il differenziale include la grandezza infinitesima, ossia quella grandezza che non si arresta a un'ultima grandezza indivisibile, oppure è una quantità evanescente, o una quantità, che perde il suo carattere determinato o lo mantiene infinitamente.

Nella fisica matematica i punti materiali divengono punti geometrici con attribuzioni dinamiche, i quali possono considerarsi punti materiali e particelle, in quanto valgono quelle attribuzioni e quei rapporti dinamici, conformemente ai calcoli. Difatti queste parti sono punti di un sistema, in cui si fa astrazione dal concetto di distanza tra le parti ¹⁾, e in cui il punto di massa, anzichè esser supposto materiale, è piuttosto geometrico-meccanico, dinamico. Così anche si viene ad ammettere che esso sia opposto all'idea di estensione: tutt'al più l'inespresso può pensarsi come senza estensione esso stesso ma con la tendenza ad essa, producendola di per sè, come si vede nel caso delle velocità intensive, che producono gli spazî di caduta.

Con ciò si vede come l'intensivo, che si sostituisce al criterio atomistico, il quale non poteva trascurare l'idea dell'intervallo e quindi della distanza e della estensione, possa sostituirsi al concetto di indivisibile, purchè questo non sia più il punto materiale esteso, ma possa tutt'al più pensarsi come integrativo dell'esteso non più considerato come elemento primario.

W. Weber dice che, nelle cause dei movimenti, si può isolare una parte costante tale, che si possa giungere ad un concetto di massa, a cui la rappresentazione della estensione spaziale non sia necessariamente inerente. Sicchè si pone con questi criterî una specie di separazione tra la massa e l'estensione; e quindi anche si impone la designazione della grandezza dell'atomo, non secondo la sua estensione spaziale, ma giusta la sua massa.

¹⁾ I. CLERK MAXWELL: *Substanz u. Bewegung*, übers. v. Ernst von Fleischl, 1879.

Anche in altri modi si è preso l'atomo, non più per una indivisibile particella materiale, ma come concetto estraneo a quello consueto di quantità piccolissima determinata. Lo stesso Kant, che ammise in una delle sue antitesi l'infinita divisibilità della materia, ha anche, come vedemmo, supposto l'atomo ma non come il punto d'arresto della divisibilità materiale, bensì come elemento semplice, come sostanza, che segna piuttosto un trapasso verso il dogmatismo metafisico, come ben osserva il Wundt.

Queste considerazioni noi abbiamo voluto esporre, allo scopo di mostrare in quale rapporto l'indivisibile ossia l'atomo stia con il concetto di infinito; ed abbiamo visto che esso vi si oppone, in quanto è un ultimo punto o particella materiale arbitrariamente assunta come elemento irriducibile, necessario alle esigenze della esperienza; che esso però non ne discorda, se lo si suppone come provvisorio, oppure se lo si converte in un momento intensivo non quantitativo, non isolabile da un sistema continuo infinito; oppure anche se lo si pensa come una sostanza semplice, o ad ogni modo lo si assume nella sfera spirituale ed ideale. Nel secondo caso, però, esso perde la sua primitiva determinazione e può piuttosto dar luogo al pensiero di un indefinito.

Quest'ultima osservazione ci conduce ad ammettere che, filosoficamente considerato, l'infinito non è veramente tale pel pensiero che quando esso è in intima relazione ed opposizione col finito. Non è quindi, secondo noi, una totalità immediatamente data, perchè questa, priva di ogni determinazione, non può essere che un finito indeterminato, un indefinito; però per essere totale assume l'unica determinazione della totalità, e diventa un finito definito come insieme e indefinito nelle sue parti. Quindi per noi i concetti di sostanza semplice, assoluta, di monade, ecc., che includono l'infinito, non come processo di pensiero, ma come realtà insindacabile ed attuale, se non rientrano nell'incom-

mensurabile wundtiano, il quale è applicabile ancora al definito e a maggior ragione al finito (empirico), essendo ancor meno determinati, rientrano nell' indefinito, che pure rampolla dal finito, senza ritenere ancora il carattere del definito. Ma in ogni caso essi non corrispondono a quel concetto di infinito, che significa sconfinamento oltre un finito ben determinato, bensì al concetto inverso della mancanza di un limite da raggiungere, e quindi al concetto di una tendenza alla limitazione; tendenza che si esprime col pensiero vago della totalità infinita o con la semplice formula definitiva o con una unica qualifica di assoluto, semplice, ecc. Chè, se pure si voglia escludere qualsiasi tendenza alla limitazione, rimane ad ogni modo il fatto che un tal concetto è posto come quello di un qualcosa, di cui per altro non è a pensarsi nulla di determinato, e che quindi ha per lo meno la indeterminatezza. Ma è certo che, ove noi non supponessimo anche indirettamente la possibilità di estendere quel concetto ad un numero infinito di dati o di casi, mai non riusciremmo a pensarlo come un infinito, ma soltanto come un quid impreciso. E' invece il pensiero dei singoli casi e della moltiplicabilità interminabile di questi, che ci induce a pensare una totalità sconfinata, una sintesi, in cui il pensiero riesca a contenere o a supporre come contenuta tutta la serie infinita dei dati: soltanto che una tal sintesi, per poterla comprendere, la si pensa come già compiuta e perciò subito ammessa come insieme, oppure come una legge, senza dover ricorrere alla verifica interminabile dei singoli.

Quindi ci si trova di fronte, in tal caso, ad un finito, che è tale per due motivi, perchè è indefinito come somma di particolari, e perchè è un totale ossia una riunione. Ma ciò che è in fondo ad una concezione di tal genere e che la allontana, per altri motivi, dalla concezione di un semplice finito, è il pensiero che i particolari, compresi nella sintesi totale, non possono mai essere esauriti, e che quindi il totale stesso non è il risultato di una somma comune,

ma quello di una somma che non ha fine. Sicchè ci sembra che il concetto vero di infinito, come anche pare che ammetta il Wundt nella sua critica alla teoria cosmologica kantiana, sia appunto quello del finito che si oltrepassa.

Un tale infinito non potrà mai mutarsi in un indefinito, se non a patto di pensarlo come un insieme riunito, e quindi tanto meno sarà un infinito definitivo, perchè il suo carattere sta appunto nel negarlo non appena quello si presenta, creando un altro limite per poi nuovamente negarlo, e così via sempre uniformemente. Esso è un processo di pensiero e come tale è il pensiero stesso, non il pensato. Ma soprattutto non comprende il dato empirico, bensì l'astratto, il dato puro e quindi più determinato; onde anche come processo infinito è più intenso e determinato.

Perciò il voler fare dell'infinito un qualchecosa, il volerlo insomma comprendere e concepire, è una delle necessità del pensiero, che ha bisogno di dati finiti in particolare e nella generalità, ma non esprime tutta quanta la necessità del pensiero, che è inesauribile in sè stessa. D'altra parte una tale inesauribilità non sarebbe avvertita e tornerebbe ad essere un semplice indistinto, ove il pensiero non potesse formarsi dei concetti finiti, anzi definiti. Per queste ragioni tre sono per noi le necessità del pensiero a proposito dell'infinito: l'ammettere il finito, il sorpassarlo, in via successiva; oppure per altro verso l'ammetterlo e il negarlo, il che poi si risolve nuovamente in una successione; oppure ancora l'ammettere l'uno e l'altro insieme, non potendo essere l'uno solo dei due.

Difatti noi non avremmo idea di infinito ove non ci fosse dato un termine finito; ma neppure avremmo l'idea di un finito ove questo non apparisse come una limitazione di un qualchecosa, ossia come un elemento distinto in un campo indistinto e più generale, con cui si trovi in immediato rapporto di contrasto e in genere di relatività.

Così ci sembra che le antinomie kantiane rispetto al-

l'infinito abbiano un valore intrinseco ed esprimano appunto contraddizioni della ragione, le quali però, per essere necessarie, devon trovar la soluzione nel fatto stesso dell'inevitabile loro presentarsi indissolubilmente, l'una come correlato e conseguenza dell'altra. Un tal conflitto sarebbe meno vivo ove si trattasse di un semplice indistinto, perchè allora verrebbero appunto a mancare quei motivi di determinatezza, che rendono possibili i più forti contrasti, più sentite le opposizioni e più ripetuto il bisogno della risoluzione. Ma dacchè il pensiero si è fatto sempre più determinato, sempre più definito, sempre più inevitabile sarà anche l'idea dell'infinito accanto a quella del finito. Per adoperare una frase familiare, il pensiero non vive di solo finito, nè di solo infinito, ma della vicenda di entrambi e del loro accordarsi in un sistema, nel quale ciascuno di quei due concetti rappresenta una parte non prevalente.

Abbiamo veduto che quattro sono le direzioni nelle quali è applicabile il concetto di infinito: la estensione e la divisibilità nello spazio, il passato e il futuro nel tempo. Anche vedemmo che il vero concetto di infinito si applica in questi casi, in quanto si prescinde il più possibile dalle condizioni della esperienza.

Ora deve osservarsi che qui rimangono alcune condizioni fondamentali, imposte, almeno in origine, dalla esperienza, e che si riassumono nella diversa natura e costituzione delle idee di tempo e di spazio, di estensione e di successione, di punto e di istante. Ora, se un fondamento empirico, come la estensione spaziale o la successione temporale, è pur sempre (malgrado se ne concepisca la forma pura) supposto per lo svolgersi delle idee di finito e di infinito, non è meno vero che questo processo di svolgimento è qualcosa di imposto, ossia è un modo di pensiero che viene applicato a dei dati. Anche qui adunque, come pure nel fatto che secondo Kant il vero progresso in infinito è inerente alle intuizioni pure del campo mate-

matico, risulta l'identità dell'infinito con l'attività stessa del pensiero.

Ma, come abbiamo detto, il pensiero dovrà essere determinativo, ossia capace di fissare limiti determinati, per poi oltrepassarli; e siccome questo alternarsi vicendevole del limite e del non limite è tanto più notevole e intenso quanto più precisa sarà la determinazione limitativa, così si comprende che, se correlato necessario dell'infinito è il finito, ancor meglio lo sarà il finito definito, e in modo ancor più adatto il finito numerabile.

Per questo ci sembra che la vera idea dell'infinito si abbia ove si introduca misura e numero. Essa, filosoficamente considerata, corrisponde in fondo alle esigenze delle funzioni di analisi e di sintesi, con questa differenza, che le due funzioni citate non esauriscono tutto quanto il processo mentale del finito in rapporto con l'infinito; poichè, se il finito è un caso determinato del processo sintetico, l'infinito è il caso estremo dell'analisi, anzi oltrepassa il potere dell'analisi. Difatti esso non è, nel nostro caso, l'analisi di una sintesi preformata, ma è un procedere da un limite varcato verso un limite nuovo non ancora raggiunto, ossia è l'inesauribilità, in quanto tale, delle sintesi. Quindi non si tratta del comporsi e scomporsi di un quanto, ma del risolversi del quanto nel continuo, che è ben altra cosa, e del continuo nel quanto, vicendevolmente. Se può parlarsi di sintesi e di analisi nel caso di composizioni di parti in un tutto e del tutto nelle sue parti, nel nostro caso si deve andare più in là: cioè si deve prima ammettere che si tratta di un numero infinito di parti, e poi si applica il processo mentale di sintesi e di analisi ma in infinito. Ciò non vuol dire che il concetto dell'infinito si ottenga mediante la verifica empirica di tutti gli infiniti singoli casi di sconfinamento, o insomma con la successione temporale e l'aggiunta spaziale. Ciò ci ricondurrebbe al regresso indefinito empirico. Il concetto di infinito è racchiuso in una specie di legge, che considera non

il solo finito o il solo infinito come dati, ma l'insufficienza dell'uno e la irraggiungibilità dell'altro, mediante il trapasso, la possibilità del divenire dall'uno all'altro; ed è perciò non la espressione di un dato concreto o astratto, ma un simbolo inteso ad esprimere solo una tendenza non soddisfatta, un fatto non terminato. — Ora, siccome questo processo di pensiero, come vedemmo, consta prima di una determinazione o definizione di un dato, e poi dello sconfinamento al di là di esso, così si comprende che essa sarà relativo al grado di determinazione del dato; quanto maggiore questa, tanto più attivo quel processo, e tanto più complesso il concetto dell'infinito.

IV. — L'INFINITO MATEMATICO

Il problema dell'infinito assume la sua più precisa determinazione e una proporzionale importanza nel campo delle scienze esatte e precisamente della matematica. Esso si presentò più urgente man mano che, insieme collo sviluppo interno della speculazione matematica e della geometria, si moltiplicavan le esigenze di adattamento della matematica ai problemi della natura.

Anzitutto occorre riflettere che si dà una doppia necessità di comprendere nelle discipline matematiche il problema dell'infinito. Da una parte la geometria pura, la geometria euclidea, e la scienza dei numeri lasciarono sempre di per sè aperte certe questioni fondamentali, fra le quali alcune relative all'infinito. Così si comprende come sin da remote epoche e dai tempi della Grecia si ponessero quesiti di tal natura, e se ne continuasse la discussione nelle epoche posteriori. D'altra parte, quando più tardi le scienze della natura ebbero uno sviluppo fortissimo, esse vennero sempre più accostandosi alla matematica, e questa sempre più si congiunse con esse, a fine di farle assurgere da tentativi empirici a raccolta sistematica di leggi e a sistemi coordinati di cognizioni esatte. Così è che la matematica trovò nuove applicazioni nella fisica, nell'astronomia, ecc. La ricerca incessante diede sempre nuovi fatti sperimentali, e nuove occasioni allo sviluppo del calcolo. Soprattutto frutto di tal ricerca fu la scoperta graduale di rapporti sempre più intimi tra i fenomeni; rapporti scoperti nella natura e

nella coscienza. Si danno processi naturali, in cui le proprietà e gli studî dei corpi subiscono o sembrano subire variazioni continue, ininterrotte, senza salti. Il calcolo differenziale è appunto un calcolo di queste variazioni. In questi casi si tratta di trovare una legge, la quale domini il decorso totale del fenomeno facendoci conoscere ciò che di questo fenomeno si attua in ciascun singolo istante. Poichè l'esperienza ci mostra che nel decorso totale di un processo naturale le singole fasi stanno tra di loro in un rapporto o nesso causale, in modo che l'una è per lo meno condizionata dalla precedente, così si comprende che, ove si applichi il calcolo a determinare nel modo più esatto e soddisfacente gli effetti di ciascun singolo momento del divenire o dell'avverarsi di un fenomeno, si avrà alla fine risolto il compito di scoprire la legge che ne governa il decorso d'insieme, visto che i singoli momenti sono legati indissolubilmente in un divenire continuo, in una variazione senza salti. Per tal modo, come dal calcolo delle variazioni, più piccole di qualsiasi quantità apprezzabile ossia infinitesime, si risale alla legge generale del fenomeno, da questa deve esser possibile ridiscendere pure col calcolo ai singoli momenti e variazioni. — Esempî di un tal comportarsi del fenomeno sono, p. es., il moto di un pianeta intorno al Sole sotto l'influenza di una forza, che continuamente ossia senza interruzione si muta; oppure l'aria, che, propagando il suono, produce mediante le sue oscillazioni degli stati di ispessimento o di assottigliamento; oppure ancora la temperatura, che per una esplosione di gas sale rapidamente ad un maximum per ridiscender subito con grande velocità, ecc. In tutti questi casi, in ciascun istante l'immagine del fenomeno che sta avverandosi, è già di bel nuovo mutata, cioè sta variando continuamente. Ora noi non possiamo rappresentarci tali fenomeni che in un sol modo: scomponendo il processo naturale nelle sue parti elementari costitutive, ossia in processi minimi che durino un tempo minimo. Ma siccome per ciascuno di questi pro-

cessi minimi, noi immaginiamo un decorso uniforme del fenomeno, così, di fronte al nostro modo di concepire, il processo naturale si muta in una serie di variazioni a salti, mentre in realtà il processo stesso è una variazione continua (« natura non facit saltus »). Se, p. es., un corpo si muove uniformemente, noi intendiamo per velocità la via percorsa in 1": ma se si muove con velocità mutevole, noi, per farci un'idea del suo movimento e della sua velocità, studiamo il processo di movimento durante un assai piccolo intervallo, e lo pensiamo uniforme ossia di velocità costante per quell'intervallo; e così facciamo per ogni singolo piccolissimo intervallo. Sicchè la velocità da noi immaginata, varia con una specie di salto da un'intervallo all'altro, mentre in realtà essa è mutevole in ogni istante, continuamente e non con un salto tra due stati costanti.

Questa contraddizione fa sì che il nostro modo di considerare il fenomeno naturale ritenga, più che altro, tutto il carattere di un metodo di approssimazione. Cercar di render questo metodo più rigoroso, ossia più conforme all'interpretazione naturale del fenomeno, è appunto compito dall'alta matematica. Il mezzo è evidente: cercar di prendere sempre più piccoli quegli intervalli nel fenomeno, e quindi più grande l'affinità e la continuità fra di loro; anzi così piccoli da scomparire pel nostro pensiero, e da accostarsi sempre più alla natura in ogni momento diversa del fenomeno naturale, scostandosi dalle necessità del nostro intelletto. Tal metodo, che è in fondo esso pure un processo, un mezzo, non solo cerca l'approssimazione, ma tenta l'espressione di una esatta legislazione del fatto naturale.

« Consideriamo — disse il Vivanti in un suo discorso ¹⁾ — un punto mobile che percorre un tratto ret-

¹⁾ *L'infinito nella natura e nella scienza*, Discorso letto nella R. Accademia Virgiliana di Mantova il giorno 12 giugno 1892, Milano 1892. — Questo lavoro insieme con un altro più ampio, mi fu offerto con squisito atto di cortesia dallo stesso illustre autore, il quale pure mi fu largo di suggerimenti preziosi, di cui qui pubblicamente gli esprimo gratitudine.

tilineo. Il fenomeno è dei più comuni, dei più semplici; eppure quanta varietà di condizioni può avverarsi! Il punto può percorrere l'intero tratto in un tempo più o meno lungo; inoltre esso può mantenere una velocità costante, oppure cominciare a muoversi rapidamente per indi rallentare vieppiù la sua corsa, o al contrario partire con moto lento ed aumentare gradatamente la sua velocità, o infine affrettare e rallentare a vicenda il proprio moto senza che nulla limiti il numero nè l'ampiezza di tali alternative. Dinanzi a tante possibilità chi non proverebbe un senso di sgomento, chi non rinuncerebbe per sempre alla speranza di vincere quest'idra dalle mille teste? Ebbene, la nuova analisi c'insegna a ridurre le infinite varietà accennate ad un tipo unico, e precisamente al più semplice, quello d'un movimento *uniforme*, cioè effettuantesi con velocità costante. Prendiamo una piccola porzione del tratto rettilineo considerato; mentre il punto percorre questa parte del suo cammino, la sua velocità varia sì, ma d'assai poco, sicchè può dirsi che il moto del punto lungo il piccolo tratto è *press'a poco* uniforme. La differenza poi è tanto meno sensibile, quanto più breve è il tratto parziale che si considera. Se adunque noi decomponiamo l'intera traiettoria in tratti parziali estremamente piccoli, il moto del punto, di qualunque natura esso sia, riuscirà decomposto in una successione d'altrettanti moti *pressochè* uniformi; epperò, se noi riguardiamo il movimento lungo ciascuno dei piccoli tratti parziali come *rigorosamente* uniforme, e prendiamo l'insieme di tali moti, il risultato ottenuto differirà tanto meno dal moto che ci siamo proposti di studiare, quanto più grande è il numero delle parti in cui la traiettoria è stata divisa. *Questo concetto, che aumentando convenientemente il numero delle divisioni si può rendere il risultato tanto prossimo al vero quanto si vuole, s'esprime dicendo che, quando la retta è divisa in parti « infinitesime », cioè portate sino all'estremo limite della piccolezza, il moto lungo ciascuna di queste parti è « rigorosamente » uniforme,*

e la somma di tali moti rappresenta « esattamente » il moto proposto. — Un paragone tolto dall'aritmetica elementare chiarirà meglio questa idea. Se si trasforma una frazione ordinaria in frazione decimale, generalmente l'operazione non avrà un termine, e quindi, qualunque sia il numero di cifre decimali a cui ci arrestiamo, il risultato sarà sempre approssimato. Noi possiamo però renderlo tanto vicino al vero quanto ci piace prendendo un numero conveniente di cifre; e quindi possiamo dire che, quando avremo idealmente effettuata l'intera riduzione, la frazione decimale ad infinite cifre così ottenuta rappresenterà *esattamente* la frazione ordinaria proposta.

Così è lecito dire che la frazione decimale composta d'una infinità di 6 ha *esattamente* il valore $\frac{2}{3}$. — Ecco dunque come il calcolo infinitesimale riduce qualunque moto ad una somma di moti uniformi, e nella stessa guisa esso sostituisce ad una linea curva qualsiasi un insieme di piccolissimi tratti rettilinei, cioè un poligono ad infiniti lati inscritto nella curva stessa. Tutta la geometria e la meccanica sono così ridotte alla linea retta ed al moto uniforme, i due elementi più semplici possibili. Non resta più che da risalire dal fenomeno parziale, elementare, al fenomeno totale; e questo è compito della parte tecnica del calcolo. » Poi, passando a dar ragione della parola « infinitesimo » il Vivanti dice: « *Già avvertii che questo termine esprime semplicemente doversi la divisione in parti immaginare spinta oltre ogni limite assegnabile.* Ma tale significato, accolto oggidì quasi unanimemente dai matematici, non è quello che gli fu sempre dato, chè anzi da molti gli venne attribuito un valore più positivo, ritenendosi da questi che realmente esistessero, od almeno potessero concepirsi, queste particelle infinitesime, un'infinità delle quali riunite insieme può formare un segmento finito ». Dal che si ricava che quel concetto di « infinitesimo » è matematicamente quello di una parte piccola quanto si vuole, cioè più piccola di qualunque assegnabile.

Ma questo concetto, che è il vero concetto di infinito matematico ha, al pari di ogni altro, la sua storia, e diede luogo a dispute non ancor terminate. Onde non sarà fuor di luogo entrare un po' nell'analisi storico-critica di esso, giovandoci a tal uopo di un lavoro lucidissimo del Vivanti¹⁾, e di uno recente del Vecchietti²⁾. — Dice il primo nella Introduzione del lav. cit., che « l'*infinitesimo*, il *momento*, l'*indivisibile*, hanno la loro comune origine nella tendenza, che è connaturale all'uomo, a studiare i fenomeni complessi della natura, e nella necessità, da esso sentita, di decomporli a tal uopo in fenomeni parziali più semplici, più accessibili ai mezzi di ricerca di cui egli può disporre ». Ora, se, conformemente a tale necessità, per determinare la lunghezza di un arco di curva, lo si scompone in archi parziali i quali quanto più piccoli tanto meno differiranno dalle relative corde, e se la scomposizione la si prosegue sino a giungere all'estremo limite della piccolezza, ci si troverà finalmente dinanzi all'uno o all'altra di queste due soluzioni: o a punti geometrici o a tratti rettilinei. Nel primo caso si giunge ad un inesteso e ad un indivisibile, e allora bisogna immaginare questo punto inesteso dotato di una proprietà che lo renda atto a produrre l'estensione e quindi tale da considerarsi come elemento generatore del continuo. Nel secondo caso si giunge sempre a un tratto ulteriormente decomponibile. Insomma l'elemento che si considera è nei due casi differente. O si vuole esprimere la « *legge di generazione del fenomeno* », il modo in cui esso tende a continuare, ossia il fatto che l'elemento che si considera è atto a generare quel determinato moto, quella determinata linea. In questo senso l'infinitesimo, *considerato quale elemento generatore delle grandezze finite*, viene concepito come un ente la cui gran-

¹⁾ *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla Matematica*, Saggio storico. Nuova ediz. riveduta, Napoli 1901.

²⁾ *L'infinito*, Saggio di psicologia della Matematica, Milano 1908.

dezza è *nulla*, ma che possiede *in un dato modo e grado* l'attitudine, la tendenza a generare grandezze. È ciò che esprimono i filosofi dicendo che l'infinitesimo è una *grandezza intensiva* ». Oppure, volendo far figurare questo elemento nell'aritmetica, la quale opera unicamente su « grandezze estensive », lo si considera come un « ente dotato di estensione infinitamente piccola », ossia di una estensione che si può far sempre più piccola. In un caso si parte dall'inesseso, ma si giunge a grandezze finite; nell'altro non si esce dal concetto di una estensione: nell'uno il « punto assolutamente inesteso », nell'altro la « particella dotata di estensione infinitamente piccola ».

Ma, per entrare più addentro nel concetto matematico di infinitesimo, bisogna studiarlo sotto quattro aspetti: l'infinitesimo considerato come rigorosamente nullo, l'infinitesimo attuale cioè considerato come una grandezza costante, la questione dell'angolo di contatto, l'infinitesimo come grandezza intensiva.

Rispetto alla prima questione, va notato che Leibniz¹⁾ stesso mostrò molta incertezza nella definizione dell'infinitesimo. Posto il concetto dell'« elemento costituente del continuo » sotto la forma di « infinitesimo » e quindi di una grandezza estensiva, si considerò però questo infinitesimo come una quantità che, moltiplicata per un numero qualunque, è sempre minore di qualsiasi quantità finita ossia di qualunque grandezza assegnabile.

Con questo concetto si affacciava la questione se potessero concepirsi senza contraddizione grandezze diverse da zero e minori di qualsiasi grandezza assegnata ad arbitrio. Leibniz in proposito afferma che le quantità infinite ed infinitesime « nihil aliud sunt, quam fictiones », e nega

¹⁾ *Opera omnia*, ed. Dutens, Ginevra 1768, T. I, pag. 107; T. III, pag. 500-1; ecc. — ed. Gerhardt (« Leibniz. math. Schriften », Berlin 1849-50, HALLE 1855-63), T. II, pag. 288; T. IV, pag. 110, 218; T. V, pag. 389; T. VII, pag. 68, 273, ecc. — *Briefwechsel zwischen L. u. Chr. Wolff*, ed. Gerhardt, Halle 1860, pag. 141, ecc.

che esista un numero propriamente infinito od infinitesimo: altrove dice « infinitum *actu* in natura dari non dubito »; altra volta definisce le « grandezze incomparabili » come quelle, di cui l'una, moltiplicata per un numero qualsiasi, non eccede mai l'altra. Dice che si danno « quantità inassegnabili »; che i differenziali devono considerarsi come vere quantità; che due grandezze devono ritenersi eguali anche se la loro differenza invece di esser nulla è incomparabilmente piccola; che le linee si compongono, anzichè di punti, di linee infinitesime; che è incerta l'esistenza delle quantità infinitesime; che è indifferente considerare i differenziali come attualmente infinitesimi o come arbitrariamente piccoli; che l'infinitesimo è un intensivo. Onde, tra gli autori posteriori, Wolff ¹⁾, Achard ²⁾, Gerdil ³⁾, Mansion ⁴⁾, sostengono non aver Leibniz ammessa l'esistenza di quantità infinitesime diverse da zero; mentre Grandi ⁵⁾ sostiene l'opposto, e Lasswitz e Cohen ⁶⁾ gli attribuiscono il concetto di infinitesimo intensivo. Bernoulli ⁷⁾ e Grandi espressero il concetto che l'« infinitesimo » è semplicemente « una quantità finita variabile e tendente a zero »; D'Alembert ⁸⁾ dice che le espressioni di infinitesimo e di infinito sono « puri modi di dire », e che « la matematica ragiona sempre e soltanto su quantità finite »; e anche matematici che

¹⁾ *Philosophia prima sive ontologia*, III ed., Verona 1736, p. 357-8.

²⁾ *Réflexions sur l'infini mathématique*, Hist. de l'Ac. de Berlin, T. I, pag. 153.

³⁾ *De l'infini absolu considéré dans la grandeur*, Misc. Taurin., T. II, P. III, pag. 4.

⁴⁾ *Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal*, Gand 1887, p. 28.

⁵⁾ *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica*, Pisa 1710, pag. 97.

⁶⁾ LASSWITZ: *Geschichte der Atomistik von Mittelalter bis Newton*, Hamburg u. Leipzig 1890. — DI COHEN (*Das Princp d. Inf.-meth. u. s. Gesch.*), diremo più innanzi.

⁷⁾ *Opera*, Ginevra 1744, pag. 371.

⁸⁾ *Encyclopédie franc.*, art. *Différentiel*; — *Mélanges, etc.*, Amsterdam 1766-7, T. V, pag. 240-4.

negavano la possibilità di quantità infinitesime non nulle, mantennero tuttavia la espressione di « infinitesimo » come quella che designa una quantità di « piccolezza arbitraria » od anche « una quantità variabile tendente a zero ». Data questa tendenza sempre più distinta a concepire l'infinitesimo come una quantità non nulla, si comprende come il tentativo di Eulero ¹⁾ di considerarlo come un « nulla » suscettibile di avere « rapporti determinati » con altri enti della medesima natura non potesse avere esito soddisfacente e fosse poi del tutto abbandonato. L'idea prevalentemente accettata fu adunque quella di un « infinitesimo potenziale, cioè di una quantità finita e variabile tendente a zero. » — Fissato bene questo concetto, e quindi anche quello di grandezza intensiva che ci fa pensare « la retta generata da punti e non da linee », si vede come esso differisca da quello meno sicuro di un « infinito attuale », che può definirsi « una quantità ordinaria tanto piccola, che, ripetuta un numero qualsiasi di volte, non arriva mai a formare l'unità ».

Ciò posto, secondo il concetto d'infinito attuale « se si divide l'unità in n parti (*ennesimi*), e se m è un numero qualunque minore di n , m di quelle parti non basteranno a formare l'unità. Ora divenga n infinito; m potrà essere qualunque; una delle parti aliquote potrà chiamarsi un *infinitesimo*, e nessun insieme finito di tali parti sarà sufficiente a ricostruire l'unità primitiva ». « L'infinitesimo attuale implica l'esistenza di quantità costanti diverse da zero e minori di ogni grandezza assegnabile, ed è quindi diverso dal concetto di una quantità finita variabile tendente a zero » ²⁾).

¹⁾ *Institutiones calc. differ.*, Pavia 1787, § 83.

²⁾ V. FONTENELLE: *Éléments de la géométrie de l'infini*, Suite des Mem. de l'Ac. Royale des Sciences, Paris 1727, pag. 116; — VARRIGNON: *Éclaircissements sur l'analyse des infiniment petits*, Parigi 1725, pag. 41; — cfr. la prefaz. di FONTENELLE alla *Analyse des infiniment petits* di L'HOSPITAL; — POISSON, *Traité de mécanique*, III ed., Bruxelles 1838, pag. 6-7.

Alla questione dell'infinitesimo attuale si connette quella dell'« angolo di contatto » (« cornicolare », *καταοειδής*), formato dalla circonferenza e da una sua tangente. Già nella prop. 16.^a del L. III degli « Elementi » di Euclide è detto: « Recta quae ad diametrum circuli in termino perpendicularis erigitur extra circulum cadet, nec in spatium inter rectam et ambitum ulla alia recta interponetur, et angulus semicirculi quovis acuto angulo rectilineo maior est, reliquus autem minor »¹⁾. Si trattava di vedere se quell'angolo, formato dalla circonferenza e dalla tangente, sia o no rigorosamente nullo. La questione venne ripresa da Campano nel sec. XIII, Tomaso Bredwardin (1290-1349), Nicolò Cusano, Cardano. Quest'ultimo²⁾ si propose di dimostrare che l'angolo mistilineo alla base di un segmento di cerchio è minore di un retto finchè il segmento non supera il semicerchio, maggiore di un retto quando il segmento supera il semicerchio, ma non è mai eguale ad un retto: e da ciò concluse che si può giungere dal minore al maggiore senza passare per l'eguale. Peletier (1517-1582) dichiarò che codesto angolo di contatto è rigorosamente nullo: contro di lui Clavio (1537-1612) sostenne essere l'angolo di contatto una vera quantità, minore di ogni angolo rettilineo, e che può dividersi e moltiplicarsi. Dell'opinione di Peletier furono Commandino, Vieta, Galileo, Borelli, Viviani, Wallis, Jac. Bernoulli, ecc., mentre con Clavio si schierarono Guido Ubaldo Del Monte, Hobbes, Leibniz, Newton, Fontenelle. La soluzione — osserva il Vivanti — sta in ciò: che, come voleva Peletier, l'angolo di contatto non è paragonabile all'angolo rettilineo; ma poi da questo non deve inferirsi che il primo sia assolutamente nullo nè che due angoli di tal natura non siano paragonabili fra loro (e in ciò aveva ragione Hobbes). L'angolo di contatto e l'angolo rettilineo non possono essere misurati con una stessa

¹⁾ *Euclidis Elementa*, ed. Heiberg, T. I, Leipzig 1883, p. 209.

²⁾ *De subtilitate*, L. XVI (Opere, Lione 1663, T. III).

misura: difatti esiste la grandezza angolo di contatto, ma la misura di esso per mezzo dell'arco di cerchio non esiste, il che non prova che quell'angolo non esista.

L'infinitesimo fu anche considerato come grandezza intensiva; ed è questo un criterio molto importante. Due sono le forme fondamentali che l'infinitesimo intensivo ha successivamente assunte: la « cinematica » e la « dinamica », di cui la seconda dominò specialmente dopo Galileo. La prima, la cinematica, considerava piuttosto il fatto della generazione del continuo mediante il moto del punto; la seconda, la dinamica invece, considera specialmente la tendenza, il « conatus », « momentum », ecc. inerente al punto inesteso generatore di estensione, e segna la nascita del calcolo differenziale, in cui ha importanza quell'ente che è il « differenziale » di una quantità. Già Nicolò Cusano disse che la linea è la « explicatio » del punto, come il tempo è la evoluzione dell'istante. Giordano Bruno ¹⁾ considera il « minimum » come il primo elemento attivo generatore dell'estensione: « Ergo linea nihil est nisi punctus motus, superficies nisi linea mota, corpus nisi superficies mota, et consequenter punctus mobilis est substantia omnium ». Per Bruno il « minimum » è il fondamento della intera natura ed anche della conoscenza, cioè è il punto di cominciamento dell'essere e del conoscere. Souvey (Sovero) e Cavalieri stabilirono in modo sicuro il concetto del moto quale mezzo generatore degli enti geometrici. Il primo di essi ²⁾ sostiene che la geometria non può sussistere senza l'idea di moto e le definizioni genetiche degli enti geometrici: il secondo ³⁾ afferma che l'elemento generatore della superficie è la linea che si muove. Per Guldino (1577-1643) la linea è la « potenza » del punto, e la potenza può essere retta e circolare:

¹⁾ *Opera latine conscripta*, T. I, P. III, ed. Tocco e Vitelli, Firenze 1889, pag. 148.

²⁾ *Curvi ac recti proportio*, Padova 1630, pag. 271-2.

³⁾ *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna 1635, Prefaz.

distingue la « genesi » del continuo dalla « composizione » sua, la quale ultima è un concetto che si collega con quello di « misura »; difatti, se un corpo è immaginato come generato dalla rotazione d'una figura piana intorno ad un asse posto nel piano di essa, per misurare il volume del corpo nondimeno occorre scomporlo in parti elementari e calcolare separatamente la grandezza di ciascuna di queste parti. Barrow considera pure il continuo come « composto » di elementi, siano questi estesi o inestesi; e però nulla avviene nella natura senza il moto. Hobbes nel suo « De Corpore » (1655) si ricongiunge invece al pensiero di Galileo, il quale per primo considerò nel fenomeno del moto l'elemento dinamico, il « momento » del punto o la sua tendenza a muoversi con determinata direzione e velocità, quindi l'inesteso come generatore del continuo. Hobbes, però, specificò il suo concetto chiamando « conato » il moto lungo uno spazio minore di qualsiasi assegnato: quindi il concetto delle infinite « posizioni » del punto mobile veniva oltrepassato insieme con le obiezioni degli Eleati contro la possibilità del movimento. Newton¹⁾ rimane celebre per il metodo delle « flussioni », e quindi per le « quantità fluenti » ossia « gradatamente e indefinitamente crescenti » generate dal moto. Esso determina propriamente le velocità o i rapporti delle velocità variabili con cui quelle quantità si producono. Invece di parti per quanto piccole, si considera un movimento continuo, e si intende di determinare le « quantità mediante le velocità dei movimenti o degli incrementi con cui son generate »: quindi « flussioni » sono queste velocità, e « fluenti » sono le quantità così generate. Le velocità poi sono ridotte ai « momenti delle quantità fluenti », presupponendosi quelli come le « parti indefinitamente piccole di cui crescono in parti indefinitamente piccole di tempo ». Gli incrementi sono

¹⁾ *Opuscula mathematica, philosophica, et philologica*, Losanna e Ginevra 1744, T. I.

perciò istantanei, « momenti », e sono proporzionali alle velocità o « fluxiones ». Taylor e Mac-Laurin seguirono anch'essi quasi completamente tali idee.

Ma più tardi la questione dell'infinitesimo intensivo si acui nel campo filosofico e perdè d'interesse pratico in quello matematico. Vale quindi la pena, prima di procedere oltre, di riferire alcune idee del Cohen sull'intensivo in rapporto al metodo infinitesimale, avvertendo però che è necessario premettervi alcuni schiarimenti sulla interpretazione critico-conoscitiva del medesimo, condotta sulle orme della critica kantiana.

Per il Cohen ¹⁾ anzitutto nè la logica nè la teoria della conoscenza potrebbero dirsi soddisfatte senza il calcolo infinitesimale; anzi quest'ultimo lo si deve secondo lui considerare dal punto di vista critico-conoscitivo. Per il Cohen, Leibniz e Newton, con l'introduzione del calcolo, non fecero che ampliare e stabilire solidamente quella esperienza, che poi Kant porrà come scienza matematica della natura, per il problema della critica della ragione; insomma l'autore vede un vero nesso tra il calcolo infinitesimale e la speculazione filosofica. Egli vede il concetto del « differenziale » fondato sulle stesse basi della « critica della conoscenza » e precisamente in corrispondenza della « categoria della realtà » e del fondamento della « grandezza intensiva ». Per comprender ciò, bisogna riferirsi a Kant, a cui l'autore si attiene continuamente. « Realtà » è intesa non come contenuto di sensazione o di intuizione pura sensoriale, ma in quello di speciale premessa del pensiero (come « sostanza » e « causalità »), condizione dell'esperienza, diversa quindi da quell'altra realtà empirica che sarebbe la semplice « Wirklichkeit ». Ora — nota il Cohen — il significato critico della « realtà » (« Realität ») viene di preferenza riferito alla « intensità infinitesima ». Reso

¹⁾ *Das Princip der Infinitesimal-methode u. seine Geschichte*, Berlin 1883.

così equivalente l'intensivo al differenziale (Leibniz), Cohen dice che la grandezza infinitesima, essendo grandezza, non può essere affatto indipendente dalla intuizione (Kant), considerata questa non come « Intuition » o « Imagination », ma come semplice « Anschauen », ossia non come una conoscenza ma come l'elemento di una conoscenza, e precisamente come riferimento della coscienza ad un dato. Però, in quanto il numero viene reso indipendente dalla intuizione spaziale, acquista valore per il differenziale l'elemento della intuizione interna. Un altro elemento decisivo per il concetto del differenziale, e che ricorre storicamente nell'opera di Kepler, di Galileo, in Leibniz, in Newton, è il motivo meccanico, che il Cohen mette in relazione col concetto fondamentale (categoria) della realtà nel purò pensiero, e quindi, giusta quanto vedemmo, con la realtà intensiva, la quale poi è in rapporto con la intuizione costituendo la « realizzazione del dato » ossia la « qualità »; importantissima quest'ultima, giacchè la realtà intensiva, in rapporto appunto con la intuizione e quindi con la quantità, presuppone l'unità, ma un'unità qualitativa. E ciò tanto nella geometria che nell'aritmetica e nella meccanica. L'autore qui si riporta a un altro importante suo lavoro¹⁾ e a uno classico e molto noto del Gerhardt²⁾. Poi contrappone i concetti negativi del limite e dell'indivisibile a quello della continuità, mostrando la necessità e l'importanza di quest'ultimo in rapporto coll'infinito e coll'infinitesimo; tanto che deve appunto darsi la precedenza all'infinito per poter con esso e da esso produrre il finito.

In realtà corpi finiti possono esser costrutti mediante il movimento di certi elementi, il che nuovamente include il concetto dell'infinitesimo e della continuità: ed è noto in che consista il calcolo integrale. La continuità ha il suo fondamento in un carattere generale della coscienza; è una

¹⁾ *Platons Ideenlehre und die Mathematik*, 1878.

²⁾ *Die Entdeckung der höhern Analysis*, 1855.

espressione speciale della legge generale dell'unità di coscienza, e l'autore la pone anche in rapporto diretto col famoso « limitirende Urtheil ». Essa presuppone non solo il « natura non facit saltus », ma anche il « conscientia non facit saltus »; e in questo senso essa si connette col metodo scientifico infinitesimale. Ma — nota il Cohen — si deve intendere « die *Continuität* nicht erst als *Stetigkeit* in der unendlichen Teilbarkeit des Raumes », quindi non come appartenente in prima linea alla « Raum-Anschauung », ma addirittura come un fondamento della coscienza pensante, e come tale presente nel campo matematico che è parte tanto integrativa del pensiero generale. — Ora è ben vero che il numero sembra rappresentare il principio del « discreto », ma è anche vero che esso lo ha sorpassato, in quanto il numero irrazionale rappresenta di nuovo il principio risorgente della continuità. E, del resto, in generale il numero, se da principio servi a necessità empiriche da cui era bandito il principio della continuità, non può dirsi che dal punto di vista sistematico e scientifico non fosse in accordo con questo principio medesimo già al tempo dei Pitagorei.

Soprattutto, secondo l'autore, il significato profondo dell'unità ha radice nella continuità della coscienza; e quindi, corrispondendo ad un infinito continuativo, sorpassa interamente il carattere della quantità. Si tratta, insomma, di ciò che Vecchietti (lav. cit.) sotto un rispetto speciale chiama il « sentimento di persistenza del nostro pensiero ». Quindi l'unità, per tal modo considerata, viene ad essere, come già vedemmo, una unità qualitativa non quantitativa; o meglio, sono in essa collegate qualità e quantità. Cohen ne dà la seguente definizione: « die *Continuität* ist diejenige Qualität, welche die Quantität der Zahl-Einheit zum Unendlichkleinen der Realität vertieft ». Il che significa che essa esprime un intimo rapporto tra il concetto quantitativo e l'infinita realtà, intesa quest'ultima nel senso concettuale kantiano sopra accennato.

Trovata per tal modo la radice prima dell'infinitesimo nell'unità e nella continuità della coscienza, è naturale per Cohen il concetto: « das Unendliche lässt das Endliche aus sich entstehen », « l'infinito genera da sè il finito ». Il numero infinitesimale crea così l'unità della realtà, non la unità quantitativa: e il significato di una tale realizzazione si rivela nel concetto della « funzione ». Il numero allora è pensato come mobile, è la « variabile »; e nella variabilità continua esso rappresenta la grandezza, ma come « valore », come « concetto di valore ». Così si comprende l'importanza dei principî dell'« interpolazione », della « flussione », « funzione », ecc., e di molti servizî resi dall'algebra, al cui sviluppo era necessario uno sviluppo corrispondente del concetto di continuità. — Questo concetto, che per i Greci aveva senso quasi esclusivamente come divisione all'infinito dello spazio, dal punto di vista sensoriale ha anche un'altra applicazione nel tempo, e quindi nel movimento (Kepler). « Erst in der Zeit wird die kontinuierliche Zahl-Einheit mit dem kontinuierlichen Raum-Gebild verbunden ». — Barrow collegò i tre concetti della grandezza, del moto, e del tempo in rapporto alla continuità: « Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus est motus, et propter motum tempus quoque continuum est »¹⁾. La continuità si fa valere così nel pensiero del grande maestro di Newton, e anche in tutta un'epoca e nelle successive. Il punto che designa la direzione e la velocità del movimento, si mette in rapporto anche coi reali processi naturali: nel problema meccanico si introduce il concetto del differenziale; ed ecco Galileo che pone l'infinito nel senso della realtà producente, come appare dalla definizione e dimostrazione sua del concetto della « forza accelerante ». Prevalle sempre il concetto che il finito deve costituirsi da e con l'infinito, e non mediante l'indivisibile: « In hac et aliis similibus objectionibus adversario satisfacere possumus,

¹⁾ *Lectiones geometricae.*

dicendo non solum non duo, sed nec decem, nec centum, nec mille indivisibilia quantitatem divisibilem posse componere; sed bene infinita » ¹⁾). D'altra parte è forse meno difficile pensare — dice Galileo — la risoluzione della linea ne'suoi infiniti punti, che non la « divisio in suas partes quantas »; onde per lui si deve giungere, come già abbiamo visto, a una distinzione o divisione nel concetto di grandezza. La quantità diviene una sottospecie della grandezza; « et ex eo ipso, quod partes sint infinitae concluditur, eas esse *non quantas*, cum quanta infinita faciant extensionem infinitam.... *Eo ipso* quod divisio in partes quantas perpetuo continuari possit, *necessitas compositionis ex infinitis non quantis introducitur* » (op. cit., 31 XIII, 38). Giustamente osserva qui il Cohen che si ha di bel nuovo una prova della distinzione tra estensivo e intensivo. Essa si rivela insieme con un motivo ancor più decisivo, l'acceleramento, nella famosa legge di caduta dei gravi; e si manterrà nel concetto del differenziale.

Il concetto dell'acceleramento è, in fondo, il risultato del metodo degli « indivisibili », che fu del Cavalieri, e a cui giunse e doveva giungere pure Galileo con le sue « partes non quantae ». Esso è dal Cohen posto in rapporto col punto di vista critico-conoscitivo, in quanto non gli sfugge che Galileo stesso aveva detto « mente concipio »: quindi nello stesso rapporto egli pone la legge d'inerzia e la persistenza. — Abbiamo visto l'importanza del movimento per il concetto del differenziale. Partendo dal movimento uniforme, è necessaria la premessa del tempo, la quale è quindi necessaria anche per lo spazio. Non solo: ma è necessaria la premessa del continuo del tempo, e d'altra parte è indispensabile la « intensio » per la velocità nella « extensio » del tempo: « ... intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem ». Quindi anche in Galileo il motivo della forza è la intensità, che è, come

¹⁾ *Disc.*, pag. 28 opp. XIII, pag. 35, 1699.

vedemmo, un fattore decisivo del concetto del differenziale, e che si stacca nettamente da quello puramente quantitativo della estensione, che invece, p. es., ritorna nella seguente definizione di Suarez ¹⁾: « *velocitas motus non est proprie intensio, sed est veluti condensatio partium motus intra brevius tempus* ». Con Galileo, mentre la velocità è semplicemente proporzionale al tempo e presuppone la uniforme ed estensiva applicazione del tempo allo spazio, la « intensio » invece va riferita eminentemente all'« acceleramento ». Quindi egli così corregge un'altra definizione: « *visum est addere veteri definitioni (quae simpliciter appellat motum aequabilem dum temporibus aequalibus aequalia transiguntur spatia) particulam quibuscunque, hoc est omnibus temporibus aequalibus; fieri enim potest, ut temporibus aliquibus mobile pertranseat spatia aequalia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem minoribus, licet aequalibus, aequalia non sint* ». — Un altro progresso capitale per lo sviluppo del concetto del differenziale è la legge d'inerzia.

Per Galileo insomma ha valore, mediante la intensità introdotta nella velocità, la forza dell'acceleramento. La « intensio » come l'indivisibile, l'infinito, è il « gradus », che nel caso specifico del movimento diviene una nuova specie di grandezza. E come tale è, secondo il Cohen, da riferirsi alla « Realität », distinguendosi tanto dalla grandezza estensiva dei numeri quanto dai rapporti di proporzione della sostanza e della causalità. In Galileo ricorrono frequenti le espressioni « impeto », « energia », « momento e propensione al moto », ecc.; e in lui sono a ricordarsi, non solo dal punto di vista della curiosità storica ma ancora da quello dell'importanza teoretica per il futuro sorgere del concetto del differenziale, il triangolo degli spazi di caduta, e l'acceleramento che produce codesti spazi ed è esso stesso prodotto dal tempo continuo mediante la velocità.

¹⁾ *Disp. metaph.*, II, p. 488.

Naturalmente il Cohen interpreta questi fatti alla luce della estetica trascendentale kantiana. Quindi, come per lui non vi è cosa alcuna se non nel pensiero e proveniente dal pensiero, e se la pura intuizione è forma di ogni contenuto ed include anzi la possibilità sintetica di ogni contenuto, così è carattere idealistico della realtà la correlazione « von Sinnlichkeit und Denken », di sensibilità e pensiero. In questo senso la realtà si ha come presupposta, p. es., nella geometria: ivi entra in scena un concetto, il concetto di grandezza; ma questo si allarga sì nella geometria che nell'aritmetica e perfin nella meccanica, ed ecco sorgere la grandezza intensiva di nuovo come realtà. Così si giunge alla costruzione degli elementi, che sono condizione della validità oggettiva, o della conoscenza sintetica o degli oggetti della scienza matematica della natura, mediante il mezzo o lo strumento pensante della realtà, che si estende allo strumento sensoriale della intuizione di tempo e spazio: insomma, se il dato sensoriale è la condizione fondamentale « a priori », ad esso è però connesso l'elemento del puro pensiero, mediante cui gli schemi ideali della geometria divengon gli schemi della natura e corrispondono al concetto di realtà.

Ecco perchè, secondo l'autore, la pura matematica ha il carattere dell'applicabilità: egli dice puro ciò, che può esser sotto certe date condizioni applicato; e quindi chiama libera la matematica. Ma la cosa non deve intendersi nel senso che la natura sia già presente in sè, e che ad essa si debban solo applicare le nostre figure matematiche; bensì che per mezzo di queste essa sia da scoprire e da produrre. Ora, nella scoperta del concetto del differenziale sta appunto la prova che l'eccitamento a svelare in qualche modo la natura, è un risveglio della forza di applicazione celata nel pensiero puro già presente: tanto è vero che, crescendo e facendosi sempre più intricati i metodi matematici, tanto più divengono privi di applicazione e tanto meno puri; mentre il concetto di realtà dimostra il

valore produttivo del « puro ». Così è della « grandezza infinitesima »: l'infinitesimo non è solo un mezzo del calcolo, non è uno strumento artificiale, ma bensì un processo naturale; senza di ciò, esso non sarebbe che una maniera di calcolo insufficiente e priva d'oggetto. Esso è, adunque, lo strumento della conoscenza della natura, che forma e produce gli oggetti della natura, ma non qualcosa di esterno, bensì di intimo, che rivela un tutto unitario. Perciò nell'infinitesimo o infinitamente piccolo è fondato il finito, in quanto è scientificamente oggettivato e determinato; l'infinitesimo è il mezzo naturale potente per eccellenza per determinare la oggettività. Ad esso non può corrispondere un'atomistica materialista: la fisica matematica ha trasformato le particelle materiali in punti geometrici, a cui vengono attribuiti rapporti dinamici, e che solo in questo senso divengono punti materiali e particelle. Il punto di massa è un punto meccanico-geometrico. Il concetto cartesiano che, in rapporto all'ideale suo geometrico, rende sostanziale la estensione stessa, è sorpassato. Di fronte ai nuovi concetti della intensiva realtà, del differenziale, dell'infinitesimo, la sostanza è soltanto una proporzione, e così pure la causalità. Col concetto fondamentale della realtà, la sostanza non ha più bisogno dell'atomo individualizzato, nè la causalità della forza antropomorfa o materiale. Nelle realtà intensive sono incluse quelle unità reali a cui competono attribuzioni dinamiche, e che posson calcolarsi con le equazioni del calcolo differenziale. Quindi anche la questione dell'esteso e dell'ineteso, anzi più specialmente del punto ineteso, viene ridotta a ciò: in forza della limitazione si compie il passaggio dell'estensivo all'intensivo e l'ineteso non può concepirsi che con la tendenza all'estensione, che egli in sè e da sè fa prodursi. Saint Venant¹⁾ dice che non vi è legame logico necessario tra l'idea di esistenza, anche ma-

¹⁾ Citato in CARBONELLE, *Les confins de la science et de la philosophie*, I, 183.

teriale, e l'idea di esteso. La realtà (pensata come categoria) non è il punto: può esser pensata come tale soltanto quale unità intensiva reale, però nella necessaria unione con la intuizione pura.

Ma la questione assume uno speciale aspetto nelle seguenti parole di W. Weber a Fechner¹⁾: « Es kommt darauf an, in den Ursachen der Bewegungen einen solchen constanten Theil auszusondern, dass der Rest zwar veränderlich ist, seine Veränderungen aber bloss von messbaren Raum-und Zeitverhältnissen abhängig gedacht werden können. Auf diesem Wege gelangt man zu einem Begriff von Masse, an welcher die Vorstellung von räumlicher Ausdehnung gar nicht nothwendig haftet ». Qui la grandezza dell'atomo non si misura più secondo la sua estensione spaziale, ma secondo la sua « massa »; Weber considera quindi una specie di grandezza diversa dalla estensiva, e pone a sussidio di questo concetto la quantità intensiva o la realtà qualitativa. Per Fechner invece ha importanza l'atomo materiale e semplice, la cui semplicità implica la « discontinuità », e che però è, secondo Fechner stesso, un infinitamente piccolo: « Der Punkt allein, der aber eben hiemit vielmehr die Grenze der Raumgrößen als selbst eine Raumgröße bildet,.... ist ein Unendlichkleines unendlicher Ordnung, und gestattet keinen endlichen Größenvergleich mehr ». Inoltre per lui sussiste opposizione tra discontinuità e continuità, ossia tra numero da una parte e spazio e tempo dall'altra, quindi tra il concetto del « misurabile » rappresentato nello spazio e nel tempo, e quello del « numerabile » « in unsern Atomen in reinster Weise real hypostasirt »: il che meglio si comprende quando si aggiunga questo pensiero di Fechner: « Das Zahlensystem der Natur hat nur eine Ziffer, das Atom, und reicht damit zu den Rechnungen des Alls » (v. op. cit. « Atomenlehre », ecc.)

Ora dal Cohen questa ipotesi dell'atomo vien ripu-

¹⁾ *Atomenlehre*, 2^a Aufl., p. 88 f.

diata, e piuttosto messa a confronto con quelle più moderne della chimica contemporanea, la quale considera la materia quasi da un punto di vista fisico, cioè come processi di movimento, e quindi l'atomo non più punto materiale ma « centro di forza », ossia da un punto di vista matematico e meccanico. Ed è questo su cui insiste il Cohen: poichè per lui, mentre non han valore le considerazioni di Zöllner favorevoli a un « influxus hyperphysicus », è invece a ricercarsi nei concetti fondamentali matematici il criterio, mediante cui tutto il reale può e deve manifestare il suo valore obbiettivo: tra questi concetti rappresenta un posto eminente il concetto dell'infinitesimale. Ora, se tutto ciò che può divenir oggetto di scienza naturale è da concepirsi come « finito », esso deve pur pensarsi come una somma di realtà infinitesime intensive, ossia come un « determinato integrale », come una somma infinita di infiniti. Ed ecco di fronte i due concetti capitali: il « differenziale » rappresenta la realtà come una condizione costitutiva del pensiero: l'« integrale » rappresenta il reale come oggetto; e perciò nella analisi infinitesimale si compie, in fondo, una sintesi che realizza il « finito ». Non si tratta quindi di « astrazione », ma di un « concreto », in quanto l'integrale ubbidisce all'ideale dell'oggettivazione e della determinazione scientifica del finito. Questo intimo rapporto tra l'infinito e il finito, per il quale da realtà puramente intensive si producono ogni sorta di qualità finite, si riflette matematicamente ancora in ciò, che un differenziale, una dx non è mai uno zero, ma è pur sempre un numero, così come la quiete deve pensarsi come un movimento intensivo: secondo l'espressione del Cohen, « la dx è quel numero che porta a realtà-numero la grandezza-numero », ed è, analogamente alla « monade », un mondo intiero pieno d'una infinità.

Per mostrare come esso differenziale sia veramente in rapporto col concetto di intensità, tornerà opportuno riferire questo passo, citato dal Cohen, del nostro Secchi ¹⁾:

¹⁾ *L'unità delle forze naturali.*

« Quando Lavoisier introdusse la determinazione esatta dei pesi nella chimica, pose la *massa* come fondamento di questa scienza: ma ora essa deve assumere come nuova base la determinazione delle *velocità* da cui dipendono la forza viva o la massa dell'energia, in altre parole essa deve fondarsi sui rapporti calorici ». Così Graham spiega la diversità dei pesi degli equivalenti chimici con le diverse vie e con le relativamente più o meno ampie escursioni degli atomi stessi: così pure volumi eguali possono unirsi tra di loro e mantenere il loro movimento iniziale, mutando però il loro movimento di rotazione e con ciò anche la « *Dichtigkeit* » dell'elemento. — Al concetto stesso dell'atomo sta a fondamento, adunque, quello del differenziale.

Ma a questo punto, il Cohen ci trasporta ancor più addentro nella ricerca del fondamento giustificativo del differenziale. Se — egli si chiede — il differenziale è il rappresentante preferito della realtà, in fin dei conti ove si cela quest'ultima se non nella coscienza? Quindi « im letzten Grunde » la realtà intensiva della dx è un elemento della coscienza: alla coscienza spetta tutto che sempre si ammette come elemento critico-conoscitivo, e che d'altra parte è a determinarsi dall'analisi critico-conoscitiva. — Ora, visto che si tratta di elementi della coscienza espressione immediata della realtà, è a vedersi quali elementi debbano considerarsi tali. Non la rappresentazione, come potrebbe dedursi da una parte della filosofia postkantiana e specialmente da Herbart, perchè essa non è elemento ma è in sè già complessa: inoltre in essa, nota il Cohen, è almeno contenuta la intuizione.

Piuttosto egli pensa alla sensazione, da cui persino la speculazione greca fece scaturire la coscienza. La sensazione è in rapporto con la realtà intensiva, e quindi con la unità, nel senso che le vedemmo attribuito dall'autore, cioè come quella che esclude divisione, numerazione e misura, ed è pensata soltanto come unità, « als entspringende oder als

verschwindende, sodass sie nur zu der Null im Verhältniss steht, nicht aber zu einer sonstigen discreten Einheit. Für solche Einheit scheint die Empfindung das evidente Beispiel zu sein ». Cohen insiste volutamente su questo rapporto, giacchè vede nella sensazione l'aspetto dell'assoluto « indivisibile » e quindi « uno », che come tale è — secondo lui — persino più assoluto dell'atomo e dello stesso differenziale, poichè non lascia dietro di sè ordini più alti di sè stesso. « Sie ist da, oder ist nicht da. Wenn sie aufsteigt, ist sie da, und sie bleibt da, so lange sie nicht verschwunden ist. Ehe sie aber aufgestiegen und nachdem sie verschwunden, ist sie nicht weniger da, sondern überhaupt nicht da. Man kann die eine Empfindung stärker, lebendiger, deutlicher zu haben meinen als eine andere, und alle diese und ähnliche Unterschiede pflegt man unter dem vagen Ausdruck der Intensität zusammenzufassen; aber die stärkere Empfindung ist darum nicht mehr Empfindung als die minder starke ». Deve considerarsi la sensazione sotto l'aspetto del suo contenuto oggettivo e quindi della grandezza intensiva, e dall'altra parte come un processo della coscienza; onde vengono in questione i rapporti di coscienza e materia, di sensazione e stimolo. — Ammessa la sensazione come grandezza intensiva, questa può esser constatata empiricamente mediante il concetto della « Ebenmerklichkeit » e la legge della « soglia dello stimolo », ossia mediante il fatto che vi è un punto chiamato « soglia », in cui la grandezza dello stimolo fa sì che la « sensazione » divenga « appena osservabile » (« ebenmerklich »). Ora è appunto il concetto della « Ebenmerklichkeit » che comprende la grandezza della sensazione sotto il rapporto intensivo: due sensazioni, che sono come tali egualmente osservabili, sono come tali egualmente grandi. Naturalmente va fatta una distinzione: la sensazione, fatta astrazione dal suo contenuto obbiettivo, come grandezza intensiva o realtà consiste nella sua distintezza, e non nella cosiddetta « Stärke der Empfindung ». Perciò il Cohen sente il bisogno di ricordare che Fechner non ha detto espres-

samente che lo stimolo è sensazione oggettivata; onde esiste un rapporto di due sensazioni, una oggettivata ed una non oggettivata; mentre per lui, Cohen, deve osservarsi che appunto quando in una sensazione si astrae dal suo contenuto oggettivo nello stimolo, restando essa a determinarsi soltanto come un processo naturale, essa appare allora come l'ultimo sintomo della realtà. Ma il Cohen s'indugia ancora sopra questo punto capitale: in che rapporto sta la grandezza intensiva della sensazione con la grandezza estensiva dello stimolo? Nel rapporto seguente: la grandezza estensiva dello stimolo presuppone inevitabilmente la grandezza intensiva della sensazione, che concede allo stimolo la realtà intensiva. All'infuori della grandezza intensiva, e quindi della unità intensiva risiedente nella « Ebenmerklichkeit », non si dà misura di sensazione. Allora la sensazione è una specie di « funzione » dello stimolo, nel senso che qui riporteremo integralmente dal Cohen: « Die Aufstellung der Function $y = f(x)$, in welcher y die Empfindung und x den Reiz bedeutet, ist schlechthin ein mathematischer Fehler, weil es sich dabei um ungleichartige Grössen handelt; weil zwar der Reiz als x , und demgemäss als aus dx entstehend gedacht werden kann, die Empfindung hingegen niemals als y , sondern, sofern sie nach mathematischer Zeichensprache fixirbar scheint, immer nur als dy gedacht werden darf, nämlich als die intensive Einheit, welcher in Bezug auf die extensiven Grössen der Reize oder der Dinge das dx entspricht. dx aber ist die Einheit, aus welcher x aufsteigt; aus dy hingegen steigt kein y auf: sondern es kann nimmermehr, durch keinen Intensitätswandel, etwas Anderes werden als dy ». Posto ciò, mentre Fechner considera la funzione di sensazione e stimolo come deducibile « dagli elementi, da cui entrambi sono cresciuti » ¹⁾, Cohen riduce questi elementi ad un solo, cioè alla realtà intensiva, manifestantesi come un modo dell'unità di coscienza, e tale

¹⁾ *Elemente der Psychophysik*, I, 58.

a cui corrisponde il « differenziale ». L'analisi infinitesimale si riferisce a ciò che viene offerto dalla sensazione come un oggettivo e un reale; ed allora le cose, in quanto contenuto oggettivo della sensazione, divengono per tal modo grandezze integrali. Ma l'autore pone qui un avvertimento: ciò che in e dalla coscienza può ricavarsi in oggettività, può rappresentarsi nel calcolo infinitesimale, ma sempre purchè questo si diriga sul lato materiale; quanto al lato psichico, invece, la cosa è diversa: « wird sie dagegen auf das Psychische gerichtet, so wird eo ipso das Psychische zum Psychischen ». Quindi si comprende che Cohen si pone da un punto di vista diverso da quello di Fechner, per il quale lo psichico rientra così immediatamente sotto la generale attività psicofisica, che la misura di entrambe queste attività diviene una ed identica, tanto che la coscienza si risolve per lui in differenziali (v. la legge di misura logaritmica); e la sensazione risulta da una sommazione infinita. Cohen invece dice che, se si dà questa sommazione infinita, si tratta qui soltanto di una astrazione del materiale, ossia (secondo il suo modo di vedere idealistico-critico-conoscitivo) di un gruppo dei contenuti di coscienza, il gruppo della materia. Secondo il Cohen, insomma, se si applica un tal modo di calcolo alla coscienza, questa assume un valore di contenuto oggettivo e da oggettivarsi, quindi di materia. In questa oggettivazione interviene l'aiuto dell'infinitesimale o della grandezza intensiva come realtà; ma questa è poi niente altro che la stessa coscienza, non come contenuto materiale, ma come un fondamento della conoscenza. Quindi, in ultima analisi, si ritorna qui al concetto più sopra espresso: che il differenziale corrisponde, in fondo, alla realtà non estensiva, ma intensiva, la quale, se pure viene espressa come un contenuto oggettivato e materiale, è poi la stessa coscienza, ossia il processo intimo che la determina.

Ma se l'intensivo deve aiutarci per un lato nella interpretazione del calcolo infinitesimale, come esso è inteso del Cohen, non cessa di essere l'inestesivo generatore del continuo

e dell'esteso: inoltre dev'esser considerato non come un principio assoluto, ma come un momento variabile, come un finito studiato in quanto produttore e non come costante; non come un nulla, ma come una quantità momentanea tendente all'estensione.

Ma riprendiamo lo studio del modo onde l'infinitesimo si applica alla matematica, ossia lo studio dei metodi, perchè possa meglio approfondirsi e definirsi il concetto matematico di esso. — Già nel secolo V a. C. Antifonte ¹⁾ si valse dell'infinito come di sussidio per le ricerche geometriche. Secondo narra Simplicio (sec. VI d. C.), egli aveva inscritto in un cerchio un quadrato, poi un ottagono, un poligono di 16 lati, ecc.; ed era giunto a ritenere che si potrebbe, continuando ad aumentare il numero dei lati, inscrivere finalmente nel cerchio un poligono di lati così piccoli da confondersi con la circonferenza. Per tal modo si avrebbe un ultimo triangolo alla circonferenza, la cui base coinciderebbe coll'arco sotteso. Ma, poichè la dicotomia dell'arco è inesauribile, così si comprende che la serie delle operazioni immaginate da Antifonte dovrebbe essere infinita, prima che si possa giungere a confondere rigorosamente circonferenza e poligono. Da ciò è naturale derivassero i tentativi di quadratura del cerchio. — Pure nel V sec. a. C. Zenone aveva al contrario avversato ogni idea di infinito. — L'uso sistematico di un metodo infinitesimo deve però farsi risalire soltanto ad Eudosso. Egli introdusse il « metodo d'esauzione » (« exhaustio ») o « esaurimento », col quale si mira allo scopo di risolvere problemi e dimostrare teoremi. Secondo un tale metodo, « per determinare una grandezza non direttamente calcolabile si costruiscono due serie di grandezze tali che due elementi corrispondenti qualunque delle due serie comprendano tra loro la grandezza incognita, e

¹⁾ V. LORIA: *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, L. I, p. 63, 75, ecc.; — A. STURM: *Bemerk. z. Gesch. d. altgriech. Geom.*, Leipzig 1889.

che la loro differenza vada indefinitamente diminuendo man mano che si procede nelle serie stesse » ¹⁾). Esso tende a dimostrare che le relazioni che esistono tra quelle grandezze non direttamente calcolabili esistono anche fra grandezze, le quali sono tali da differire rispettivamente dalle prime tanto poco quanto si vuole. Qui ricorre il famoso postulato d'Archimede (sulla prop. 1^a del L. X degli « Elementi » d'Euclide), secondo cui esiste sempre una moltiplicazione finita che, applicata ad uno di due segmenti finiti, dà per risultato un segmento maggiore dell'altro. — Nella prop. 2^a del libro XII degli « Elementi » di Euclide si suppone che, mediante la dicotomia all'infinito della circonferenza e la costruzione successiva di poligoni di un numero ogni volta doppio di lati, si giunga ad « esaurire » lo spazio rimasto tra il cerchio e il poligono dato: onde si spiega l'appellativo di « esaustione ». Molti risultati ottenne col metodo di esaustione Archimede. Questi, com'è noto, studiò il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro. Trovato che il perimetro del poligono regolare circoscritto di 96 lati ha una lunghezza $= 3 \frac{1}{7}$, rispetto al diametro, e quello inscritto (pure di 96 lati) una lunghezza $= 3 \frac{10}{71}$, dedusse che la lunghezza della circonferenza è compresa fra questi due valori. Raddoppiando il numero dei lati dei due poligoni, posson trovarsi limiti anche più prossimi alla lunghezza della circonferenza. Questo metodo di esaustione ebbe successivamente una storia; e ad esso si connettono ancora i nomi di Luca Valerio ²⁾ (1552-1618), Sait-Vincent ³⁾, Tacquet ⁴⁾, Renaldini ⁵⁾. Kepler ⁶⁾ diceva che il cerchio può considerarsi come una somma di infiniti triangoli isosceli col vertice nel centro (e con ciò credeva di in-

¹⁾ VIVANTI, op. cit., p. 54.

²⁾ *De centro gravitatis solidorum libri tres*, II ediz., Bologna 1661.

³⁾ *Opus geometricum*.

⁴⁾ *Opera mathematica*, II. ediz., Anversa 1707.

⁵⁾ *De resolutione et compositione mathematica*.

⁶⁾ *Nova stereometria doliorum*, Linz 1615, P. I, Teor. II.

interpretare il pensiero di Archimede): Roberval, Wallis, e Pascal ritenevano di poter far risalire ad Archimede persino la teoria degli indivisibili. Lo stesso Leibniz dice il proprio metodo una abbreviazione di quello d' Archimede, mentre Newton ¹⁾ dice: « Praemisi vero haec lemmata, ut effugerem taedium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum ». Grandi dice pure implicito nel metodo di Archimede il lemma che due grandezze, la cui differenza può rendersi minore di qualsiasi assegnata, sono eguali.

E. G. Bernoulli e Fontenelle attribuiscono ad Archimede la considerazione del cerchio come un poligono infinitilatero; anzi per Fontenelle « Archimède n'a trouvé le rapport approché du diamètre du cercle à la circonférence, qu'en prenant l'idée du cercle confondu avec un polygone d'une infinité de côtés ». Malgrado queste affermazioni, esiste una profonda differenza tra i nuovi metodi e quello antico di esaustione. Questo procedeva in modo analitico, quelli in modo sintetico. Difatti oggi si dice addirittura, secondo il metodo degli infinitesimi, che il cerchio è un poligono infinitilatero; oppure, secondo il metodo dei limiti, che è il limite a cui indefinitamente o col crescere indefinito del numero de' suoi lati tende un poligono regolare. In altri termini con questi metodi più moderni degli infinitesimi si è giunti alla sintesi, cioè a colmare l'abisso tra retta e curva e in genere la lacune del discreto, realizzando il continuo, identificando per mezzo del concetto degli infinitesimi o anche con quello dei limiti la retta e la curva, il poligono e il cerchio, così come mediante i numeri irrazionali si è colmata nella misura numerica la discontinuità. Nel caso del poligono e del cerchio, è opportuno trascrivere dal Vivanti le formole relative ai nuovi metodi. Secondo il metodo degli infinitesimi « se $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ sono i poligoni regolari di n lati inscritti nei cerchi C_1 , C_2 , si ha, qualunque sia n , $\frac{P_1^{(n)}}{P_2^{(n)}} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$; (D_1 , D_2 sono i

¹⁾ *Philosophiae naturalis principia mathematica*, L. I, Lemma XI, scol.

rispettivi diametri; e nella prop. 2^a del libro XII di Euclide è detto che le superfici di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri); ma [appunto] $P_1^{(\infty)} = C_1$, $P_2^{(\infty)} = C_2$, dunque $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$. E il metodo dei limiti invece: Si ha $\frac{P_1^{(n)}}{P_2^{(n)}} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$, ma $\lim_{n \rightarrow \infty} P_1^{(n)} = C_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_2^{(n)} = C_2$, e il limite d'un rapporto è eguale al rapporto dei limiti [come vedremo più innanzi], dunque $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$. Con il che si abbrevia e si renda superflua la riduzione all'assurdo.

Ma se questo è il vantaggio dei due metodi moderni degli infinitesimi e dei limiti su quello più antico di esauritione, non devesi dimenticare il metodo degli « indivisibili » che, se non altro, ebbe il suo momento storico importante. Sembra che lo si possa far risalire a Leonardo da Vinci ¹⁾, in quanto egli avrebbe determinato il centro di gravità della piramide, accompagnando la dimostrazione con una figura, che proverebbe com'egli decomponesse le piramidi in piani paralleli alla base. Kepler dice, nell'op. già citata, che il cilindro e il parallelepipedo rettangolo circoscritto stanno tra loro come il cerchio base del cilindro al quadrato del suo diametro, per la ragione che, essendo i due solidi « quasi piani divenuti corpi », il loro rapporto dev'essere eguale a quello dei piani generatori. Galileo e Cavalieri pensarono agli indivisibili, ma soprattutto a questi è legato il nome del Cavalieri. Costui, scrivendo a Galileo il 22 Marzo 1622, gli diceva: « Alcune cose come chiare per brevità le ho tralasciate, e in particolare sul bel principio, che tutte le linee di due figure piane e tutte le superficie di due figure solide abbino proporzione, il che parmi facile da dimostrare ». E altrove ²⁾: « Figuræ planæ habent inter se eandem ra-

¹⁾ LIBRI: *Hist. des sc. math. en Italie*, Parigi 1838-41, T. III, pag. 41.

²⁾ *Geom. indiv.*, cit., L. II, pag. 20.

tionem quam eorum omnes lineæ juxta quamvis regulam assumptæ et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana juxta quamvis regulam assumpta ». Il principio fondamentale di questo metodo sta nel fatto che, date due superfici piane comprese fra due medesime parallele, e immaginate condotte tutte le parallele comprese fra queste due, il rapporto delle aree delle due superfici è eguale a quello delle somme dei segmenti intercetti rispettivamente in esse; essendo queste somme infinite, col crescere indefinito del numero finito delle parallele equidistanti, quel rapporto delle aree delle due superfici è il limite a cui tende il rapporto delle somme dei segmenti intercetti. Wallis¹⁾ sostituì agli artifizi geometrici di Cavalieri considerazioni aritmetiche. Il metodo degli indivisibili trovò accoglienza e favore presso Torricelli, Stefano degli Angeli, ecc., ma fu poi eclissato da quello, che poco dopo (50 anni dopo) comparve, del Leibniz.

Come già dicemmo, doveva essere destinato ad un glorioso avvenire nel campo matematico il « metodo degli infinitesimi », il quale in fondo era già accennato nella considerazione del cerchio come di un poligono infinitilatero, e quindi era già in qualche modo presente nel pensiero di Antifonte, indi nell'epoca moderna in Cusano, Stifel, Commandino, Vieta, soprattutto in Kepler, il quale, come abbiamo visto, sosteneva doversi il cerchio considerare come formato di infiniti triangoli isosceli col vertice nel centro. Riferiamo dal Vivanti (op. cit., p. 65) il concetto del nuovo metodo di fronte a quello del metodo degli indivisibili: « Questo metodo (degli indivisibili) sollevò grandi difficoltà, specialmente perchè molti trovavano inaccettabile il concetto della composizione delle superficie mediante linee. E nell'intento di renderne l'idea fondamentale meno contraria alle ordinarie idee geometriche, nacquero i primi germi del metodo degli infinitesimi: giacchè alle linee si sostituirono delle particelle superficiali, che di necessità do-

¹⁾ *Opera*, T. I, pag. 365.

vettero supposti infinitamente piccole. Queste particelle, determinate mediante un sistema di ordinate equidistanti, si discostano tanto meno dalla forma di trapezio quanto più grande è il numero delle ordinate, e però può dirsi, *per comodità di linguaggio*, che, quando esse sono in numero infinito, la superficie rimane divisa in infiniti trapezi. Ma un'ulteriore semplificazione può raggiungersi.

Osservando infatti che l'area di ciascuna striscia è intermedia tra quelle dei rettangoli di eguale altezza aventi per base la massima e la minima ordinata comprese nella striscia medesima, e che, per le curve ordinariamente considerate, la somma dei primi e quella dei secondi rettangoli possono rendersi prossime l'una all'altra quanto si vuole aumentando convenientemente il numero delle ordinate, può dirsi ancora, *sempre per brevità e comodità di linguaggio*, che l'area della superficie proposta è eguale al prodotto della somma delle infinite ordinate per la distanza di due ordinate consecutive. Così il passaggio dal metodo degli indivisibili a quello degli infinitesimi si traduce semplicemente nell'aggiunta d'un fattore costante (la distanza di due ordinate successive), il quale poi sparisce ogniqualvolta si abbia a calcolare il rapporto di due aree ». Questa sostituzione di superfici infinitamente piccole alle linee nella composizione della superficie, costituiva un vanto per Roberval, di fronte a Cavalieri: e Pascal¹⁾, pure usando il linguaggio degli indivisibili, intende per « somma delle ordinate d'un semicerchio » la somma dei rettangoli formati da queste e dai segmenti del diametro. Dunque nel metodo degli infinitesimi si ha soprattutto riguardo a quella distanza infinitesima di due ordinate successive entro l'infinito numero di ordinate di cui dicemmo più sopra: cioè si considera un fattore costante, che corrisponde al concetto della particella infinitesima. E ciò fu di giovamento tanto nella teoria dei massimi e minimi, quanto nella determina-

¹⁾ *Oeuvres*, T. V, pag. 247.

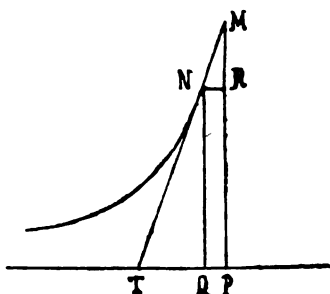
zione delle tangenti. Fermat¹⁾, per esempio, diede una regola che traduce aritmeticamente l'idea di Kepler, che in vicinanza di un punto di massimo o di un minimo la variazione della funzione è insensibile, cioè in tale punto la funzione ha un valore eguale a quello che essa prende in un punto prossimo; sebbene si debba ammettere che l'eguaglianza $f(x + \varepsilon) = f(x)$ sia solo una « adaequatio »²⁾, cioè un'equazione approssimata, e non propriamente una « aequatio »: equazione che però diverrà esatta dopo modificazioni opportune. — Fermat trattò anche la teoria delle tangenti, come applicazione della sua regola pei massimi e minimi: e su di essa versa anche una memoria di Hygens del 1693³⁾. Ma già nel 1674 Barrow mediante la considerazione del « triangolo caratteristico » determinava in questo modo la sottangente: « Sint AP , PM positione datae rectae lineae (l'ascissa e l'ordinata) (quarum PM propositam curvam secet in M) et MT curvam tangere ponatur ad M , rectam AP secare ad T ; ut ipsius jam rectae PT quantitatem equiram, curvae arcum MN indefinite parvum statuo; tum duco rectas NQ ad MP et NR ad AP parallelas, nomino $MP = m$; $PT = t$; $MR = a$; $NR = e$; reliquasque rectas, ex speciali curvae natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo: ipsas autem MR , NR (et mediantibus illis ipsas MP , PT) per *aequationem* e calculo deprehensam inter se comparo: regulas interim has observans. — 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a vel e potentia habetur, vel in quibus ipsae ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt) — 2. Post *aequationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a vel e (etenim

¹⁾ *Methodus ad disquirendam maximam et minimam.*

²⁾ FERMAT in *Varia op. math.*, pag. 63, dice: « Adaequentur, ut loquitur Diophantus ».

³⁾ *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum.*

illi termini semper, ad unam aequationis partem abducti, nihilum adæquabunt). — 3. Pro a ipsam m (vel MP),



pro e ipsam t (vel PT) substituo. Hinc demum ipsius PT quantitas dignoscetur ¹⁾ ». — In co-desto triangolo caratteristico or ora considerato viene così sostituito al rapporto di due grandezze infinitesime quali gli incrementi MR, NR , ossia a

ed e dell'ordinata e dell'ascissa, il rapporto di due grandezze ben definite, cioè l'ordinata MP ossia m , e la sottangente PT ossia t .

Il Vivanti fa qui rilevare un fatto importantissimo per la storia del concetto matematico di infinitesimo. Egli osserva che tanto nell'aritmetica quanto nella geometria si danno delle quantità che possono, anzi devono trascurarsi, non avendo ciò alcuna influenza sui risultati finali del calcolo, malgrado che esse siano sempre delle quantità diverse da zero. In altri termini l'infinitesimo è una quantità diversa da zero; nondimeno aggiunto ad una quantità finita non la altera. — Leibniz ²⁾ concepì l'infinitesimo come rappresentante la legge della continuità, secondo la quale in tutta la natura le cose variano per gradi così piccoli da non potersi paragonare a qualunque grandezza finita, e quindi da non esser misurabili con nessuna misura per quanto piccola. Egli, con l'uso metodico dell'infinitesimo, si impadronì di un mezzo potente per semplificare i calcoli riducendoli ad un unico algoritmo generale. Nel calcolo in-

¹⁾ *Lect. opticae et geom.*, Londra 1674.

²⁾ V., oltre che la cit. ed. del Gerhardt, T. II, pag. 258-60, anche lo scritto pubblicato da Gerhardt: *Historia et origo calculi differentialis*, nel T. V, pag. 392-410.

finitesimale, che è opera essenzialmente di lui, devon farsi le seguenti considerazioni fondamentali, che togliamo dal Vivanti (op. cit., pag. 71-2): « Il problema de' massimi e minimi, quello delle tangenti, ed altri analoghi, avevano condotto alla considerazione di ciò che ora chiamiamo la *derivata* d'una funzione $f(x)$. Per determinarla, si doveva formare il rapporto $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ dell'incremento della

funzione a quello della variabile (rapporto incrementale) e porre in questo $e=0$. Ma il calcolo del rapporto incrementale conduceva per lo più ad espressioni assai complesse; d'altra parte sempre più numerosi s'affacciavano i problemi la cui soluzione dipendeva dalla conoscenza delle derivate, sicchè occorreva ridurre il calcolo differenziale *ad un istrumento di uso facile, rapido e sicuro*. A tal uopo si stabilì una serie di teoremi, che permettevano di esprimere la derivata d'una somma, d'un prodotto, etc., di più funzioni, nonchè d'una funzione di funzioni, mediante le derivate delle funzioni componenti; per modo che si dovettero calcolare direttamente le sole derivate dalle poche funzioni *elementari* che figurano nell'analisi. Ma qui ancora fu raggiunta una grande semplificazione. Supposto che nel rapporto incrementale compaia un'espressione della forma $A + Be + Ce^2 + \dots$, dove $A, B, C, \dots$ sono indipendenti da e , essa si ridurrà semplicemente ad A quando porremo $e=0$.

Ora il fatto che e deve, alla fine dei calcoli, essere eguagliato a zero può esprimersi *in modo convenzionale* dicendo che e è una *grandezza infinitesima*, e a giustificare il passaggio dall'espressione $A + Be + Ce^2 + \dots$ all'altra più semplice A può stabilirsi la regola, che *una grandezza infinitesima deve trascurarsi quando sia addizionata ad una grandezza finita*. Questo lemma che, come già dissi, costituisce il fondamento del metodo infinitesimale, trova così la sua completa giustificazione; ed appare evidente che esso, ben lungi dall'essere un postulato, quale da alcuni

fu ritenuto, è solo una *regola pratica* atta ad abbreviare i calcoli insegnando quali dei termini sono destinati a sparire e possono quindi esser omessi ». Nello stesso ordine d'idee rientra anche la regola che *un infinitesimo d'ordine superiore deve trascurarsi se addizionato ad uno d'ordine inferiore*. Quello che in tutto ciò è di grande importanza, si è il fatto del lemma fondamentale posto dal Leibniz, il quale fece del calcolo un « algoritmo ». In esso è operazione necessaria la derivazione, mentre la integrazione è la operazione inversa della prima.

L'Hospital¹⁾ espose poi in modo sistematico il calcolo differenziale e le sue applicazioni geometriche, e stabilì anzi tutto questi due postulati: *a)* due quantità, la cui differenza è infinitesima, possono prendersi l'una per l'altra; *b)* una curva può considerarsi come un poligono infinitilatero. — La sua opera fondamentale ebbe a commentatori Varignon, Crouzas, Paulian. Di essi il più importante è Varignon²⁾, il quale aggiunse al primo postulato di L'Hospital quest'altro, che il prodotto di due infinitesimi è nullo rispetto a ciascuno di essi. Il suo concetto più preciso è che l'infinitesimo sia una quantità variabile indefinitamente piccola. Dei due Bernoulli, Giovanni e Giacomo, il primo scrisse un trattato di calcolo integrale³⁾ a complemento di quello del calcolo differenziale leibniziano di L'Hospital.

Da quando cominciò a diffondersi l'opera di Mac-Laurin, ebbe invece preponderanza un metodo, a cui doveva sorridere la migliore fortuna, cioè il « metodo dei limiti ». « Il carattere più saliente del metodo dei limiti — dice il Vivanti⁴⁾ — è questo, che esso non fa uso, *neppure come modo di parlare*, di termini implicanti l'idea di grandezze diverse dalle ordinarie grandezze finite, e quindi anche

¹⁾ *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, II ed., Parigi 1716.

²⁾ *Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits*, Parigi 1725.

³⁾ *Lectiones mathematicæ de calculo integralium aliisque*.

⁴⁾ Op. cit., pag. 78.

nella forma è pienamente rigoroso. La differenza tra esso e il metodo infinitesimale può sembrare soltanto una differenza di parole, consistente nel dire p. es. *limite del rapporto di due quantità tendenti insieme a zero*, invece che *rapporto dei loro incrementi infinitesimi*. Ma essa è più profonda assai. Ed invero il metodo dei limiti non invoca alcun sussidio estraneo al dominio dell'algebra, non ricorre ad alcun concetto nuovo, ad alcuna nuova convenzione; esso non ha d'uopo che dei soli teoremi riguardanti il limite d'una somma, d'una differenza, d'un prodotto, d'un quoziente.

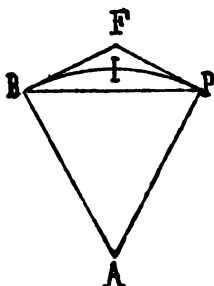
Inoltre, mentre le relazioni a cui conduce il metodo infinitesimale non sono esatte per alcun valore diverso da zero di dx , dy , quelle ottenute col metodo dei limiti sono sempre perfettamente esatte. A questo vantaggio è da contrapporsi una minore speditezza nei calcoli ed una minor facilità di esprimere mediante equazioni analitiche le condizioni dei problemi da studiarsi ». Ciò che vi ha di essenziale in questo metodo è il fatto che, come attestano lo stesso Newton¹⁾ e Taylor²⁾, non si esce dal campo delle grandezze finite, e si evita così la considerazione di figure infinitamente piccole in geometria, e di quantità infinitesime in generale. Jacopo Gregory³⁾, per esempio, introducendo il concetto di relazione analitica (« quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, divisione, radicum extractione, dicimus illam componi analytice »), dimostra che una tal relazione non può stabilirsi tra l'area del settore $ABIP$ e l'area del triangolo ABP e del quadrangolo $ABFP$. Ora, ammesso che le sole grandezze a noi direttamente accessibili sono quelle razionali, e che delle irrazionali non si soglion considerare che quelle ottenute per estrazioni di radici (« proportionem enim incommen-

¹⁾ *Opuscula math.*, T. I, p. 207.

²⁾ *Methodus incrementorum*, Pref.

³⁾ *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1.^a ed., Padova 1667.

surabilem nisi relative ad commensurabilem nullo modo percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem



nostram obtundens et simplicem perceptionem impediens »), ogni altra grandezza irrazionale conosciamo in quanto è possibile trovare una grandezza razionale, od almeno analitica, che ne differisca meno d'una quantità assegnata ad arbitrio, mediante una operazione che non è altro, per l'autore, se non l'invenzione di una proporzione commensurabile avvicinantesi il più possibile a

quella non analitica in questione, e però risultante dalle cinque operazioni precedenti (le quattro razionali e l'estrazione di radice).

« Questa operazione — spiega il Vivanti (op. cit., p. 80-1) — può eseguirsi in modo sistematico formando una coppia di successioni $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, tali che a_{n+1} e b_{n+1} si ottengano da a_n, b_n con una legge costante indipendente da n , che $a_n - b_n$ tenda a zero al crescere di n , e che la grandezza da determinarsi sia compresa fra a_n e b_n qualunque sia n ; una coppia di successioni di tale natura vien detta da Gregory *serie convergente*. La *terminazione* della serie, ossia il limite comune delle due successioni, deve dipendere in uno stesso modo da qualsiasi coppia di elementi corrispondenti di esse, e però la sua espressione sarà data da quella funzione $f(a_n, b_n)$ che soddisfa alla condizione $f(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n)$.

L'applicazione al cerchio è ovvia. La serie convergente è data dall'insieme dei poligoni regolari inscritti e circoscritti di cui ciascuno ha un numero di lati doppio del precedente; ma Gregory dimostra che non esiste alcuna funzione analitica la quale soddisfaccia alla condizione poc'anzi accennata, e da ciò può dedursi che l'area del circolo non è una funzione analitica del diametro Il metodo dei limiti può dirsi tutto racchiuso nel Lemma I

del L. I dei *Principia* di Newton. Due quantità, la cui differenza in un tempo finito diviene minore di qualunque quantità assegnata, divengono infine eguali. — Qui il concetto d'eguaglianza prende una significazione più larga di quella sinora avuta. Non può più dirsi: Due quantità, o sono eguali, o non lo sono. Le quantità, con cui ora abbiamo a fare, non sono già fisse, ma *fluenti*; due quantità di tal natura possono variare mantenendosi, in ogni loro stadio, differenti, e ciononostante noi le chiamiamo eguali, perchè esiste sempre uno stadio nel quale la loro differenza è piccola a piacer nostro ». E questo concetto è dato in Newton anche con un'altra nomenclatura fondata sull'idea delle qualità nascenti ed evanescenti, per la generazione delle grandezze continue: se non che egli, per giustificare matematicamente quelle quantità, dovette pur sempre ricorrere al concetto di limite. Tanto è vero che all'obbiezione che la proporzione ultima delle quantità evanescenti è nulla giacchè prima del loro svanire non è ultima e dove sono svanite è nulla (e così pure che la velocità di un corpo che perviene a un determinato luogo ove essa ha termine, non è l'ultima, mentre è nulla quando lo raggiunge) risponde: « Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; idest illam ipsam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum et quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quacum evanescent. Et summa prima et ultima est quacum esse (vel augeri vel minui) incipiunt ac cessant. *Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi: Haec est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium* » ¹⁾.

¹⁾ *Philosophiae naturalis principia mathematica*, L. I, Lemma XI, Scolio.

E alla obbiezione secondo cui dovrebbero per lo stesso motivo darsi anche grandezze ultime, risponde ancora : « *Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum....* In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens, *dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite* » ¹⁾.

Così da Newton si è cercato di evitare, nel metodo delle flussioni, l'uso di grandezze e quantità infinitesime o non finite, ricorrendo al concetto del « processo di passaggio al limite » e di grandezze proporzionali agli incrementi istantanei delle quantità variabili.

Mac Laurin ²⁾ espose ampiamente il metodo delle flussioni, il principio fondamentale del metodo dei limiti, e pose quattro assiomi, di cui il primo asserisce che lo spazio descritto nel moto accelerato è maggiore di quello che sarebbe descritto in egual tempo con moto uniforme e colla velocità iniziale; il secondo paragona il moto accelerato al moto uniforme colla velocità finale; il terzo ed il quarto si riferiscono al moto ritardato. — Brook Taylor ³⁾ diede un metodo degli « incrementi », analogo a quello delle flussioni. Iacopo II Bernoulli confessò, malgrado i suoi tentativi di rendere più spediti i procedimenti del metodo di Newton, di dover ricorrere, per la ricerca del raggio di curvatura, all'ordinario metodo dei limiti; ed Eulero, che si era proposto di valersi di infinitesimi rigorosamente nulli, il cui rapporto fosse determinato, si ridusse pure alla

¹⁾ Loc. cit.

²⁾ *Traité des fluxions*.

³⁾ *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londra 1717.

ricerca del limite del rapporto di due quantità che decrescono insieme indefinitamente. — Valperga di Caluso si riconnette al concetto di Eulero, e sostiene che il rapporto di due impossibili può essere reale, e che possono distinguersi impossibili di varî ordini. Egli giunge al principio della sostituzione degli infinitesimi procedendo in sostanza col metodo dei limiti, ma però come Eulero eseguisce le sue operazioni sopra quantità nulle.

Ovunque si cercava di liberarsi dal metodo degli infinitesimi, e si accentuava la tendenza a far sì che l'analisi non avesse bisogno di grandezze diverse da quelle ordinarie finite. Così pensava, fra gli altri, D'Alembert ¹⁾. — Un tentativo diverso e notevole è quello di Lagrange ²⁾, che « si propose (Vivanti, op. cit., p. 90) di fondare l'analisi sullo sviluppo in serie di Taylor, e prese, per definizione, come derivata il coefficiente della prima potenza della variabile in tale sviluppo ». Nella pratica il metodo suo si mostrò difettoso.

E' noto ³⁾ che il premio proposto l'anno 1784 dall'Accademia di Berlino, di cui era appunto presidente il Lagrange, per un concorso sulla questione dell'infinito matematico, fu vinto da Lhuilier (o L'Huilier) ⁴⁾, che, sebbene intendesse mostrare la sufficienza del metodo degli antichi ai bisogni dell'analisi, in sostanza seguì egli pure il metodo dei limiti e pose due teoremi importanti, che devono essere ricordati: Se due quantità variabili e suscettibili di limiti hanno un rapporto costante ed eguale ad 1, anche i loro limiti hanno lo stesso rapporto; se due quantità variabili e suscettibili di limiti hanno un rapporto variabile ma suscettibile di limite, il rapporto dei loro limiti è il limite del rapporto. Egli pone il « rapporto differen-

¹⁾ *Encyclopédie franc.*, ecc., cit.

²⁾ *Théorie des fonctions analytiques*, Parigi 1797.

³⁾ V., oltre che Vivanti (op. cit., p. 91-92), Vecchietti (op. cit., p. 61 sgg.).

⁴⁾ *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*.

ziale » di due quantità variabili come « il limite del loro rapporto », e « il calcolo differenziale » come la ricerca dei rapporti differenziali delle quantità variabili.

Carnot¹⁾ nella sua difesa del calcolo infinitesimale leibniziano, si fonda sull' « arbitrarietà » dei cosiddetti infinitesimi, e sulla compensazione degli errori: per lui l'errore che si commette nel sostituire ad una quantità un'altra quantità che ne differisca di un infinitesimo, potendosi rendere piccolo a piacere, è arbitrario, e gli errori così commessi si distruggono a vicenda, giacchè nei risultati finali non compare più alcuna quantità arbitraria.

Cauchy²⁾ ha una importanza molto superiore. Il suo concetto preciso è che si deve « definire l'infinitesimo come una grandezza variabile avente per limite zero: » unagrandezza β è infinitesima d'ordine n rispetto ad un'altra α se il limite di $\frac{\beta}{\alpha^n}$ al tendere a zero di α è finito e non nullo.

Sicchè con Cauchy l'infinitesimo diveniva un concetto conciliativo tra il metodo degli infinitesimi e quello dei limiti: quello di una quantità non nulla e nemmeno costante, ma finita variabile e tendente a zero senza divenirlo, quindi di un finito infinitamente variabile, o in una parola di una variabile e della sua funzione.

Anzi è propriamente la funzione $f(x)$ che tende (infinitamente) a zero al tendere di x ad un valore c , quella che ci interessa per l'infinitesimo matematico. — Ma qui si rende necessaria qualche breve nozione teorica. E Pascal³⁾ osserva che già dall'algebra è noto che « grandezza variabile » è una grandezza considerata come capace di acquistare valori diversi, i quali possono essere in numero finito od infinito; l'assieme di tutti i valori di cui essa è

¹⁾ *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.*

²⁾ *Analyse algébrique*, C. II § 1.

³⁾ *Lezioni di calcolo infinitesimale*, Parte I (*Calcolo differenziale*), III ed., Milano, Hoepli 1910.

capace costituisce il suo « campo di variabilità ». Se questo campo di variabilità lo si rappresenta con una retta, se ad ogni valore di una variabile corrisponde un numero reale (razionale o irrazionale, positivo o negativo), ciascun valore della medesima sarà anche rappresentato da un punto della retta, e il campo di variabilità sarà rappresentato dall'insieme di punti della retta (in numero finito o infinito), i quali possono o costituire uno o più segmenti completi della medesima, ovvero essere punti fra loro staccati: insieme che costituisce ciò che si suol chiamare « un gruppo di punti ». Ora, se un punto della retta appartiene al campo di variabilità e nello stesso tempo appartiene ad un segmento « i cui punti tutti » appartengono al medesimo campo, si dirà che la variabile data è « continua » in quel punto. Se a è un punto della retta appartenente o no al campo di variabilità, ma tale che segnando alla sua destra o alla sua sinistra o da ambo le parti un segmento piccolo a piacere avente a per estremo, si trovi sempre in quel segmento per quanto piccolo un punto facente parte del campo di variabilità, allora deve dirsi che a rappresenta un limite dei valori della variabile o « un punto-limite » del gruppo.

Le variabili che hanno per limite zero si chiamano infinitesimi, e quelle che hanno per limite l'infinito si chiamano infiniti, e gli infinitesimi e infiniti posson esser di ordine diverso. — Venendo ai limiti della variabile, « se un campo è tale che scelto un punto della retta, lontano per quanto si voglia dall'origine, verso la parte positiva, alla destra di esso esistano sempre punti appartenenti al campo, si dirà che *l'estremo superiore del campo è il punto $+\infty$* ; se invece, scelto un punto della retta, verso la parte negativa, lontano per quanto si voglia dall'origine, alla sinistra di esso esistono sempre punti appartenenti al campo, si dirà che *l'estremo inferiore del campo è il punto $-\infty$* . In corrispondenza a ciò si dirà che *un limite dei valori della variabile è $+\infty$ nel primo caso e $-\infty$ nel*

secondo caso; o anche si dirà che $+\infty$ o $-\infty$ sono *rispettivamente punti limiti del gruppo di punti* *. In generale vale il seguente postulato: « Ogni gruppo di punti racchiuso in un intervallo finito della retta rappresentativa, ammette sempre un limite superiore, che in particolare potrà essere un massimo, e similmente ammette sempre un limite inferiore, che in particolare potrà essere un minimo ». Se, invece di una variabile, si considerano due variabili x_1, x_2 , fra loro indipendenti, le coppie dei loro valori posson rappresentarsi non più mediante i punti di una retta (come si era fatto per una sola variabile), ma mediante i punti di un piano segnando i valori di x_1 e x_2 su due assi coordinati scelti sul piano, in modo che ad ogni punto di questo piano corrisponda una coppia di variabili e ad ogni coppia di queste un punto. Così un sistema di valori di tre variabili può geometricamente rappresentarsi dai punti di uno spazio a tre dimensioni, ecc.

Un assieme di infiniti punti del piano si dice un « gruppo di punti ». « Punti limiti » sono definiti dalla proprietà che in un intorno comunque piccolo attorno ad essi esistano sempre infiniti punti del gruppo. Possono darsi due variabili x, y che « possono essere legate fra loro da un rapporto di dipendenza, in modo che, *assegnato il valore ad una variabile p. es. x , resti assegnato anche un valore per l'altra variabile y* . Così p. es., consideriamo tutti i cerchi che si possono descrivere attorno un centro fisso. Il *raggio* di tutti questi cerchi è una quantità variabile ed è anche una quantità variabile la loro *area*. Ma è noto che, fissato un valore per il raggio, resta fissato anche quello per l'area; le due variabili sono dunque dipendenti l'una dall'altra. Ora questa dipendenza potrà essere di varia natura; potrà accadere che per *certi* valori della variabile x , si abbia per y un valore determinato e unico; per certi altri valori di x , si abbiano per y diversi valori determinati, e per certi altri infine, non si abbia per y nessun determinato valore, cosicchè la dipendenza propriamente detta

scompaia per certi valori di x . *Ma immaginiamo di considerare solo un tal campo di variabilità di x , e di definire in tal maniera la dipendenza fra x e y che per ogni punto del campo la y resti determinata sempre ed in un modo solo; diremo allora che y è funzione di x in quel campo; la x si chiamerà la variabile indipendente.*

Per indicare che y è funzione di x , si adopererà un simbolo come questo:

$$y = f(x)$$

rappresentando f , o qualunque altra lettera si voglia, il simbolo di *funzione* ». Stabilito così il concetto della funzione, oltre che quello della variabile nella parte elementare e fondamentale, riferiamo ciò che il Pascal (op. cit., p. 12) permette sui «limiti delle funzioni»: «Immaginiamo una funzione y : per fissare le idee la supporremo di una sola variabile x . Supponiamo che questa si avvicini ad un valore limite a , e immaginiamo che fissato un numero ϵ piccolo a piacere, si possa sempre trovare solo a destra, o solo a sinistra, o da ambo le parti del punto a , un segmento cosiffatto che il valore di y per un *qualunque* punto compreso in esso, sia tale che la differenza $(A - y)$ sia in valore assoluto minore di ϵ , essendo A un certo numero fisso; noi diremo allora che A è il limite dei valori di y per $x = a$, e scriveremo in simbolo:

$$\lim_{x=a} f(x) = A \quad »$$

In un gruppo infinito di punti esistono dei punti limiti; ogni gruppo infinito di punti distribuiti in un segmento finito ammette sempre almeno un punto limite a distanza finita. Se però gli infiniti punti del gruppo non son più racchiusi in un segmento finito della retta, ma in un segmento che si estende anche all'infinito, allora l' «infinito positivo o negativo sarà certamente un punto limite del gruppo ». «E-

sempio di un siffatto gruppo può esser quello di tutti i numeri interi positivi o negativi. — Un gruppo può avere infiniti punti limiti, e allora questi formano a loro volta un gruppo che si suol chiamare il *primo gruppo derivato* del gruppo dato. Analogamente si avrebbero il 2°, 3°.... gruppo derivato. — *L'assieme di tutti i numeri razionali forma un gruppo i cui punti limiti sono tutti i numeri possibili, razionali ed irrazionali* ». — Un altro punto importante è questo: se, invece di considerare il limite dei valori che può assumere una funzione quando colle variabili indipendenti ci si avvicina in un qualunque modo a valori fissati ossia per $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \dots$, si considera il valore della funzione stessa nel punto $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \dots$, si avrà o che tale valore può esser quello stesso che si è chiamato «limite» della funzione, oppure un valore diverso: nel primo caso la funzione si dirà «continua» in quel punto, nel secondo «discontinua». Insomma «funzione continua è quella in cui il limite della funzione è uguale alla funzione del limite delle variabili», cioè:

$$\lim_{x=a} f(x) = f(\lim_{x=a} x) = f(a)$$

ove si vede che «per una funzione continua i due segni di funzione e di limite sono fra loro invertibili».

Abbiamo visto alcuni punti essenziali riguardanti la «variabile» e la «funzione». Un terzo punto da fissare è il concetto della «derivata». Dice il Pascal (op. cit., p. 70): «Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un certo intervallo (a, b) , e sia x un punto di tale intervallo in cui la funzione sia finita. Consideriamo un altro punto prossimo ad x , e sia il punto $x \pm h$. La funzione nel punto $x \pm h$ avrà in generale un valore diverso che nel punto x ; se la funzione è *continua*, come bisogna supporla in queste considerazioni, il valore della differenza o *incremento*

$$f(x \pm h) - f(x)$$

è una quantità che tende a zero quando h tende a zero; ma può accadere che il rapporto

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h},$$

il quale è il rapporto di due differenze, quella dei valori della funzione, e quella dei valori della variabile, tenda ad un limite per $h = 0$; se questo limite esiste, è finito ed è indipendente dalla maniera colla quale h tende a zero, e indipendente dal segno di h , esso si chiamerà *la derivata della funzione nel punto x* , o, per una ragione che vedremo in seguito, *quoziente differenziale nel punto x* . — Il rapporto

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

per h finito si suol chiamare *rapporto delle differenze* ovvero anche *rapporto incrementale* ». — « È chiaro che se la funzione data ha valore *costante* in qualunque punto, la sua derivata è *zero* ». — « Immaginando che, data una funzione $f(x)$, per ciascun punto di un intervallo ne esista la *derivata*, l'assieme di tutti gli infiniti valori di questa costituisce a sua volta una nuova funzione che si chiama la *prima funzione derivata*, e si indica col simbolo $f'(x)$ ».

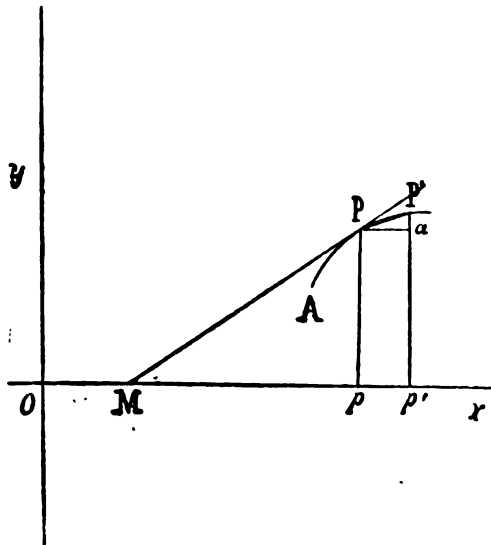
Ma, per dare una idea chiara e rappresentativa della derivata della funzione di una sola variabile, riportiamo (Pascal, op. cit., p. 75-6) la figura che trovasi a pagina seguente.

« Si abbia una funzione y di x che sia rappresentabile geometricamente mediante un arco ordinario di curva piana come AB (il che del resto non è possibile per tutte le funzioni). — Per ogni valore di x , il valore dell'ordinata y rappresenta la funzione. Consideriamo le ordinate corrispondenti alle ascisse op, op' . — La differenza fra le ordinate, sia rappresentata da $P'a$, mentre la differenza delle ascisse

è rappresentata da $pp' = Pa$. — Il rapporto incrementale è dato da

$$\frac{P'a}{Pa}$$

che, per le ordinarie nozioni di trigonometria, è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la corda PP' della



curva fa con Pa , ovvero coll'asse di x . Quando p' si avvicina a p , P' si avvicina a P sulla curva, e la corda PP' diventa la *tangente* alla curva nel punto P ; dunque: la *derivata di una funzione per un valore x della variabile, rappresenta, se la funzione è rappresentabile geometricamente mediante una curva, la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica alla curva nel punto di questa che ha per ascissa x , fa coll'asse delle ascisse* ».

Fissato così il concetto della funzione e della derivata della funzione, occorre ritornare per un momento alla va-

riabile. L'incremento dato alla variabile si esprime con la lettera Δ posta davanti alla medesima. Così quando si scrive Δx , si rappresenta un incremento finito e determinato assegnato alla variabile x , cioè la differenza fra due valori di x . « Indicheremo con $\Delta f(x)$ la differenza dei due valori corrispondenti di $f(x)$; per modo che il rapporto *incrementale o delle differenze*, resta espresso in simboli colla formola

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Il limite di questo rapporto per $\Delta x = 0$ è la derivata della funzione; se vogliamo esprimere tale derivata come quoziente di due quantità, che indicheremo rispettivamente con dy e dx , una di tali quantità, per esempio dx resta a nostro arbitrio; intenderemo che dx rappresenti proprio l'incremento dato alla variabile indipendente, cioè che sia lo stesso Δx , e lo chiameremo il *differenziale della variabile indipendente*: il dy resta allora determinato e definito dalla formola

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

ovvero

$$dy = f'(x) dx,$$

cioè come il prodotto della derivata della funzione per il differenziale della variabile indipendente.

Tale dy lo chiameremo il *differenziale della funzione*, osservando però che esso, a differenza del differenziale della variabile indipendente, non rappresenta in generale propriamente l'incremento della funzione. — La derivata resta così espressa come il quoziente del differenziale della funzione per il differenziale della variabile indipendente, $\frac{dy}{dx}$, e la no-

tazione $\frac{dy}{dx}$ per la derivata di y rispetto ad x , è una notazione fondamentale che sarà da noi continuamente adoperata da ora in poi ». — Quanto al fatto che il differenziale della funzione non rappresenta in generale propriamente l'incremento che riceve la funzione per l'incremento dx della variabile, è da aggiungere che però ne differisce per un infinitesimo di ordine superiore. Inoltre, se la funzione data è « lineare » l'incremento della funzione coincide col differenziale. — Analogamente a quanto fu detto più sopra, « se la prima derivata $f'(x)$ è una funzione continua di x , essa potrà essere anche derivabile in un punto, o anche in un intervallo, e allora si ha la seconda derivata della funzione che si indica con $f''(x)$, e, così continuando, si può ottenere la n^{ma} derivata che si indica con $f^{(n)}(x)$. — Abbiamo detto a suo luogo che, condizioni necessarie perchè esista la derivata finita di una funzione in un punto, sono che la funzione sia finita e continua nel punto, e sia finita *in un intorno* del punto. — Perchè dunque esista la derivata seconda finita in un punto è necessario che la derivata prima sia continua in quel punto, ed esista e sia finita in un intorno di quel punto ».

Ora l'importante è di desumere da tutto ciò definitivamente il concetto matematico d'infinitesimo, come oggi esso è considerato. Come più sopra vedemmo, « infinitesimo » è un appellativo convenzionale con cui si designa una quantità finita variabile tendente a zero: ora, per quel che sappiamo da quanto qui sopra riferimmo, quando due quantità variabili sono legate da un rapporto di dipendenza, tale che per ogni punto del campo di variabilità dell'una resti anche determinata sempre ed in un modo solo anche l'altra, quest'altra quantità variabile è la funzione della prima. Ma, per essere determinabile sempre, in un modo solo e per ogni punto del campo di variabilità della prima, la seconda quantità variabile è tanto una funzione quanto anche un infinitesimo, cioè una quantità finita che varia infinitamente

tendendo a zero, e che è considerata appunto in questo suo variare e in questo suo tendere infinito. L'infinitesimo così è una funzione $f(x)$ di una variabile x , che tende a zero al tendere di x ad un valore c . In conseguenza di ciò, si comprende che il linguaggio infinitesimale non è altro che un linguaggio simbolico abbreviato, che ha però un senso perfettamente rigoroso.

Il Cranz ci spiega ampiamente questo modo di considerare l'infinitesimo. Egli distingue ¹⁾ delle specie di infinito o, meglio, dei modi diversi di valersene. Uno di questi è quello adoperato volgarmente dal linguaggio, ed esclude misura e numero; da esso è diverso quello dei matematici, i quali mirano invece col concetto di infinito a valori limiti di grandezze variabili. In questo senso egli trova che ove si prenda in considerazione la continuità di un fenomeno, si devon avere somme, prodotti, frazioni finite; solo che si passa al limite, dopo che si è computato l'errore. Così egli trova che si potrebbe persino omettere nell'analisi le parole «infinitamente piccolo», e cita l'esempio della funzione $y = 2 + \frac{1}{3+x}$ nella quale quanto più grande si prende x , tanto meno y differirà dal valore 2; sicchè se la differenza tra y e il valore fisso 2 sarà minore di qualsivoglia numero dato per quanto piccolo, ciò vuol dire che il valore limite di y per x infinitamente grande è 2; il che può esprimersi così: $2 + \frac{1}{3+\infty} = 2$.

Per Cranz i cosiddetti differenziali sono soltanto di natura puramente simbolica, privi di contenuto, ma aventi un significato formale per semplificare trascrizioni di calcoli: ed egli cita a questo proposito anche i determinanti.

Per questo autore adunque nell'infinito matematico si hanno più che altro delle espressioni, dei modi di dire for-

¹⁾ Ueber d. Unendlichkeitsbegriff in d. Mathematik u. Naturwissenschaft, Wundt's Philos. Stud., Bd. XI, S. 1 ff.

niti di un significato formale: i segni dx, dy servono soltanto ad esprimere che ed in qual modo ha avuto luogo un calcolo di valore limite: così geometricamente la posizione limite della secante di una curva è la tangente alla stessa. Ora il matematico che considera la tangente come la linea di congiunzione di due punti infinitamente vicini della curva, non fa altro che condensare in poche parole tutta la storia del trapasso della secante nel limite della tangente. Numeri negativi, irrazionali, immaginari, sono per lui tutt'altro che determinazioni di concetti; e ad ogni modo debbono ritenersi espressioni negative. Nella geometria il punto infinitamente lontano, la retta infinitamente lontana, e il piano infinitamente lontano introdotti da Poncelet ¹⁾ ed impiegati sistematicamente da Steiner ²⁾, sono in fondo anch'essi dei concetti ausiliari introdotti per comodità di espressione: anche Vivanti ³⁾ dice che lì si adotta semplicemente un linguaggio che permette di esprimere risultati negativi in forma positiva; oppure si tratta di un positivo valore limite, come nel caso della retta il punto all'infinito è, secondo la geometria euclidea, nient'altro che un equivalente della indicazione della direzione; così si hanno gli equivalenti della giacitura per i piani, ecc. Adunque entrano sempre in scena il valore limite, ed il concetto ausiliario. Il valore limite è un concetto positivo: un esempio evidente è quello della retta considerata come limite di una circonferenza di raggio infinitamente grande. In questo caso, se non si considera la retta come una circonferenza misteriosa (Lotze), si deve pur concedere che noi anzitutto ci rappresentiamo la retta come una circonferenza di un raggio molto grande ma però finito, e poi nel pensiero passiamo al limite; insomma abbiamo adottato

¹⁾ *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1823, p. 49, 53.

²⁾ *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin 1832.

³⁾ *La nozione dell'infinito secondo gli studii più recenti*, Atti della R. Accademia Peloritana, Vol. XXIII, Fasc. I, Estratto; Messina 1908.

pel momento un modo ausiliario e formale di espressione per comprendere due compiti in uno solo. — Noi aggiungeremo che il bisogno di immaginare un cerchio molto grande fa fede della esigenza rappresentativa; altrimenti potremmo prendere qualunque cerchio. Difatti noi pensiamo una circonferenza così grande che non riusciamo a rappresentarcene che un tratto, il quale per noi si confonde con una retta, come avviene nel caso pratico di un tratto di pochi metri della circonferenza terrestre all'equatore. L'origine di quel concetto della retta valore limite di una circonferenza di raggio infinitamente grande è adunque in ciò: che nella rappresentazione si danno due tratti, uno di un cerchio, l'altro di una retta, coincidenti fra di loro; siccome però nel pensiero noi siamo proceduti più oltre, cioè sino alla idea non frammentaria ma completa del cerchio, ricavata dalla immagine di un piccolo cerchio o anello tutto simultaneamente rappresentabile, e l'abbiamo separata e distinta come quella che è inconciliabile con la idea della direzione costante della retta, così noi correggiamo la prima rappresentazione parziale mediante la seconda totale e passata in concetto astratto, e diciamo che retta e cerchio sono cose distinte, oppure che si confondono soltanto quando noi non siamo più in caso di distinguere la direzione della curva da quella della retta, ossia quando dal distinto e dal definito noi ritorniamo all'indefinito della rappresentazione del cerchio grande e rimane definita tutt'al più la sola rappresentazione della retta. Insomma diciamo che la retta è il limite di un cerchio di raggio infinitamente grande, intendendo dire che nel pensiero astratto e preciso, che considera la retta e il cerchio nelle condizioni suaccennate, la circonferenza tende infinitamente e il più possibile a divenire una retta, senza divenirla mai.

Quindi l'« infinitamente » è una parola che esprime una possibilità a cui ci si accosta sempre più, ma senza attingerla, ed è quindi una specie di impossibilità velata. Si comprende allora come l'idea dell'infinito sia qui veramente

una espressione formale, corrispondente a un reale processo di pensiero, almeno nel senso di un passaggio al limite, ma che in questo caso pratico dell'applicazione a un problema geometrico non corrisponde ad un contenuto di valore positivo, perchè la retta e il cerchio non si confonderebbero mai, finchè si mantengono le loro specifiche proprietà; ed il limite è solo supposto, ed è il passaggio ad una rappresentazione e ad un concetto diversi: tanto è vero che l'inconciliabilità loro è dimostrata dal fatto stesso dell'ingrandimento all'infinito del raggio del cerchio, ossia dalla mancata cessazione di questo processo di ingrandimento. In fondo, adunque, si ha nell'origine una rappresentazione indefinita di due enti che si equivalgono: nel pensiero i due enti si sono specificati come entità differenti, però tendono ad esser ricondotti a quella equivalenza data dalla primitiva rappresentazione, mediante una riduzione progressiva dei loro caratteri differenti definiti e un accrescimento dei caratteri indefiniti di entrambi o almeno di uno di essi (la curva); ma siccome questa riduzione e questo accrescimento condurranno sempre allo stesso risultato di ottenere la rappresentazione definita delle due entità, non distinte prima tra loro, ma subito dopo separate dal pensiero che possiede le proprietà differenziali di entrambe stabilite in concetti precisi, così ne segue un processo di pensiero continuo, che va dal concetto dei due elementi distinti alla rappresentazione e al concetto della supposta loro identità, e da questa di nuovo a quel primo concetto, e così via in infinito, cioè fin che è possibile questo processo stesso e la memoria dei dati. — Non altrimenti ci sembra si presenti in effetto la proposizione 16.^a del libro III di Euclide, in cui si parla dell'angolo di contatto, e tutte quelle in cui si stabilisce l'incompatibilità delle proprietà della curva con quelle di una tangente a questa curva in un punto dato. In tutti questi casi si avrà sempre, secondo noi, questo dilemma: nel pensiero il più piccolo arco di cerchio, ossia il tratto di circonferenza compreso fra due punti i più prossimi tra di loro, sarà sempre

un arco e perciò non potrà mai coincidere con la tangente, perchè i concetti astratti chiari e precisi di cerchio e di retta tangente (derivati a loro volta da rappresentazioni totali omogenee di cerchio e di retta) lo escludono; ma nella rappresentazione originaria indefinita di un piccolissimo arco di un grande cerchio il tratto brevissimo iniziale della tangente al cerchio nel punto di contatto si confonde coll'arco e coincide con esso; nel pensiero invece non si possono conciliare dei dati che nella rappresentazione meno precisa e non astratta si identificavano; il concetto di infinitesimo anche qui significa ricondurre quelle differenze, stabilite nel pensiero, alla identità della prima rappresentazione confusa, senza potervi mai giungere, perchè il pensiero vi ritroverà sempre i motivi delle differenze scoperte di poi e definite da lui.

La equivalenza dalla circonferenza al poligono inscritto infinilatero è in fondo esatta dal punto di vista della rappresentazione, perchè abbiám visto coincidere in questa il più piccolo arco di un cerchio grande con il più piccolo lato; ma da quello del pensiero determinativo è una questione infinitesima, ossia irresolubile, perchè la continuità nel mutamento di direzione della linea circolare, anch'essa in origine afferrata solo simultaneamente nella rappresentazione totale del cerchio, non è conciliabile nel pensiero col mantenimento costante di una unica direzione nella retta; e quindi il processo di pensiero che tende a raggiungere quella conciliazione di origine rappresentativa ¹⁾ è inesauribile. — Il concetto d'infinitesimo viene dunque a corrispondere al processo mentale inesauribile dell'infinito potenziale, dal punto di vista logico, formale; ma rispetto al contenuto, esso appare come una pura espressione, la finzione del raggiungimento di un limite, che non si raggiunge

¹⁾ Sulla necessità della rappresentazione, della oggettivazione e della separazione dell'obbietto dalla coscienza, nella conoscenza e per l'idea di verità, v. anche un notevole lavoro di F. DE SARLO in *Cultura filosofica*, 1910.

mai. D'altro lato il limite stesso fa parte ancora del contenuto rappresentativo; come limite del pensiero è una finzione.

A ciò si giunge appunto per essere il pensiero quantitativo una precisa determinazione; esso ha determinato le differenze di due contenuti qualitativi; e il tentativo di diminuzione di queste differenze mediante il concetto ausiliario dell'infinitesimo, si ripete sempre appunto perchè il limite non è la confusione indistinta dei due contenuti, ma la separazione fra di essi: in fondo l'uno è il limite dell'altro. — Quanto alla matematica applicata, alla fisica matematica, meccanica, tecnica, ecc., i rapporti sono diversi. Dice il Cranz che, quando p. es. si deve calcolare la via di una cometa e si considera la piccola influenza p. es. di Sirio come infinitamente piccola e perciò trascurabile, o quando la superficie di un piccolo lago tranquillo si considera come un lembo di una superficie sferica di raggio infinitamente grande, non si tratta più dell'infinito matematico in senso proprio, non si giunge al valore limite, non si ha la curvatura di quella superficie eguale a zero: ma invece si ha a che fare con grandezze realmente finite, non « infinitamente » ma « finitamente » piccole, solo che sono trascurabili per noi e per rispetto ad altre grandezze, e perciò non meritano di esser prese in considerazione. Quando l'astronomo calcola la distanza della Terra da Sirio, l'altezza del luogo di osservazione sul livello del mare e persino il raggio terrestre non son più considerati, e quindi si ritengono nel calcolo infinitamente piccoli e trascurabili, solo perchè non influiscono sulla esattezza del risultato: ciò non vuol dire che in altri casi, trattandosi di grandezze finite, tale influenza non si manifesti; chè anzi, come ben dice il Cranz, « gerade die Thatsache dass nicht jeder Körper auf jeden andern in Raum und Zeit eine bemerkbare Wirkung ausübt, macht das Erkennen von Naturgesetzen möglich; stets handelt es sich ja dabei um eine Unzahl von Abstractionen, und die Naturgesetze selbst sind Resultate von zahlreichen Abstrac-

tionen. Aber es sind und bleiben die hierbei als unendlich klein bezeichneten Fehler endliche Fehler. Und wenn Christian v. Wolf ¹⁾ sagt: « Man kann ein Sandkörnlein in Ansehung eines grossen Berges als unendlich kleine halten », so hat er sich eben nicht den richtigen Begriff von mathematisch unendlichklein gebildet, den er anzustreben scheint ».

Per il Cranz certe serie matematiche come la seguente $1 - 1 + 1 - 1 \dots$, che tanto affaticò Guido Grandi (1703), e di cui si occupò pure Leibniz, non sono così altro che espressioni, sulle quali non si ha bisogno di calcolare, perchè la serie citata, p. es., non converge verso un valore limite fisso, ma oscilla infinitamente; il valore potrebbe essere, fino ad un qualunque n -esimo membro, 1 se ci si ferma ad un membro dispari, o 0 se ad uno pari, e null'altro. Sicchè è tanto più manifesto qui l'infinito come un puro processo di pensiero, che ha però fondamento nelle proprietà della stessa serie non esauribile; mentre nelle serie convergenti si ha lo stesso processo, e di più la finzione del limite raggiunto, rappresentandosi il limite come un valore fisso. Eulero — soggiunge poi il Cranz — tratta l'infinitamente grande come un numero, col quale si deve calcolare come con una grandezza finita; il che torna a dimostrare come sia positivo il concetto di infinito matematico considerato come funzione del pensiero, anche se possa divenire una espressione negativa nella sua applicazione alla realtà non quantitativa. Ciò che importa — dice il Cranz — è che certi simboli siano definiti come numeri, che si stabiliscano sistemi di calcolo secondo determinati principî, e che non si manifestino contraddizioni.

Nel caso speciale dell'infinitamente piccolo, un altro autore noto, il Lasswitz ²⁾, ritiene trattarsi di una picco-

¹⁾ *Der Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften letzter Theil*, Halle 1771, S. 254; Citat nach S. Günther.

²⁾ *Ein Beitrag zum kosmologischen Problem u. zur Feststellung des Unendlichkeitsbegriff*, Vierteljahrsschrift f. wissenschaftl. Philos. von Avenarius, I. Jahrg., III, 329.

lissima grandezza realmente esistente nel concetto; in matematica il passaggio al limite è per lui psicologicamente un portar l'attenzione da certi rapporti di grandezze a certi altri che rimangono costanti quando variano i primi; così nel caso della curva e della tangente si parla di punti infinitamente vicini, ma nel senso di punti molto vicini, sì da confondersi e da far ritenere trascurabile la distanza che li separa, rispetto all'occhio che li considera in rapporto ad altri della figura; insomma si tratta di un atto psichico che è molto comodo e perciò adoperato.

Il Günther ¹⁾, invece, combatte l'opinione del Lasswitz che non crede si attenga al concetto dell'infinitamente piccolo della matematica pura. Il Meyer ²⁾ si appoggia agli scritti di Dedekind, e conclude che « auf höherer Stufe des Erkennens das Unendliche sich als das Ursprüngliche, das Endliche als das Abgeleitete, Secundäre erweise », e che « finito » e « infinito » sono « ein wunderbares Brüderpaar, das eine irdischer, das andere göttlicher Natur, im menschlichen Geistesleben friedlich nebeneinander wohnend »: ritiene quindi che i concetti originari e fondamentali delle singole scienze sono di natura essenzialmente infinita, e giunge così alla filosofia, alla teologia, all'etica, e all'immortalità dell'anima. — Il Cranz, che riporta e discute tutte queste opinioni, ammette bensì che i concetti di numero e di eguaglianza si sono ampliati coll'introduzione dello zero (che in fondo ha un valore positivo di limite, visibilissimo nella rappresentazione metrica della serie dei numeri naturali), dei numeri negativi (pei quali possono farsi osservazioni analoghe), ecc.: ma egli trova indispensabile fissare dei termini precisi all'infinito matematico, separandolo dalla considerazione di campi diversi. Vale la pena di riferire integralmente il suo ragionamento: « Solche Grössen, in de-

¹⁾ *Der philosophische u. mathematische Begriff des Unendlichen*, Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. von Avenarius, I. Jahrg, IV, 513.

²⁾ *Zur Lehre vom Unendlichen*, Tübingen 1889.

nen jede Zahl als Bestandtheil enthalten ist, heissen *unendlich*, z. B. wird $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ unendlich heissen,

da diese Reihe das Element $\frac{1}{2}$ beliebig oft enthält. Und eine

Grösse *a* heisst endlich, wenn es eine aus einer angebbaren Anzahl von Elementen gebildete Zahlengrösse gibt, die in *a* nicht als Bestandtheil enthalten ist, oder wenn man gar eine aus einer beschränkten Anzahl von Elementen zusammengesetzte Zahlengrösse *b* angeben kann von der Beschaffenheit, dass jede aus Elementen von *a* gebildete Zahlengrösse in *b* enthalten ist; *gleich* heissen dann jetzt allgemeiner zwei Grössen, wenn jeder Bestandtheil der einen Grösse in den andern als Bestandtheil enthalten ist. — Ich kann nicht einsehen, wie auch bei solchen Betrachtungen das Unendliche in der Mathematik als das Ursprüngliche, das Endliche als das Secundäre und Abgeleitete sich nothwendig ergeben solle. Das heisst doch, die natürlichen einfachen Dinge auf den Kopf stellen. Es ist mir auch nicht erfindlich, wie auf Grund solch rein arithmetischer Begriffserweiterungen plötzlich das Unendliche als von göttlicher Natur sich herausstellt, und was gar die Lehre von der Unsterblichkeit der Seele mit diesem Unendlichen zu thun hat. — Das mathematische Unendlich in unserem obigen Sinn ist ein anderes Unendlich als dasjenige des gewöhnlichen Sprachgebrauchs, das wir verwenden, wenn von unerfdlicher Geduld, unendlicher Langmuth, unendlicher Allmacht Gottes die Rede ist. Eben deshalb darf das mathematische Unendlich weder als Stütze der Religion noch als Kampfmittel gegen dieselbe benutzt werden. *In der Mathematik ist das Unendliche eine abkürzende Redensart*; in der Religion ist es, könnte ich sagen, hoffentlich keine Redensart ». L'infinito matematico non è adunque un infinito originario. Il punto di partenza è il finito, ed esso soltanto.

Difatti — dice il Cranz — i matematici, per l'infinitamente piccolo, calcolano sempre con differenze « finite »

$\Delta x, \Delta y$; e quindi si trovano di fronte effettivamente a differenze e accrescimenti finiti. Essi matematici, nel caso pratico, p. es., di differenze di temperatura, parlando di una differenza Δt , risparmiano parole, ma esprimono con una immagine infinitamente ingrandita una piccola quantità o differenza finita. In fondo, secondo Cranz, essi fanno una economia del pensiero e della espressione: ma rimane il fatto che una grandezza, nel flusso (come dire altrimenti?) del suo rimpicciolirsi, si avvicina allo zero ma ne differisce pur sempre. Il differenziale dell'analisi entra in scena là dove una grandezza è presupposta come variabile; ma « sobald ich den Körper als constantes, abgeschlossenes, geometrisches Gebilde betrachte, nicht gerade einmal Veranlassung habe, etwas an ihm variabel vorauszusetzen, so fällt damit von selbst das Differential aus meiner Vorstellung weg. Auch ein Theil des Körpers oder der Strecke kann das Differential nicht sein; eine unendlichkleine Strecke kenne ich nicht ». Non è adunque il differenziale una proprietà delle cose, una loro qualità: esso rimane una necessità formale del pensiero.

Lo stesso Cranz ammette che il differenziale non è una realtà, se si intende quest'ultima non come pensiero puro ma come qualche cosa di indipendente dal pensiero: « Es hat keinen Sinn, nach der Realität der unendlich-fernen Geraden zu fragen, und so auch bei dem Differential. Um eine Existenz unabhängig von unseren Gedanken kann es sich bei demselben deshalb überhaupt nicht handeln, weil die Definitionen und Rechenregeln für die Operationen mit dem Unendlichkleinen zum Theil willkürlich sind, wie oben gezeigt würde ». — Nelle applicazioni a fenomeni fisici, la forza centrifuga che agisce su una pietra assicurata ad una corda e spinta a girare circolarmente su un piano orizzontale, oppure le cosiddette linee di forza, sono rispettivamente oggetti del pensiero e reali in quanto tali ossia in quanto sono ideali.

Dice Cranz che, quando si legge la teoria delle linee

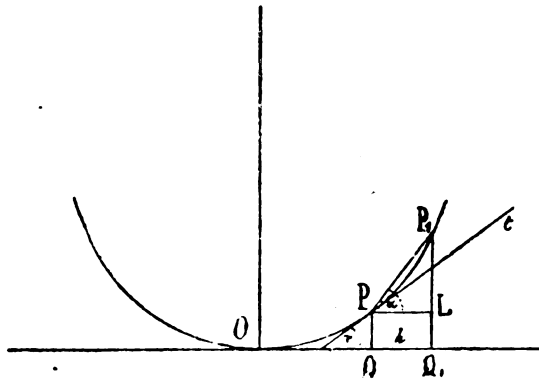
di forza elettriche e magnetiche di Faraday, si crede di vedersi realmente dinanzi queste linee, e di rappresentarsi come nella direzione della loro lunghezza agisca una tensione e perpendicolarmente ad esse una pressione, ecc.; ma l'elettrotecnico che nei suoi calcoli opera con esse, è nondimeno conscio che egli ha dinanzi a sè solamente uno strumento di pensiero trovato e definito dal pensiero stesso, e che, indipendentemente da questo, quelle linee di forza non hanno alcun senso nè alcuna realtà. Quindi l'infinito matematico o l'infinito valore-limite non ha per Cranz un valore di contenuto, ma di comoda espressione verbale abbreviata; ha un significato formale, e, nel caso di rapporti di grandezze, indica un compiuto passaggio al limite. L'autore cita anche la seguente osservazione di Dühring: « Die Nebel des wüßt Unendlichen, sei es nun in der Richtung auf das Grosse oder auf das Kleine, verunstalten sammt den Phantasien über eine mehr als bloß verneinende Bedeutung des Imaginären die Analysis und behindern eine materiell und formell gesunde Gestaltung der Physik ». — Risulta quindi anche dalle idee del Cranz il significato del linguaggio infinitesimale come di una finzione comoda per indicare la infinita variabilità di una quantità finita e la supposta compiuta approssimazione al limite, anzi il supposto avvenuto passaggio al limite. — Ma nelle applicazioni ciò ha un senso, e un senso perfettamente rigoroso, che si può dimostrare adducendo degli esempi.

Un caso pratico, in cui si rivela l'applicazione dei concetti fin qui discussi, è il movimento di un punto su una parabola. In ogni momento si muta la direzione del movimento: e siccome in ciascun punto del percorso questa direzione la si rappresenta mediante la tangente alla parabola in quel punto, così per calcolare la direzione del movimento parabolico si deve trovare una formola valevole per tutti i punti e per tutte le tangenti in quei punti. (Vedi figura a pagina seguente).

Ciò si ottiene con un riferimento della parabola ad un

sistema di coordinate x, y , e col sostituire alla parabola un poligono di infiniti piccolissimi lati. Giacchè si hanno alcuni dati pel calcolo, il punto P , e le sue coordinate x, y , si determina la direzione del lato PP_1 del poligono sostituito alla parabola e anche la direzione della tangente alla parabola in P . Si ha così la formola $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{p} + \frac{h}{2p}$.

Naturalmente qui è incluso un errore, perchè si è sostituito alla parabola un poligono e delle tangenti: ma



l'errore sarà tanto più piccolo quanto meno P disterà da P_1 , che è come dire: quanto più piccolo sarà h . Se quindi i lati del poligono saranno presi così piccoli da non presentare al nostro occhio alcuna differenza tra parabola e poligono, e quindi nessuna differenza (da noi visibile o misurabile) tra la tangente alla parabola e il lato del poligono, l'errore sarà « per noi » scomparso. Naturalmente rimane sempre una differenza tra poligono e parabola, per quanto h sia piccolo: la differenza può solo scomparire quando $h = 0$. Ma allora non è più concepibile un poligono coi lati $= 0$; sicchè, introducendo questo valore di $h = 0$ nella formola su riferita, si avrà $\operatorname{tg} \tau = \frac{x}{p}$ che è il vero valore della tangente ossia la vera direzione della tangente alla

parabola pel punto P di questa e quindi per qualsivoglia punto della parabola stessa.

Un altro caso analogo è quello della libera caduta di un grave, di cui si vuol determinare in ciascun istante la velocità. Questa muta ad ogni istante: ad ogni secondo, le vie percorse sono $\frac{g}{2}, 4 \frac{g}{2}, 9 \frac{g}{2}, 16 \frac{g}{2} \dots$ metri, ecc.

Siccome il concetto matematico di velocità si riferisce solo a corpi che in tempi eguali percorrono vie eguali, ed equivale quindi alla lunghezza della via percorsa nell'unità di tempo, così è chiaro che nel caso presente occorre pensare un punto ausiliario, il quale percorra la medesima via del punto di caduta ma con velocità uniforme; e occorre poi avvicinare quanto più è possibile il suo movimento a quello del grave. Anche qui ciò si ottiene, come nel caso precedente, col render sempre più piccoli i tratti PP_1, P_1P_2 ecc. percorsi, tanto da non esser da noi nè visibili nè misurabili, e col render sempre più piccolo il tempo τ . Ma allora la formola, che era $v = gt + \frac{g}{2} \tau$, se $\tau = 0$, diventa $v = gt$, che è la velocità del grave in ciascun momento del movimento.

Un terzo caso è quello dell'allungamento di una sbarra riscaldata. Anche qui, volendosi calcolare in qual grado la estensione avviene in ciascun momento del riscaldamento, si ricorre al coefficiente di estensione, che vale quando l'estensione segue in modo uniforme, e quindi non può valere quando ciascuna fase del riscaldamento è ogni volta diversa. Allora si ricorre anche in questo caso alla rappresentazione ausiliaria, supponendo cioè che nel riscaldamento da ϑ a $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ l'estensione segua uniformemente. Quanto più piccolo, convergendo verso lo 0, sarà il valore di Θ ossia della differenza di ϑ_1 e ϑ , tanto più la nostra rappresentazione ausiliaria si avvicinerà al processo reale di allungamento, analogamente ai casi precedenti.

È evidente in tutti questi casi l'applicazione dei con-

cetti e delle espressioni di « infinitesimo » e di « limite ». Poichè, nel caso della parabola, si suppose che il poligono potesse trapassare in parabola mediante un progressivo impicciolimento dei lati, la parabola in questo caso si considera il « limite » del poligono. Quindi il valore su riferito di $\operatorname{tg} \tau$ è un « valore limite » per $h = 0$. Così, se in un cerchio si inscrive un poligono regolare e se ne raddoppia il numero dei lati, il cerchio diviene il « limite » a cui vieppiù i poligoni regolari inscritti accresciuti di lati si avvicinano. Se $\frac{1}{3}$ in frazione decimale possiede il valore di 0,333..., esso è il limite a cui le frazioni 0,3 0,33, ecc. si avvicinano infinitamente. Così, nel caso della parabola, la tangente è la posizione limite della corda, ecc.

Se nella formola della parabola $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x}{p} + \frac{h}{2p}$

noi facciamo la differenza delle ascisse $x_1 - x$ eguale a Δx cioè all'incremento dato ad x , e quella delle ordinate $y_1 - y$ eguale a Δy , noi abbiamo, con trasposizione di termini, $x_1 = x + \Delta x$, e $y_1 = y + \Delta y$, in cui Δx e Δy denotano l'aumento subito da x e y passando da P a P_1 . Quindi

la formola diventa $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ il cui quoziente

è il valore limite di $\operatorname{tg} \tau$. — Ora, come nel caso della caduta dei gravi la via percorsa s è una funzione del tempo t , perchè contemporaneamente tanto la via che il tempo variano il loro valore in rapporto fra di loro secondo leggi fisse; così nella formola data, siccome per ciascun valore di x si determina quello corrispondente di y , cioè si determinano i contemporanei mutamenti o variazioni delle due coordinate della curva, che sono grandezze variabili in rapporto fra di loro nel loro variare, si ha che $y = f(x)$; quindi la formola su riferita si può completare così: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. E questo

quoziente di differenze è appunto la derivata o, meglio, la funzione derivata che si esprime con $\frac{dy}{dx}$ ossia con $\frac{df(x)}{dx}$

o $\frac{d}{dx}(f(x))$. In generale per ogni curva la cui equazione è nella forma $y=f(x)$, la posizione della tangente in ciascun punto è stabilita dall'equazione $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

Dove la derivata è di s secondo t , la formola sarà $\frac{ds}{dt}$ che introdotta, p. es., nella formola del movimento di caduta, darà $v = \frac{ds}{dt} = gt$, e nella formola dell'estensione per riscaldamento corrisponderà al valore limite $\frac{dl}{d\vartheta}$.

Tutto quanto abbiamo sin qui riferito riguarda il concetto matematico di infinitesimo e i procedimenti del calcolo infinitesimale. Secondo le idee moderne, codesto infinitesimo non si sottrae a quella necessità universale, secondo cui fra le grandezze che si presentano nello studio dei fenomeni della natura non ve n'è alcuna che non appartenga al campo delle ordinarie grandezze finite: e nel calcolo infinitesimale esso può considerarsi come la espressione simbolica di un concetto rigorosamente definito in base all'idea di limite, giacchè, mediante la conciliazione avvenuta tra il metodo degli infinitesimi e quello dei limiti e la loro fusione in uno solo, equivale ad una grandezza finita variabile che ha per limite zero, cioè che tende a zero senza essere nulla.

Ora, stabiliti bene questi punti essenziali, occorre ancora fissare bene il concetto dell'arbitrarietà dell'infinitesimo già preconizzata da Carnot e di poi messa a profitto da Cauchy, e secondo cui esso è una quantità piccola a piacere, ridotta quanto si vuole, per significare mediante un simbolo che la divisione in parti può essere qualunque. Ora essa, come tale, è sempre una quantità finita che si prende; solo che è variabile e che tende al niente. Ma se è una quantità finita che può variare, non potrà confondersi con quella quantità la quale sia così piccola che, ripetuta un qualsiasi numero di volte, non arrivi mai a formare l'unità. Insomma

l'infinitesimo è pur sempre una quantità finita qualsivoglia e gode delle proprietà delle quantità finite (v. il postulato d'Archimede), mentre la seconda quantità a cui abbiamo accennato non arriverà mai a formare una quantità finita, pur non essendo zero. L'infinitesimo è adunque in fondo una quantità assegnata ad arbitrio, mentre la seconda quantità è minore di qualsiasi quantità assegnata ad arbitrio. Ma, se così è, il primo è l'infinitesimo potenziale, e il secondo l'infinitesimo attuale. E come vi è differenza fra queste due specie di infinitesimo, così vi è differenza in genere fra i due infiniti potenziale e attuale. Ma appunto ciò che importa stabilire è che nel calcolo infinitesimale, come vedemmo, può ritenersi superflua la introduzione dell'infinito attuale, giacchè esso può svolgersi col solo mezzo dell'infinito potenziale, cioè mediante una quantità finita variabile e tendente a zero.

Dice Vivanti¹⁾ a proposito dei due infiniti: « L'idea d'infinito presenta due forme essenzialmente diverse: quella di *infinito attuale* e quella di *infinito potenziale*.

L'infinito *attuale* o *proprio* è una grandezza maggiore di ogni grandezza finita (l'autore avverte però in nota di porre questa definizione in via affatto provvisoria): l'infinito *potenziale* od *improprio* è una grandezza finita, variabile, che può crescere oltre ogni limite assegnato. Così, se la variabile x si avvicina indefinitamente al valor costante a , suol dirsi che $\frac{1}{x-a}$ è un infinito potenziale, o che $x-a$ è un infinitesimo potenziale, malgrado che l'una e l'altra quantità, per ogni valore di x diverso da a , siano finite. Coloro che crearono e che portarono allo stato attuale di sviluppo il Calcolo infinitesimale non si

¹⁾ *La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti*, ecc., cit., pag. 3-4; e *Sull'infinitesimo attuale*, Rivista di matematica, T. I, p. 135, 153 e 248-255; inoltre v. G. Cantor: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883, ecc.

trovarono tutti d'accordo sul modo di considerare gli infiniti che si presentano in questa disciplina; alcuni li ritennero infiniti attuali, altri infiniti potenziali, altri ancora ondeggiarono tra i due pareri opposti. Però, come la Fisica si sviluppò indipendentemente dalle discussioni sulla natura degli agenti fisici, così il Calcolo infinitesimale nulla o quasi ebbe a soffrire dall'incertezza che regnava sulla natura degli infiniti che in esso compaiono; tutt'al più questa incertezza valse a suscitare dei dubbî sulla solidità delle basi logiche del Calcolo, dubbî i quali sparirono non appena fu dimostrato che la nozione d'infinito attuale è superflua nel calcolo infinitesimale, e che questo può svolgersi col solo uso dell'infinito potenziale, cioè *senza lasciare il campo delle grandezze finite* ».

Anche alla fine del lavoro precedentemente citato ¹⁾, il Vivanti, affermando che nel calcolo infinitesimale si rimane entro il campo delle ordinarie grandezze finite, aveva però aggiunto una nota esplicativa, in cui diceva: « Con ciò non intendo punto di riprendere una vecchia polemica sull'esistenza dell'infinitesimo, ma solo di dire che il calcolo può svolgersi affatto indipendentemente dalla considerazione di grandezze non finite ». Una siffatta polemica fu invece recentemente ripresa dal Vecchietti ²⁾; troviamo cenno e critica di essa in scritti recenti del Vivanti ³⁾. La questione oggi ha perduto il primitivo interesse, poichè si vede nel linguaggio del calcolo infinitesimale la pura presupposizione che l'inesauribile serie dei valori determinati assunti da una quantità nel suo variare avvicinandosi a un limite, sia ef-

¹⁾ *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica*, ecc., cit., p. 99.

²⁾ *L'infinito*, cit.

³⁾ V. oltre che *La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti*, ecc., cit., p. 32 nota 1^a e p. 52, anche in *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, T. 11 (1909) p. 77. Cfr. ancora dello stesso Vivanti una critica importante nel medesimo *Bollettino*, T. 6 (1905) p. 49.

fettuata o compiuta; presupposizione che ci serve per comodità di linguaggio e di calcolo. Così si hanno questi due fatti: che l'infinitesimo rimane nel campo delle grandezze finite estensive, perchè presuppone una grandezza che varia, e dei valori diversi da essa assunti nel suo variare per differenze finite e accrescimenti finiti; ma codesta variabilità è inesauribile, perchè quelle differenze si posson prender piccole quanto si vuole, e tende a un limite senza mai raggiungerlo, come può tendere sempre a zero senza mai divenir zero. La frazione 0,666... si avvicina sempre più al valore $\frac{2}{3}$, quanti più 6 si aggiungono, ma non lo diventa mai; con una finzione si dice che lo diventerà, supponendo esaurita tutta la serie e raggiunto il valore di $\frac{2}{3}$. Ma anche qui si danno successioni di valori diversi, e accrescimenti finiti. Ciò che importa tener per fermo si è che nel concetto di infinitesimo matematico non si tratta della esistenza reale di particelle infinitesime, le quali per avere una tale esistenza dovrebbero esser tali che non fosse possibile suddividerle ossia dovrebbero esser minori di qualunque quantità assegnata cioè di qualunque quantità ulteriormente divisibile: siccome simili particelle dovrebbero essere nulle, non potendosi dare quantità minori di qualsiasi quantità assegnata diverse da zero, l'infinitesimo si riduce ad una quantità di piccolezza arbitraria o anche ad una quantità variabile diversa da zero, quasi zero, tendente al limite zero fin che si vuole, ma senza cader nel niente. Questo è il concetto di infinitesimo potenziale, che implica la inesauribile possibilità di determinazioni di differenze o di accrescimenti finiti nel variare di una grandezza.

Posto ciò, conviene entrare in un altro ordine di idee. Nella citata nota posta a piè dell'ultima pagina del suo « Concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica » il Vivanti, dopo aver detto superflua nel calcolo infinitesimale la considerazione di grandezze non finite, prosegue a dire: « Ciò però non esclude punto che in altri campi delle matematiche possano presentarsi classi

di enti, alcuni dei quali possano dirsi infinitesimi rispetto ad altri, avendo la parola *infinitesimo* un significato diverso da quello ad esso attribuito da Cauchy ». E nell'altro citato lavoro « La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti » a pag. 5, dopo avere esposto lo stesso concetto, soggiunge: « Ciò però non esclude, evidentemente, che ancor oggi sia lecito discutere se il Calcolo possa svilupparsi in base all'idea d'infinito attuale ». L'autore prende in esame il dibattito famoso dell'idealista e dell'empirista di P. Du Bois Reymond ¹⁾. In esso si tratta di dimostrare il teorema che una frazione decimale illimitata

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \dots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots$$

si avvicina indefinitamente ad un valore determinato, o, in forma geometrica, che, se a partire da uno stesso punto C d'una retta, si portano su di essa in un determinato senso i segmenti:

$$0, \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{10}, \quad 0, \alpha_1 \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}, \dots,$$

i loro estremi si avvicinano indefinitamente ad un certo punto. Il ragionamento dell'idealista si fonda su ciò: che, se due segmenti finiti differiscono per un segmento infinitesimo, questa differenza essendo minore di qualsiasi differenza finita, essi saranno eguali: perciò, se *N* è l'ultimo dei punti che cadono in qualcuno dei segmenti

$$0, \alpha_1; \quad 0, \alpha_1 \alpha_2; \quad \dots,$$

e *N'* il primo dei punti aventi la proprietà opposta, la distanza *NN'* essendo minore di ogni grandezza assegnata,

¹⁾ *Die allgemeine Functionentheorie*, Tübingen 1882.

è infinitesima e CN sarà $= CN'$: quindi un unico punto separa i punti aventi quella proprietà da quelli che non l'hanno, e tale punto rappresenta il limite. — Invece l'empirista stabilisce l'esistenza del limite considerando la retta come « indefinitamente » sottile; e quindi, siccome il punto è l'intersezione di due rette siffatte, così il limite è raggiunto quando la differenza tra due frazioni decimali successive:

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \quad ; \quad 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}$$

è minore di quello spessore indefinitamente sottile della retta. Questi due punti di vista sono, secondo il Du Bois Reymond, inconciliabili ma entrambi accettabili. Se non che osserva il Vivanti: anzitutto che lì si considerano indifferentemente due classi di enti distinte, cioè l'insieme delle frazioni decimali, e l'insieme dei segmenti rettilinei misurati da queste frazioni; il che importa che si ammetta il postulato che sopra una retta, ed a partire da un suo punto, si può prendere un segmento eguale ad una frazione decimale qualsiasi d'un segmento preso come unità di misura: poi osserva il Vivanti che lì la proposizione fondamentale sull'esistenza del limite non è un « teorema » da dimostrarsi, come crede il Du Bois-Reymond, ed anche il Russell ¹⁾. Difatti, quanto alla classe delle frazioni decimali considerate dal Du Bois-Reymond, non si può « dimostrare » affatto che tendano ad alcun valore (razionale), chè anzi la loro successione abbisogna di una nuova definizione; ed estraendo la radice di $\frac{1}{2}$ indichiamo con $\sqrt{\frac{1}{2}}$ la successione dei valori ottenuti e la chiamiamo un « numero irrazionale »: quanto all'altra classe, quella dei segmenti rettilinei, quel principio di esistenza del limite non è neppur qui un teorema da dimostrarsi, perchè anzi equivale al postulato che, presi su una retta in un dato senso e a

¹⁾ *The principles of mathematics*, I, Cambridge 1903, art. 267, 269.

partire da uno stesso punto di essa i segmenti

$$0, \alpha_1 ; 0, \alpha_1 \alpha_2 ; \dots,$$

esiste sulla retta un punto al quale gli estremi di questi segmenti si avvicinano indefinitamente. Quindi, come dice il Vivanti, non può in questo dibattito il Du Bois-Reymond dimostrare l'esistenza del limite. Inoltre l'infinito che li entra in scena è l'infinito attuale, giacchè si parla di differenze infinitesime come di mancanza di una differenza finita tra due segmenti finiti che perciò sono eguali.

Ma che cosa è questo infinito attuale? Esso non è, p. es., quello della geometria moderna, e neppure, come vedemmo, quello del calcolo infinitesimale, perchè in questi casi l'infinito è una espressione pura e semplice, che ci dispensa dal pensare a un infinito proprio, esistente. Invece all'infinito attuale si sono rivolte la teologia e la metafisica con le dimostrazioni della esistenza di Dio e dell'infinità del creato, e infine anche la matematica. Quest'ultima, liberandosi della influenza della metafisica per entrare in un periodo veramente scientifico, si pose il problema se essa potesse definire e studiare enti infiniti, posto che essa è la sola scienza che opera non su oggetti naturali, ma su enti arbitrariamente definiti, l'esistenza dei quali consiste soltanto nella loro possibilità logica.

Bernardo Bolzano ¹⁾ risponde affermativamente a questo quesito, e distingue nettamente un infinito attuale dall'infinito potenziale del calcolo: difatti, — egli dice — mentre l'infinito del calcolo infinitesimale è soltanto un quantità finita variabile, si può prendere in considerazione un infinito proprio e costante, cioè determinato, qual'è l'insieme di tutti i numeri interi. Un talè insieme infinito ha adunque una esistenza; e ciò dimostrerebbe che la nostra mente è atta a concepire un aggregato infinito di idee. Un altro concetto

¹⁾ *Paradoxien des Unendlichen.*

di Bolzano è il seguente: non è esatto dire che l'infinito, se esiste, non può essere aumentabile, perchè invece possiamo avere diverse grandezze infinite. Ciò che importa è stabilire un metodo di confronto fra queste grandezze infinite. Si prende come esempio il confronto che si istituisce fra due aggregati finiti; qui ciascun elemento del primo aggregato si pone in corrispondenza con uno dell'altro, ossia si « riferiscono biunivocamente » i due gruppi l'uno all'altro; se, per esempio, si vede che il primo aggregato è una parte del secondo, si dice che la quantità degli elementi del primo è sempre minore (in qualunque modo si facciano corrispondere gli elementi dell'aggregato che si considera a quelli della successione) della quantità degli elementi del secondo, ossia si dice che il tutto è maggiore di ogni sua parte. Ora, adottando questo metodo di confronto nel caso di due aggregati infiniti:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, \dots \\ 2, 4, 6, 8, \dots \end{array}$$

si può stabilire fra gli elementi dell'uno e dell'altro una corrispondenza biunivoca facendo corrispondere a ciascun elemento n del primo aggregato l'elemento $2n$ del secondo, malgrado che questo sia parte di quello. Ecco adunque un curioso paradosso dell'infinito: che cioè, « dato un insieme infinito qualunque, può sempre trovarsi una sua parte riferibile ad esso biunivocamente ».

Per meglio chiarire la cosa, crediamo non inutile riferire lo svolgimento e la esemplificazione che di questi concetti fece lo stesso Vivanti nel discorso già da noi più sopra citato ¹⁾. Dice egli così: « Supponiamo per un istante che la nostra Terra sia piana, ed immaginiamo di condurre idealmente una linea retta la quale partendo da Mantova passi per Roma e continui poscia al di là senza alcun

¹⁾ *L'infinito nella natura e nella scienza*, ecc., cit.

limite. Imaginiamo poi un'altra linea retta che partendo da Roma proceda nella stessa direzione e nello stesso verso della prima e si estende essa pure indefinitamente. In virtù dell'assioma che la parte è minore del tutto noi saremo portati a concludere che, pure essendo le due linee infinite, la seconda è minore della prima. D'altra parte supponiamo di prendere la seconda retta e di farla scorrere sulla prima per modo che il capo di essa che stava a Roma salga sempre più portandosi verso Mantova. È chiaro che la linea, anche così spostata, non cessa d'estendersi all'infinito; inoltre, quando il suo capo sarà giunto a Mantova, essa apparirà eguale alla prima linea. Ma non basta: chè anzi proseguendo lo stesso movimento possiamo far risultare la seconda linea maggiore della prima. Eccoci dunque davanti ad un curioso paradosso: abbiamo due grandezze, di cui possiamo dimostrare a nostra scelta che l'una è eguale, maggiore o minore dell'altra! Dopo ciò dobbiamo senz'altro rinunciare alla speranza di poter introdurre il concetto di misura nel campo delle quantità infinite? No di certo; ma dobbiamo invece modificare tale concetto in modo che esso convenga a questi enti di natura speciale.

Prendiamo le lettere *a, b, c, d, e*, e le note *do, re, mi, fa, sol*; perchè diciamo che i due gruppi hanno uno stesso numero d'elementi, ossia che sono eguali? Perchè se ad *a* facciamo corrispondere *do*, a *b* *re*, e così via, quando avremo esaurito tutte le lettere avremo pure esaurito tutte le note. Due gruppi quindi sono eguali, quando si possono far corrispondere uno ad uno i loro elementi in modo che non ne sopravanzi alcuno nè dell'uno nè dell'altro gruppo. Ebbene, questa stessa definizione può adottarsi pei gruppi composti di infiniti elementi; però converrà rinunciare all'assioma che la parte è minore del tutto, giacchè in qualche caso accadrà che il tutto ed una parte sieno eguali. Prendiamo per esempio il gruppo di tutti i numeri 1, 2, 3, ... e quello di tutti i numeri pari

2, 4, 6, ... Quest'ultimo è evidentemente una parte del primo; eppure i due gruppi sono eguali. Infatti al numero 1 del primo gruppo posso far corrispondere il numero 2 del secondo, a 2, 4, a 3, 6, e così via, nè posso concepire idealmente esaurito il primo gruppo senza immaginare esaurito insieme anche l'altro. — Eccoci dunque in possesso di quanto cercavamo, e cioè d'una qualità caratteristica, esclusiva dei gruppi infiniti, d'una qualità atta a distinguerli dai gruppi composti d'un numero finito d'elementi. *Un gruppo infinito ha la proprietà, che può sempre trovarsi un gruppo pure infinito contenuto in esso ed eguale ad esso* ».

Naturalmente tutte queste osservazioni si riferiscono al concetto di un infinito esistente come tale, cioè attuale, il quale infinito ha delle proprietà le quali sono diverse dalle proprietà delle grandezze finite.

G. Cantor¹⁾ fu quegli che meglio stabilì in matematica il concetto dell'« infinito attuale ».

Egli istituisce le seguenti distinzioni: vi è un infinito « attuale », e vi è un infinito « potenziale ». Quello « attuale » può considerarsi sotto tre punti di vista: *a*) in quanto è nella più alta perfezione, in un essere indipendente dal mondo esterno, in « Deo extramundano » « sive natura naturante »; come tale è un « infinito assoluto » o un « assoluto »: *b*) in quanto è rappresentato nel mondo dipendente, « in concreto seu in natura naturata »: *c*) in quanto esso può concepirsi come grandezza matematica, numero o

¹⁾ *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, cit., Leipzig 1883 (v. l'estratto in *Acta math.* 2, 1883, p. 349-408); *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions*, *Acta math.* 2, 1883, p. 409-414; *De la puissance des ensembles parfaits de points*, *Acta math.* 4, 1884, p. 381-392; *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, *Zeitschr. f. Philos. u. phil. Kritik*, Bd. 91, 92; 1887; *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, *Iahresb. d. deutsch. Math.* — Ver. I, 1892, p. 75-78; *Beiträge zur Begründung d. transfiniten Mengenlehre* 1, 2, *Math. Ann.* 46, 1895, p. 481-512; 49, 1897, p. 207-246. Cfr. ancora i lavori citati del Cranz, Vecchietti, Vivanti.

tipo d'ordine del pensiero « in abstracto ». Negli ultimi due casi l'infinito viene detto dal Cantor « infinito transfinito », « transfinitum », che, di fronte all'« assoluto » del primo caso o all'infinito « increatum », è un « infinitum creatum » (come sarebbero, p. es., l'insieme di tutti i numeri finiti interi positivi, o quello di tutti i punti di una circonferenza, ecc.). Dalla altissima perfezione e compiutezza dell'essenza di Dio si trae la conclusione della possibilità di creare un « ordinatum transfinitum »: d'altra parte per Cantor l'ipotesi di un « transfinitum in natura naturata » è una spiegazione più completa dei fenomeni, specialmente di quelli degli organismi e di quelli psicologici.

Se questo è il primo infinito, ossia è l'infinito « attuale », o proprio (« eigentlich ») sotto i tre punti di vista, di cui i due ultimi sono il naturale e il matematico trasfiniti e il primo è inaccessibile, il secondo infinito, ossia l'« infinito potenziale », si ha dove c'è una grandezza finita indeterminata e variabile, la quale o cresce al di sopra di tutti i limiti finiti oppure diminuisce al di sotto di ogni limite finito di piccolezza, come è il caso del « differenziale »: insomma esso ricorre ove si prende in considerazione una « grandezza indeterminata » suscettibile di innumerevoli determinazioni. Quindi per lui non si danno « grandezze infinitamente piccole attuali », ma soltanto « potenziali ». — Appare chiaro che per Cantor l'« infinito » ha una esistenza reale: di più egli mira a dar fondamento saldo all'idea di « infinito attuale », e perciò rimprovera coloro che combattono questa idea, dicendo che l'errore loro è di voler attribuire ai suoi « numeri transfiniti » tutte le proprietà dei « numeri finiti », mentre — egli dice — i numeri veramente « infiniti » (« transfiniti ») costituiscono, con la loro opposizione ai finiti, un nuovo genere di numeri.

Insomma Cantor, non potendo far corrispondere l'idea di « numero » a quella di « infinito » come egli lo pensa, ossia all'« infinito attuale » « transfinito » (del primo tipo di « infinito attuale » non può farsi neppur parola), crea un

nuovo tipo di numeri, i « numeri transfiniti ». Questi numeri hanno proprietà speciali, diverse da quelle degli altri numeri; ed è appunto l'osservazione delle differenze esistenti tra le grandezze finite e le infinite che deve — secondo Cantor — costituir la base dello studio di queste grandezze infinite.

Conseguentemente il Cantor ritiene errate le pretese dimostrazioni della impossibilità dell'infinito matematico, perchè presumono nelle grandezze infinite tutte le proprietà delle finite. Poi, come già fu osservato più sopra, se si prende l'insieme di tutti i numeri interi e positivi, si può trovare una parte di esso riferibile biunivocamente all'insieme stesso: in questo caso, dice Cantor, la parte ha egual « potenza » dell'insieme, intendendosi in linea generale che due aggregati hanno « egual potenza » o sono « equivalenti » se si può stabilire fra i loro elementi una corrispondenza biunivoca e completa, e indicandosi con « potenza » per gli aggregati infiniti ciò che è il numero cardinale per un aggregato finito. — « Ciò è possibile per qualunque insieme infinito », intendendosi per « infinito » « ein in sich festes, constantes jedoch jenseits aller endlichen Grössen liegendes Quantum » (infinito attuale o proprio); e siccome si dice finito quell'insieme tale che, ordinando in modo arbitrario i suoi elementi e riferendoli alla serie dei numeri naturali, si trova un primo numero a cui non corrisponde alcun elemento dell'insieme, così quell'insieme che non è finito si dice « infinito ». Posta questa distinzione essenziale tra il finito e l'infinito, nel senso che in quest'ultimo si può trovare una parte che ha ugual potenza dell'insieme infinito stesso, a cui può biunivocamente riferirsi, se ne pone un'altra pure fondamentale. I concetti di « numero cardinale » e di « numero ordinale » coincidono per gli aggregati finiti, ma si sdoppiano per gli aggregati infiniti. Difatti si può osservare quanto segue. « Se abbiamo — dice il Vivanti — un aggregato finito di oggetti (il concetto di « aggregato » od « insieme » è diverso da quello di « serie », giacchè « una serie è un aggregato al quale è stato

applicato un criterio ordinatore »), e facciamo astrazione dalla natura particolare di questi, il concetto residuo è quello di « numero »; in altre parole, noi diciamo che due aggregati hanno lo stesso « numero » quando è possibile riferirli biunivocamente l'uno all'altro. Come prototipo degli aggregati finiti si assumono gli aggregati aventi per elementi i numeri naturali 1, 2, 3, ..., e si dice p. es. che un aggregato ha 5 elementi se esso può mettersi in corrispondenza biunivoca coll'aggregato 1, 2, 3, 4, 5. Ma nell'atto stesso di stabilire tale corrispondenza, noi veniamo a disporre gli elementi dell'aggregato considerato in un certo ordine; scegliamo cioè un primo elemento, a cui diamo per corrispondente 1, poi un secondo a cui diamo per corrispondente 2, etc., infine un ultimo, a cui diamo per corrispondente 5. Per tal modo 5 rappresenta anche il numero d'ordine dell'ultimo elemento dell'insieme: sicchè esso comparisce sotto la doppia veste di « numero cardinale » denotante la « quantità » degli elementi dell'insieme, e di « numero ordinale » denotante l'« indice » dell'ultimo elemento dell'insieme concepito come disposto in serie ordinata. E, come abbiamo già avuto occasione di osservare, comunque si ordini l'insieme, all'ultimo elemento compete sempre l'indice 5, mentre, se si fa la stessa cosa per qualunque insieme parziale, non si giungerà mai a questo numero, ma si dovrà arrestarsi ad uno dei precedenti. — Queste cose sono tanto ovvie, che noi inconsciamente le consideriamo come conseguenze logiche, necessarie dei concetti di « insieme » e di « numero », mentre esse sono soltanto conseguenze del concetto di insieme finito....

Abbiasi un insieme infinito $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Noi possiamo disporre gli elementi in serie semplice in una infinità di modi diversi, fra cui notiamo i seguenti:

- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$;
- (3) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_1$;
- (4) $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_1, \alpha_2$;
- (5) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$

Se tentiamo di contare queste serie mediante la serie naturale dei numeri, come se si trattasse di serie finite, troviamo anzitutto che per la (2) è necessaria, ma è anche sufficiente l'intera serie dei numeri, giacchè ogni numero n ha un suo elemento corrispondente α_n in (2), e reciprocamente ad ogni elemento α_n di (2), corrisponde un numero n . Ma se passiamo alla (3), la serie dei numeri non è più sufficiente, ad ogni numero n corrisponde bensì un elemento determinato α_{n+1} della (3), ma v' è un elemento di (3), cioè α_1 , a cui non corrisponde nessun numero. Analoghe considerazioni possono farsi per le serie (4), (5).

Dunque i concetti di numero cardinale e di numero ordinale, che coincidono per gli aggregati finiti, si sdoppiano per gli aggregati infiniti; ad uno stesso aggregato competono numeri ordinali diversi a seconda della diversa disposizione degli elementi ». E anzitutto, giacchè nella serie dei numeri naturali in cui si comprende anche lo zero, ciascun numero si può definire successivamente come il numero ordinale della serie dei numeri che lo precedono e nello stesso tempo coincide col numero cardinale (1 è il numero ordinale della serie formata dal solo elemento 0; 2 quello della serie 0, 1, ecc., e nello stesso tempo essi sono rispettivamente i numeri cardinali perchè denotano la quantità degli elementi della serie), e poichè non v'ha nessun numero atto a rappresentare il numero ordinale dell'intera serie dei numeri, il Cantor sentì la necessità di introdurre a tal uopo un nuovo simbolo che è la lettera ω , il cui posto sarà al di là di tutti i numeri naturali. La serie naturale dei numeri resterà così ampliata:

$$0, 1, 2, \dots, \omega.$$

Analogamente al fatto che la serie $0, 1, 2, \dots, n$ ha per ordinale $n + 1$, la serie $0, 1, 2, \dots, \omega$ avrà per ordinale $\omega + 1$. Analogamente ancora la serie

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1$$

avrà per ordinale $\omega + 2$; e la serie $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2$ avrà per ordinale $\omega + 3$, ecc.

Inoltre, siccome numeri ordinali di queste serie sono rispettivamente $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3$, ecc., così si vede, giusta quanto fu sopra detto, che « il numero ordinale di un insieme di infiniti elementi può variare a seconda del modo in cui questi si dispongono in serie » ¹⁾. V'ha di più. Per creare qualunque numero naturale, dice Cantor, si ricorre ad un processo che consiste invariabilmente nell' « aggiungere 1 ad un numero già noto »: questo processo è il cosiddetto « primo principio di formazione di Cantor ». Ma per oltrepassare la serie dei numeri naturali, non essendo più sufficiente codesto primo processo, occorre « un secondo principio di formazione », che consiste nella « creazione di un nuovo numero ordinale definito come immediatamente successivo ad una serie di numeri già definiti non aventi un ultimo elemento ». Secondo questo secondo principio di formazione si forma ω , cioè il primo numero ordinale successivo alla serie infinita dei numeri naturali: a lor volta i numeri $\omega + 1, \omega + 2, \dots$ della forma $\omega + n$ (essendo n ancora un numero naturale) si formano di nuovo col primo principio; indi, ottenuta la serie

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots,$$

¹⁾ Riguardo alla definizione dei numeri ordinali riportiamo dal VIVANTI (« La nozione dell'infinito, ecc. », p. 25) quanto segue: « la serie dei numeri ordinali, prolungata quanto si vuole, ha queste due proprietà: che possiede un primo elemento, e che, presa una parte qualunque di essa, esiste un determinato elemento a questa immediatamente consecutivo. Ciò si esprime dicendo che la serie è *ben ordinata*. Ora, data una serie ben ordinata di elementi qualunque, essa potrà farsi corrispondere ordinatamente elemento ad elemento alla serie dei numeri ordinali prolungata quanto basta; il numero immediatamente successivo sarà il numero ordinale della serie data. Ciò conduce ad una nuova definizione dei numeri ordinali: *Il numero ordinale è ciò che rimane del concetto d'una serie ben ordinata quando si fa astrazione dalla natura dei suoi elementi* ».

si dovrà indicare con $\omega . 2$ il numero ordinale di essa, ricorrendo per questo numero non più al primo ma di nuovo al secondo principio di formazione. Parimenti col secondo principio di formazione si forma il numero $\omega . 3$, che è il primo successivo a tutti i numeri $n, \omega + n, \omega . 2 + n, \dots$, e ω^2 , che è il primo numero successivo a tutti i numeri della forma $\omega . m + n$. Sicchè, mentre i numeri $0, 1, 2, \dots$ costituiscono la « prima classe » di numeri ordinali, quelli risultanti dalla combinazione di questi numeri col simbolo ω costituiscono la « seconda classe ». — Ora, stabilito che un aggregato qualunque ha sempre eguale potenza di sè stesso, giacchè si può riferirlo biunivocamente a sè stesso facendo corrispondere a ciascun elemento l'elemento medesimo, si può dimostrare che, se son date le due seguenti classi

$$\begin{aligned} 0, 1, 2, \dots; \\ 0, 1, 2, \dots, \omega; \end{aligned}$$

e α denota un numero « qualunque » della seconda, l'insieme dei numeri ordinali non superiori ad α ha la stessa potenza dell'insieme dei numeri naturali, ossia secondo Cantor ha la « prima potenza » od è « numerabile ». Ma, come per esprimere il numero ordinale di $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, si è creato ω , il quale ha la doppia proprietà, che l'insieme dei numeri precedenti qualunque numero che precede ω è finito, e che l'insieme di tutti i numeri che lo precedono non è finito, così, se introduciamo ora un altro simbolo totalmente nuovo Ω , questo sarà definito dalla doppia proprietà che, mentre è numerabile l'insieme di tutti i numeri precedenti qualunque numero che precede Ω , non è più numerabile l'insieme di tutti i numeri precedenti Ω . In questi casi, in cui si è creato un simbolo nuovo, si è verificato questo: come si dice che l'aggregato A ha « potenza maggiore » di B quando entrambi non hanno egual potenza e un aggregato contenuto in A ha egual potenza di B , così l'insieme di tutti i numeri precedenti Ω ha « potenza maggiore » di quella degli

aggregati numerabili; non potendo quindi la sua esser più la « prima potenza » cioè non essendo numerabile, esso avrà la « seconda potenza », giacchè non si può dare alcuna potenza intermedia tra la prima e la seconda. Così l'insieme di tutti i numeri formati mediante Ω , ω e i numeri naturali, avrà potenza maggiore della seconda e richiederà la creazione di un nuovo simbolo. Per tal modo si ha un « terzo principio, detto di arresto o di limitazione », per il quale « la creazione di un simbolo nuovo deve farsi sempre e soltanto quando l'insieme di tutti i numeri già formati ha potenza superiore a quella dell'insieme di tutti i numeri precedenti uno qualunque dei numeri già formati ». — Questi tre principî di Cantor riguardano « i numeri ordinali trasfiniti ». — Quanto ai « numeri cardinali trasfiniti », come vedemmo, anzitutto va ricordato che il concetto che qui più si adatta a quello di « numero cardinale » di un aggregato finito è quello di « potenza », così spiegato dal Vivanti: « Noi diciamo che due aggregati finiti hanno lo stesso numero d'elementi (numero cardinale), quando possono riferirsi biunivocamente l'uno all'altro. Facciamo ora corrispondere a ciascun insieme un ente, che chiameremo il suo *numero cardinale*, e diciamo che due numeri cardinali sono eguali, se gli aggregati a cui essi appartengono sono riferibili biunivocamente l'uno all'altro. Ne segue che due aggregati hanno egual numero cardinale sempre e soltanto quando hanno egual potenza, sicchè i concetti di potenza e di numero cardinale coincidono ».

Ora ciò che importa qui mettere in rilievo è un fatto, che dimostra una assai notevole differenza tra i numeri cardinali trasfiniti ed i numeri finiti. « Dati due aggregati *infiniti* A, B di numeri cardinali a, b , si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $a = b$ è, che possa trovarsi in A un insieme parziale avente la stessa potenza di B , e in B un insieme parziale avente la stessa potenza di A . Ora per due aggregati infiniti qualunque A, B possono aver luogo 4 casi, e cioè:

1) Esiste in A un insieme parziale avente egual potenza di B , e in B un insieme parziale avente egual potenza di A ; allora $a = b$.

2) Si verifica la prima condizione, ma non la seconda; allora $a > b$.

3) Si verifica la seconda condizione, ma non la prima; allora $a < b$.

4) Nessuna delle due condizioni è verificata. In questo caso, di cui sino ad ora non fu dimostrata la impossibilità, tra i numeri a, b non ha luogo alcuna delle tre relazioni:

$$a = b, a > b, a < b.$$

Ed è questa una differenza molto notevole tra i numeri cardinali trasfiniti ed i numeri finiti ».

Il Vivanti, indagando in Cantor l'origine della teoria dei numeri trasfiniti, osserva come essa si possa trovare nella teoria degli aggregati di punti: difatti, dato su una retta un insieme infinito I di punti, può esistere sulla retta qualche punto, appartenente o no a I , tale che in ogni segmento per quanto piccolo in cui è contenuto, cadano punti diversi da esso appartenenti a I , ossia un « punto limite » di I : l'insieme di punti siffatti si dice l'« insieme derivato » di I e si denota con I' : I' contiene così I' , questo contiene I'' , ecc. in successione illimitata. L'insieme dei punti comuni (se ve ne sono) ad $I, I', \dots$ si denota con I^ω , derivato d'ordine ω di I : se poi I^ω contiene infiniti elementi, esisterà il suo derivato $I^{\omega+1}$ e il derivato di questo $I^{\omega+2}$, ecc., in successione anche qui illimitata: allora questo nuovo insieme di aggregati si rappresenterà con $I^{\omega \cdot 2}$, ecc. Insomma vediamo qui presentarsi quei due principî di formazione di Cantor, che più sopra esponemmo trattando del numero ω e quindi di $\omega + 1, \omega + 2, \dots \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1$, ecc.

Considerando i principî di G. Cantor e l'osservazione di Borel¹⁾, secondo cui gli aggregati numerabili sono i soli

¹⁾ *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898, ecc.

che si possono concepire, e quelli non numerabili sono una nozione puramente negativa, il Vivanti nota questo carattere essenziale della teoria di Cantor, che il suo primo principio di formazione o il « processo di induzione » mediante cui da n si può giungere mentalmente ad $n + 1$, essendo appunto quello che ci impedisce di concepire come chiusa e finita la intera serie dei numeri, perchè sempre sussiste la possibilità di aggiunger nuovi termini, si richiede per ciò appunto il secondo principio di formazione per immaginare chiusa quella serie infinita: però, mentre da una parte lo scopo è raggiunto per il matematico, esso fallisce dal punto di vista psicologico, perchè questo secondo principio di formazione è un pretesto ed è un processo che la nostra mente non è atta ad effettuare. Sicchè conclude il Vivanti: « noi possiamo *definire*, ma non *concepire* i numeri trasfiniti. *Non dunque il passaggio dall'infinito numerabile all'infinito non numerabile, ma il passaggio dal finito all'infinito, è la barriera che il nostro pensiero è impotente ad oltrepassare* ». Così parecchi sono gli enti matematici che si « definiscono » senza che si possano « concepire »; ed è altrettanto assurdo, dal punto di vista psicologico, concepire la retta decomposta in punti inestesi e indivisibili, quanto creder di dominare colla mente l'intera serie dei numeri naturali.

Dal che si ricava questa considerazione: che per gli enti infiniti della matematica implicanti l'idea di infinito attuale, si dà la « definizione » ma non il « concetto »; onde resta assodato per altro motivo quanto più sopra discutemmo, che cioè matematicamente non si può concepire che delle quantità o grandezze finite, le quali nel caso del calcolo infinitesimale sono considerate come variabili; e quando vengano sostituite da enti attualmente ed esistenzialmente infiniti, non possono più esser oggetto di pensiero, sebbene siano perfettamente definibili e logiche.

Ritornando a questi ultimi enti e alla teoria dei numeri trasfiniti, è notevole la obbiezione sollevata contro di essa

nel campo matematico da Burali-Forti¹⁾, la quale diede luogo a molte discussioni e a poche speranze di soluzione. L'obbiezione suona così: « La serie costituita da tutti i numeri ordinali è una serie ben ordinata, quindi ad essa compete un numero ordinale determinato, il quale deve essere maggiore di tutti quelli della serie; ma ciò è contro l'ipotesi che la serie contenga tutti i numeri ordinali ». Se non che osserva Vivanti che il concetto di « serie di tutti i numeri ordinali » è contraddittorio in sè; perchè, quando noi immaginassimo questa serie contenuta nella classe degli enti matematici e separata da ogni ente della classe che non le appartiene, ognuno di questi enti, aggiunto alla serie, darebbe origine ad un nuovo numero ordinale.

Un fatto degno di nota è che l'infinito attuale dovendo costituire una nozione e dar luogo ad una definizione, deve anzitutto divenire una idea non negativa ma positiva; e questa è che, come vedemmo, un aggregato infinito contiene sempre aggregati parziali che possono riferirsi ad esso biunivocamente. Dedekind²⁾, riconoscendo essere tale proprietà caratteristica degli aggregati infiniti, dà di questi la seguente definizione: « un aggregato si chiama infinito, quando contiene un aggregato parziale equivalente a sè stesso ». — Nota oltre a ciò il Vivanti che tra gli enti infiniti la nozione di « grandezza infinita » è più generale di quella di « insieme infinito ». Quando, dato un insieme di enti, di due qualunque di essi si può dire se sono eguali o no, questi enti si dicono grandezze: una classe di grandezze si dice « lineare » se, date due grandezze qualunque non eguali, si può sempre stabilire quale sia la maggiore e quale la minore; un esempio di grandezze lineari si ha nella classe dei numeri reali e positivi, dove, per l'« assioma

¹⁾ *Una questione sui numeri trasfiniti*, Rend. Circ. mat. Palermo 11, 1897, p. 154-164.

²⁾ *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1.^a ed., Braunschweig 1888.

d'Archimede », date due grandezze qualsiasi A, B e supposto $A < B$, esiste sempre un numero n abbastanza grande perchè sia $A \cdot n > B$. Ciò però non si verifica nel caso delle grandezze $1, \omega$, perchè non si può trovare un n abbastanza grande perchè sia $1 \cdot n > \omega$, come non si può rendere $\omega \cdot n > \omega^2$, ecc. Quando ciò si verifica per due grandezze A, B si dice che B è « infinita » rispetto ad A oppure che A è « infinitesima » rispetto a B , per significare che nessun numero finito è abbastanza grande per misurare B mediante l'unità A ; il che ci richiama al concetto, già più sopra espresso, dell'infinito e dell'infinitesimo attuali. — Un'altra classe di elementi infiniti e infinitesimi più particolare è quella dei « segmenti rettilinei », a proposito dei quali il Vivanti osserva, discutendo le idee di Veronese (sviluppate da Levi Civita e discusse pure da Killing, Peano, ecc.), che l'idealizzazione del segmento finito indefinitamente crescente, sarebbe « non » già il « segmento infinito limitato », ma piuttosto il « segmento finito illimitato ».

All'infinito attuale si collega la nozione del « continuo », e più specialmente il problema della « costituzione del continuo matematico », che — osserva ben a ragione il Vivanti — è il solo accessibile alla scienza positiva. Trattandosi del caso più semplice, ossia di indicare « quali sono gli elementi della linea retta », il Vivanti osserva che, anzichè rispondere subito che questi elementi sono o segmenti infinitesimi o punti, conviene prima ricordare che gli elementi della retta, se esistono, devono essere in numero infinito ossia devono essere un infinito attuale; ma, poichè questo può soltanto « definirsi e non concepirsi », così la decomposizione della retta in elementi, se pure è possibile, potrà essa pure « definirsi ma non concepirsi ». Allora la questione è di sapere « se possa assegnarsi un insieme di enti, la definizione del quale equivalga a quella della retta »; e a questa si può rispondere che, non potendo essere un ente elementare il segmento infinitesimo perchè ulteriormente divisibile, lo sarà il punto il quale è

indivisibile: quindi « gli elementi della retta sono punti ». Ora, se è più « logico » porre i punti come elementi della retta, per il fatto che non sono ulteriormente divisibili, rimane d'altra parte impossibile « concepire » la composizione della retta mediante punti indivisibili: sicchè resta assodato che l'« insieme di tutti i punti appartenenti ad un segmento rettilineo » può soltanto « definirsi ». Perchè ciò sia possibile, va ricordato che « il derivato di un dato insieme è l'insieme formato dai suoi punti limiti. Se un insieme è identico al suo derivato, esso dicesi *perfetto* Un insieme lineare dicesi *connesso*, se, fissata ad arbitrio una quantità σ , tra due punti qualunque a, b di esso può trovarsi un numero finito di punti $c_1, c_2, \dots, c_n$ dell'insieme in modo che i tratti $ac_1, c_1c_2, \dots, c_{n-1}c_n, c_nb$ sieno tutti di lunghezza minore di σ le due proprietà si trovano riunite soltanto negli aggregati formati da tutti i punti di un segmento: *ogni insieme lineare perfetto e connesso è costituito da tutti i punti d'un segmento rettilineo* » (Vivanti, op. cit., p. 49). Va aggiunto che « nessun aggregato perfetto è numerabile »: e « il fatto che l'insieme dei punti d'un segmento ha potenza superiore alla prima (ossia non è numerabile), confrontato colle osservazioni esposte più sopra, ci spiega perchè noi non possiamo neppure illuderci di saper concepire la decomposizione della retta in punti ». Per G. Cantor la definizione del « continuo » è appunto quella di un « insieme perfetto e connesso »: « esso ha sempre la stessa potenza, qualunque sia il numero delle sue dimensioni ». — Ciò che per noi qui ha importanza essenziale, è il fatto che la costituzione del continuo fondata sulla teoria degli aggregati infiniti di punti, può soltanto definirsi come qualunque ente infinito o infinitesimo attuale.

Da tutto quanto siamo finora venuti esponendo intorno all'infinito matematico, si può raccogliere qualche risultato di importanza non dubbia. Anzitutto abbiamo esa-

minato il concetto di infinitesimo ossia dell'infinitamente piccolo, ed abbiamo visto come esso si sia man mano svolto e finalmente liberato dalla inconcepibilità metafisica in cui lo avevano lasciato gli stessi inventori del calcolo infinitesimale, definendolo come qualcosa che svanisce nel nulla ma che tuttavia ritiene il carattere di ciò che svanisce, oppure come un niente che non è un vero e assoluto niente, o come una quantità più piccola di una quantità qualunque per quanto piccola, e che perciò, moltiplicata per una qualsiasi quantità, non potrà mai formare l'unità e pur tuttavia non è zero, ecc. Ora non può neanche più parlarsi propriamente di un infinitamente piccolo, ma solamente si ricorre all'infinitesimo per indicare con linguaggio simbolico abbreviato una quantità finita variabile e tendente a zero. Essa resta nel campo delle grandezze estensive, ed è quindi finita, e ritiene le proprietà delle grandezze finite. Sicchè l'infinitesimo matematico ha, secondo noi, questi tre caratteri essenziali: esso esprime il concetto matematico dell'infinito nella direzione della piccolezza; inoltre, come tale, è una quantità finita qualunque; poi essa si approssima infinitamente a zero senza mai essere zero. Questi caratteri fanno concludere, per noi, anzitutto che, essendo questo infinitesimo una quantità finita o un finito, ha un fondamento rappresentativo-empirico; poi che la idealizzazione e astrazione matematica ha utilizzato i materiali della sensazione e della rappresentazione rendendoli ulteriormente elaborati sino a farli divenire gli estremi, i modelli, i tipi infinitamente perfetti, i limiti (astratti) delle rappresentazioni concrete degli oggetti reali. — Abbiamo esaminato, dopo ciò, i concetti degli enti infiniti attuali, di enti per la massima parte infinitamente grandi dei quali pure si fa molto uso in matematica, e di cui è innanzi tutto postulata l'esistenza e data la definizione. Così abbiamo visto come si siano pensati i numeri trasfiniti, e il secondo e il terzo principio di formazione di Cantor; poi come si possa definire l'infinito per una nozione posi-

tiva di esso; infine vedemmo alcune classi di altri enti matematici infiniti quali in generale le grandezze e in particolare i segmenti rettilinei, e vedemmo l'insieme infinito di punti. In quest'ultimo caso, in cui i punti sono pensati come elementi ossia come enti non ulteriormente divisibili, non può pensarsi la loro composizione; onde si dà la necessità di definire degli insiemi senza poterne concepire il modo di formazione, all'infuori del pensare il punto come un indivisibile inesteso ma tale da generare (mediante il moto, ecc.) la estensione. E questa particolarità di enti definibili ma non concepibili non è peculiare degli aggregati di punti, ma lo è di tutti gli enti attualmente infiniti.

Il Vivanti trova inutili le lunghe discussioni intorno alle basi psicologiche dell'infinito attuale, almeno dal punto di vista della matematica; perchè, mentre non intaccano il valore matematico delle teorie che lo concernono, si fondano sul presupposto della concepibilità di esso infinito attuale; presupposto che egli ritiene falso, giacchè codesto infinito può solo definirsi ma non concepirsi.

È evidente che, se l'infinito proprio o attuale non può concepirsi, di esso non deve trattarsi all'infuori del punto di vista esclusivamente matematico, sebbene non manchino argomenti sfavorevoli alla sua assoluta inconcepibilità; ad ogni modo il solo concetto di infinito, di cui possa trattarsi con fondamento, è quello che può non solo definirsi, ma anche concepirsi, cioè l'infinitesimo, ossia quello di una quantità, la quale, per quanto trascenda i dati della rappresentazione reale, è un finito, un determinato, una idealizzazione, astrazione, e generalizzazione del dato empirico, pensato non come costante ma come variabile. Sicchè l'infinito matematico è in rapporto col finito presupposto come qualunque, come infinitamente variabile.

Ciò ci impone di esaminare un poco questa idea del finito e ancora il fondamento psicologico del finito e del determinato nella matematica, per vederne l'origine empirica, lo sviluppo ideologico sino a trascendere la possibilità

empirica rappresentativa, e il fondamento dell'infinito matematico che è in rapporto con esso.

Leibniz diceva che per concepire l'infinito bisogna concepire che la stessa ragione sussista sempre per andare più lontano. Ora si ha questo doppio fatto: che le nostre rappresentazioni sono finite, ma che la nostra coscienza è continua. Difatti, se p. es. vogliamo rappresentarci uno spazio maggiore di quello compreso entro il massimo angolo visivo, è la nostra immaginazione la quale, per dirla col Couturat ¹⁾ « diminuisce progressivamente gli spazi man mano che li racchiude in altri più grandi, come se essi fuggissero a perdita di vista; in tal modo l'ultimo spazio ottenuto non è in realtà più grande del primo: è il primo che è divenuto più piccolo. » Così non possiamo in realtà rappresentarci un'estensione minore del diametro del più sottile filo di seta o del più minuto granello visibile; il concepire la divisibilità di questa estensione appena toccante la soglia, significa ingrandire con l'immaginazione queste estensioni e così lasciare le medesime dimensioni all'ultima estensione trovata con la suddivisione. D'altra parte, la coscienza è continua, va al di là di ogni limite o termine: ed è appunto il sentimento di persistenza del nostro pensiero al di là del pensato e persino del pensante, che ci suggerisce l'idea del « sempre », dell' « infinito », e simili, e che fece anche pensare a Leibniz ²⁾ la possibilità di una ripetizione non « quante volte ci piaccia » ma oggettivamente « senza termine », mentre Malebranche la negava. Questo sentimento di persistenza, tradotto logicamente per via simbolica, è l' « infinito », da cui va distinto l' « indefinito », che è un « finito » « non ancora finito » o meglio « non definito, non determinato, non ancora determinato ».

Ma, se si dà questo doppio fatto, che le nostre rappre-

¹⁾ *De l'infini mathématique*, Alcan, 1896, p. 563.

²⁾ *Lettera a Remond de Montmort*, ed. Dutens, T. II, parte I^a, p. 216.

sentazioni sono finite e la coscienza è continua, e se d'altra parte deve distinguersi l'infinito dall'indefinito ossia dal finito indeterminato, bisogna concludere che l'infinito è la continuità nella coscienza di contenuti rappresentativi (o di origine rappresentativa) determinati. Quindi bisogna sempre far capo al finito. — A parte le distinzioni delle diverse specie di finito, che son poste dal Vecchietti ¹⁾, ricorderemo con lui che finito è ciò che si percepisce e che in fondo poi si riduce a un atto solo di coscienza: un esempio del finito è il tempo in quanto è durata, e perciò « rappresentazione » e quindi anche « sensazione e sentimento » relativi: esso può esser determinato per mezzo dello spazio, e può esser anche più breve dell'« istantaneo » minimo psicologico percettibile: ma per la nostra coscienza esso non è che un fatto sentito, percepito, ricordato o pensato direttamente o indirettamente con un atto o atti simultanei e non successivi o successivi ben associati di coscienza e, come tale, finito. Dall'idea del « finito » si passa indi a quella dell'« unità » e della « pluralità », che trovano già il loro fondamento nella percezione delle diverse parti di un contenuto, isolate e lasciate discontinue dall'attenzione, oppure colte in una unità, oppure ancora riunite come una pluralità nell'unità ossia come una collettività; « unità » e « pluralità » divengono poi astratti indefinibili. Di questi, la « pluralità » è suscettibile di altre sottodistinzioni: essa può essere una « collezione », ossia una « duplicità », « triplicità », ecc. La « duplicità », la « triplicità », ecc. posson definirsi col concorso dell'« unità » e « duplicità ». « Collezione finita di I specie » (così Vecchietti) è quella la cui caratteristica è percepibile direttamente. « Contare » è affermare successivamente le caratteristiche di tutte le collezioni contenute in quella esaminata, tenuto conto che il numero cardinale è un numero che si va formando. Venendo alle collezioni di 2^a specie, diremo che, una volta concepito un numero

¹⁾ *L' infinito*, cit.

finito di 2^a specie, sapendosi che a quel dato segno corrisponde una collezione determinata, quel numero diviene un elemento unitario costitutivo dei concetti di nuovi numeri più complessi: così invece di raggruppare per cinque (ossia per numeri finiti di 1^a specie), si può subito raggruppare per numeri finiti di 2^a specie, come p. es. il 10, che spesso appunto si utilizza: e così per mezzo della « intuizione » della caratteristica della nuova collezione, il processo psicologico è reso più spedito. Questa « intuizione » sta a dimostrare in matematica che il processo psicologico è immediato; è qualcosa che non è ancora una vera e propria rappresentazione, ma che è come una specie di sentimento di evidenza diretta. Così, se pensiamo un numero composto di centinaia di milioni, si ha dapprima la intuizione vaga di un numero grande accompagnato dall'immagine del segno; poi, con un processo analitico, si distingue il primo gruppo delle centinaia di milioni, in cui l'unità è il milione, poi via via si opera la scomposizione del milione in migliaia di migliaia, e queste in decine di centinaia o centinaia di decine (secondo le abitudini mentali), e poi in decine di decine, in cinque, sino ai numeri finiti di 1^a specie, intuiti direttamente con l'aiuto della immagine, p. es., delle cinque dita ecc.

Questo processo non è però solo di scomposizione, ma è una rapida sintesi, una costruzione di gruppi individuati, i quali, non appena si son riconosciuti gli elementi di cui constano, divengono a lor volta nuovi elementi e unità risultanti costitutive di altri gruppi superiori più comprensivi. Così un centinaio di milioni può scomporsi in gruppi di tre cifre, di cui il primo ha per unità il milione, il secondo il mille, e il terzo l'uno: ma, avvenuto rapidamente il riconoscimento del posto e del rapporto dell'uno alla decina, di entrambi al centinaio, di tutti al mille e infine al milione e al centinaio di milioni, questi rapporti danno subito origine ai gruppi sintetici e chiaramente afferrabili del migliaio, del centinaio di migliaia, e del centinaio di milioni, e infine al

gruppo totale del numero in questione, la cui caratteristica diviene un fatto nuovo e indipendente, per quanto si riconoscano in essa le tracce e i segni particolari del processo di formazione. Questo processo di individuazione di ogni numero, che ne permette dapprima la intuizione, indi il concetto preciso e distinto da quello di ciascun altro, ha, come si vede, una importanza psicologica non comune, per la sua stretta dipendenza dai fenomeni della memoria e in genere dalle leggi delle fusioni associative, fondamento di un numero immenso di fatti mentali. — Osserveremo ancora come in queste operazioni del « contare » e del « numerare » abbiano gran parte, oltre la memoria, i processi sintetici che permettono la presenza contemporanea ed il confronto di due o più elementi: processi che hanno tanto più valore quando, come nel caso della duplicità e triplicità, i rapporti tra gli elementi sono, per molti motivi, più intrinsecamente profondi. Perciò anche in una collezione di 2^a specie si ha implicita l'ipotesi che tutte le sue unità siano contemporaneamente presenti e distinte in un finito di 1^a specie. Questa riduzione di ogni collezione numerica a un finito di 1^a specie e, in fondo, all'unità, significa che il finito implica l'unità, ossia il ridursi più o meno direttamente all'unità di coscienza e a un atto solo di coscienza.

Alla idea del « finito » fa quasi riscontro necessario quella del « continuo ». Il Poincaré ¹⁾, matematico ben noto, dopo avere distinto tra « continuo matematico » e « continuo fisico », per dare un esempio del secondo, cita il caso di due pesi che differiscono tra di loro di così poco, che noi non possiamo apprezzare alcuna differenza di peso tra di essi. Questa mancanza di un limite percepito tra due elementi, è ciò che appunto costituisce il « continuo », ossia ciò che non è in-

¹⁾ *Cournot et les principes du calcul infinitésimal*, Rev. de Métaphys. et de Morale, 1905, pag. 294-295 — dello stesso: *La science et l'hypothèse*, parte 1^a, cap. 2^o.

terrotto. Ma questo è un continuo « fisico », che cioè si dà in natura, e che però non ci impedisce di ammettere la possibilità di scomporlo in un discontinuo mediante più fini mezzi di osservazione. Se, p. es., quei due pesi li misuriamo con una bilancia di precisione, noi veniamo a trovare che l'uno pesa un po' più dell'altro, mentre colle nostre sensazioni non ce n'eravamo accorti: per tal modo quel « continuo » diventa un « discontinuo »; e così via. Il « continuo fisico » può dunque ridursi ad una formola, in cui, dati p. es. tre elementi, dei quali il 1.° è sentito distinto dal 3.°, non si distinguano invece il 1.° dal 2.°, nè il 2.° dal 3.°. Le differenze tra due di questi elementi consecutivi sono perciò « insensibili ». Così è, p. es., del movimento delle sfere di un orologio da tasca: esso ci sembra continuo, perchè non percepiamo le differenze se non isolando e confrontando punti molti distanti fra loro: ma lo diciamo « in realtà discontinuo » perchè, sebbene a noi ciò non apparisca, esso procede a scatti secondo le oscillazioni del bilancere. Al contrario, se un treno si avvicina a noi, e noi, in forza della persistenza delle immagini sulla retina, ne percepiamo il movimento a scatti, siamo però costretti a pensare che quel movimento è « in realtà continuo » e che tale noi lo percepiremmo se più piccolo fosse quel tempo di persistenza della immagine.

Adunque se il « continuo » è ciò che ci appare non interrotto, o come qualche cosa di indecomponibile, si capisce che qualunque discontinuità potrà tanto più facilmente essere tolta di mezzo ossia essere accostata alla continuità, quanto più piccole verranno ridotte le differenze fra due elementi discontinui consecutivi; il che è appunto il compito del continuo matematico, come si vede nel caso della velocità, del rapporto fra due infinitesimi, della eguaglianza ecc.

Da tutto questo risulta che la questione del continuo si connette con quella dell'infinito e che quindi ha pure fondamento nel « finito », perchè è l'inesauribile processo di riduzione delle differenze finite.

Ritorniamo adunque al « finito », e propriamente al « finito numerico », al « numero ». Se i numeri sono simboli destinati, come le parole, a costituire dei segni corrispondenti associativamente ad un'idea o in generale ad un dato processo del pensiero applicato al finito, queste idee verranno, per una legge di economia del pensiero e del linguaggio, pensate per i loro segni, astraendo sino ad un certo punto dal substrato rappresentativo originario. Malgrado ciò, non può e non deve dirsi che essi manchino di un vero contenuto determinato. Questo, che si riconosce chiaramente nella rappresentazione, non va affatto perduto nella idea, sia concreta o astratta, particolare o generale, e nel concetto che da quella derivano; anzi non si dà pensiero nel quale non siano ancora riconoscibili i residui di rappresentazioni di oggetti particolari concreti. Il tempo si pensa come uno spazio, e così pure lo spazio come una successione ed un tempo. Non deve credersi che il nostro pensiero rinunci mai completamente all'originario contenuto psicologico. Ora, nel dato sperimentale rappresentato direttamente, emergono caratteristiche qualitative, quantitative, ecc., che permettono di determinarne i rapporti e di segnarne per così dire i limiti sotto vari aspetti, in modo che ne sia possibile la conservazione nella memoria, l'appercezione, la identificazione, il conoscimento, il riconoscimento: e poichè questi caratteri determinativi non si perdono nel ricordo rappresentativo rimasto di esso nel concetto, non potrà dirsi che sia esulato da questo il carattere del finito, anzi del determinato. Ora, quanto più finito e determinato diverrà l'oggetto del pensiero, sia in sè stesso sia in rapporto con altri, tanto più facilmente esso cadrà sotto il punto di vista quantitativo. Ma il maximum di condizioni richiesto perchè si dia questo dato quantitativo finito, è che esso sia affermato dalla coscienza il meno successivamente e discontinuamente possibile, bensì piuttosto come un fatto unico e continuo. Dice il Vecchietti che l'unità e la pluralità si possan anche chiamare « continuità e discontinuità, uniformità e non

uniformità ». D'altra parte anche dove v'ha discontinuità di elementi per la rappresentazione, si può cogliere mentalmente l'unità del contenuto di tutto il loro insieme, sia per un più intimo rapporto associativo e sia per un lavoro di astrazione e di generalizzazione; onde si può avere la rappresentazione del contenuto totale (più o meno distinto) sovrapposta a quella delle diverse parti costitutive; ossia si può avere la pluralità nella unità, nel senso di una raccolta della prima entro la seconda; e così sorgono le collettività, nelle quali si presentano collezioni di unità, divenute esse pure delle specie di unità con caratteristiche nuove, che ritengono in parte degli elementi plurimi che vi sono compresi, e in parte della loro riduzione ad un insieme riunito nuovo, divenuto da eterogeneo omogeneo.

Abbiamo già parlato più addietro di collezioni di I e di II specie. Qui ora ci basterà ricordare di passaggio che, come per una specie di processo sintetico si creano queste collezioni di unità, le quali rientrano sempre nel campo del finito, così si potrà sempre in esse andare analiticamente rintracciando gli elementi o unità costitutive in cui si disciolgono. Ma resta ad ogni modo il fatto che ogni collezione, per quanto complessa, tende a costituirsi con un processo rapido e abbreviativo in un insieme finito, il quale, giusta la espressione stessa di « insieme finito », tende a sua volta a costituirsi in una specie di unità. Per tal modo si rende più facile e immediata la rappresentazione e il concetto di una tal collezione, e perciò più abbreviato e spedito il farle corrispondere il relativo nome, segno, o numero. Naturalmente ad ogni nuova unità così costituita compete un segno abbreviativo diverso, il che si ripete pure per ogni nuova combinazione di tali unità complesse in una superiore collezione, p. es. in una collezione di II specie, nella quale si riconoscerà ancora la tendenza all'aggruppamento in un insieme unificato, sebbene con maggior difficoltà pel maggior numero di elementi e di combinazioni di questi elementi. Vale la pena di rife-

rire per esteso l'esempio, più su riassunto, riportato dal Vecchietti: « Nel procedimento primitivo a una collezione di I specie (ogni collezione chiusa, finita, di cui la caratteristica è direttamente, simultaneamente percepibile) si aggiunge un'unità (e così si ha la formazione per addizione, che può essere controllata e riveduta mediante la operazione del *contare*, cioè dell'affermare successivamente le caratteristiche di tutte le collezioni contenute in quella esaminata, e ciò per unità e gruppi di unità); la prima collezione diviene indistinta, e subentra alla sua immagine il sentimento della sua caratteristica, al quale aggiungendosi l'affermazione di un'ulteriore unità, si forma il sentimento o intuizione (qui intuizione non è intesa come forma pura, ma come una rappresentazione imprecisa, come qualche cosa che non è più soltanto sentimento e che non è ancora rappresentazione, sebbene non esclusivamente fantastica, ma in rapporto diretto e rapido con parte o con tutto l'obbietto intuito) della caratteristica della nuova collezione; e così di seguito. Sarebbe difficile distinguere fra loro le intuizioni corrispondenti a tutti i vari numeri. Con la numerazione il processo psicologico è semplificato. Facciamo un esempio, 324756891: si ha dapprima nient'altro che l'intuizione vaga di un numero molto grande, e l'immagine visiva o auditiva del segno. Ma se ci sforziamo a *pensare* questo numero cioè a precisarlo nella nostra intuizione, a distinguere l'intuizione di esso da quella di altri, noi scomponiamo: 324 milioni, cioè una collezione di 324 unità, nella quale l'unità è il milione (il quale però è un milione di unità): e che cos'è il milione? Un migliaio di migliaia; e il migliaio una decina di decine di decine, e la decina una coppia di cinque; per la cinquina finalmente interviene l'immagine, come una mano aperta o qualche cosa di simile. Con l'intuizione della decina noi formiamo l'intuizione del centinaio e successivamente delle unità superiori; così con poche intuizioni riusciamo a individuare tutti i numeri ». In altri termini con l'intuizione dell'unità

si giunge a quella della decina, con questa a quella del centinaio, e così di seguito sino a quelle centinaia di milioni; ma va aggiunto che ciò non sarebbe possibile ove la decina non divenisse a sua volta una specie di unità per sè stessa e per la costituzione del centinaio, pur non perdendo il ricordo della caratteristica propria della decina, e così non fosse del centinaio, del migliaio, ecc., e del rapporto che si stabilisce ogni volta tra questi gruppi di unità.

E' chiaro adunque che non solo nella unità, ma ancora nelle collezioni di I e di II specie, come pure nella operazione del contare e nella numerazione in genere, si rivela la tendenza del pensiero a ridurre i varî elementi all'unità, con un atto sintetico; e ben ha ragione il Vecchietti di affermare che persino nella semplicissima operazione dell'addizione « uno più uno, due », « dopo la prima unità se ne è percepita un'altra, e che ora si percepiscono o almeno s'immaginano tutte e due insieme... poichè la seconda unità non potrebbe essere concepita come *seconda* se non si tenesse presente anche la prima, se non si concepisse cioè che son già *due* unità ». Quindi per Vecchietti non solo l'unità, ma anche la duplicità « si presenta nella memoria e nella percezione direttamente »; e noi aggiungiamo che, se tali elementi sono dati irriducibili della coscienza, tali divengono o tendono almeno a divenire anche elementi più complessi riducibili a loro volta a collezioni di quegli elementi semplici e ad elementi unici essi stessi. Questo si dimostra anche mediante la cosiddetta invarianza del numero malgrado la permutazione fra di loro delle unità che lo costituiscono: disposte le unità di una collezione in serie lineare, si posson permutare fra loro due unità successive, senza alterare il numero della collezione, sia pure questa composta di due sole unità: il che fa attribuire un carattere di unità, di identità, di invariabilità a quella collezione.

Abbiamo più sopra detto che caratteristiche fonda-

mentali di ciò che è finito sono l'essere esso un dato rappresentabile o un residuo rappresentativo determinato qualitativamente e soprattutto quantitativamente, e riducibile il più direttamente possibile ad un elemento uno ed unico nella coscienza, per la unità di coscienza. Ora, se queste condizioni sono soddisfatte nelle scienze matematiche, e soprattutto nei fondamenti loro, dovrà concludersi che appunto in esse non può prescindersi dal « finito ». — Abbiamo veduto come nella scienza dei numeri si debba necessariamente far capo al concetto di unità direttamente e indirettamente, anche quando si tratti di collezione. Difatti il finito implica il numero, e questo l'unità. A sua volta questa implica l'idea di quantità come fondamentale. E' quindi necessario indagare empiricamente quali siano i fondamenti dell'idea di quantità e di numero in generale.

Dice il Masci¹⁾ in un suo lavoro che, in confronto delle scienze sperimentali le quali studiano principalmente le qualità degli oggetti, le matematiche si occupano della « quantità ». Ed in generale una scienza raggiunge una sufficiente generalizzazione comprensiva quando procede alla valutazione quantitativa dei fenomeni, come fu dell'acustica e di altre discipline: allora essa diviene anche deduttiva. Il carattere speciale della matematica sta però non solo in ciò, ma ancora nel fatto che essa, a differenza delle scienze sperimentali, non studia nei fenomeni i rapporti causali; considera il rapporto logico di principio e conseguenza, ma non quello naturale di causa ed effetto. Per Kant esistono due sole idee matematiche « a priori », due intuizioni anzi, tempo e spazio. Hobbes taccia la matematica, colle sue definizioni e gli assiomi, di nominalismo: Locke si pone da un punto di vista empirico: Berkeley nega una differenza tra entità matematiche e rappresentazioni;

¹⁾ *Sulla natura logica delle conoscenze matematiche*, Contribuzione alla teorica della conoscenza, Roma 1885. — V. anche dello stesso: *Forme dell'intuizione*, Chieti 1881.

Hume accenna a ritornare all'opinione dei nominalisti. Per lo Stuart Mill la matematica non ha carattere di necessità e certezza assoluta, è anche essa una scienza sperimentale, deduttiva sì, ma anche induttiva. Il punto e la linea non sono che « rappresentazioni limiti », a cui si giunge dall'esperienza mediante l'astrazione: le definizioni e gli assiomi, che sono i principî delle deduzioni, sono in fondo delle verità d'esperienza. In ciò d'accordo con lo Spencer, crede impossibile pensare qualche cosa, quando manchi la esperienza della cosa; e la certezza di un assioma non può derivare che dalla natura ed estensione dell'esperienza da cui proviene, come da questa proverrebbe per lui anche il principio di contraddizione. Tempo e spazio, come rappresentazione, sono finiti, ma sempre in atto di negare il limite. Nella geometria è per il Mill tutto un procedimento costruttivo, dalle definizioni e assiomi alle dimostrazioni. Nella scienza del calcolo, la cosa è un po' diversa; anzitutto si presenta il concetto del « numero ». Leibniz lo chiama un'idea adeguata, chiara di per sè, non definibile. Newton lo dice il rapporto d'una grandezza qualunque a un'altra omogenea presa come unità (ecco qui far capolino, come del resto in ogni definizione del numero, il concetto di unità, di idea semplice, di elemento irriducibile ecc.); per altri è un predicato e quindi una qualità, separata dagli oggetti; il che però ci porta lungi dal criterio quantitativo, quantunque vi si accenni vagamente parlando di astrazione e separazione dagli oggetti; per altri è una qualità arbitraria soggettiva o è invece quello che c'è di più oggettivo in una cosa; per altri ancora è un segno, tenuto conto che le unità sono segni corrispondenti agli oggetti e che lo zero è il segno dell'assenza degli oggetti, o è la forma vuota della distinzione. In generale si ammette però che le proprietà dei numeri non sono proprietà delle cose, e però non vi può essere idea di numero se non vi è quella di « unità ». Invece il Mill considera il numero come una proprietà delle sensazioni delle cose; l'unità è

un tutto di sensazione (ottenuto astraendo dalla qualità) internamente indiviso, il numero un tutto di sensazione internamente diviso. Osserva qui il Masci che però si può comprendere in una unità anche quello che è dato come diviso nella sensazione (un albero, ecc.), onde la necessità di ammettere da una parte per l'unità un atto singolo di coscienza, dall'altra un atto che è un pensiero, essendo le cose numerabili solo perchè e in quanto il pensiero le considera esso come unità, facendo oggetto proprio le transizioni negli stati di coscienza, non come risultato d'impressioni, ma come un complesso di singoli atti di pensiero, e manifestandosi esso come potenza di limitazione di un continuo. Pel Masci, adunque, il numero è di natura formale, eccitata dalla sensazione, e però divenuta logica: nè è (come parrebbe in Hamilton) derivato dall'idea di tempo, perchè è appunto la grandezza nel tempo che è concepita mediante il numero e non viceversa; invece son gli elementi discreti che si fissano nel concetto di unità, e i complessi di unità nel concetto di numero, notandosi bene che si tratta sempre di concetti.

Il Mill, a proposito del numero, nota una condizione fondamentale, che cioè tutti i numeri siano formati di unità perfettamente eguali tra loro, $1 = 1$: se non che osserva il Masci che, eliminando tutte le differenze, non si ha più il numero o la molteplicità ma l'unità, essendo la molta somiglianza una condizione sfavorevole al numerare, pure essendo una certa similitudine necessaria. Questo il Masci spiega così: «... sebbene i numeri formino anch'essi una serie, la ragione della identità e distinzione non si può cercare nella serie, ma viceversa la ragione della serie va cercata nella qualità degli elementi, e però essa non ci può spiegare quella similitudine e quella distinzione, che abbiamo visto essere proprietà egualmente essenziali delle unità elementi dei numeri ». — Ma se il numero è misura della grandezza e quindi fa pensare alla grandezza discreta e questa a sua volta alla separazione delle unità, dice il

Maschi che « però, siccome la grandezza non c'è senza la continuità, nè questa senza la negazione o risoluzione della discrezione, siccome la grandezza non è determinata se non è numerata e quindi discreta, così ambedue, tanto la continuità quanto la discrezione, sono essenziali al concetto di grandezza. Perciò Aristotele ha detto, che il ποσόν è tanto il διωρισμένον che il συνεχές ». Se però tale è la grandezza, e se questa, secondo un'opinione diffusa, è continua per la geometria e discreta per l'aritmetica, resta nondimeno assodato anche per il Masci quello che più volte facemmo rilevare, che cioè per il concetto di numero si deve anzitutto ammettere l'unità, nel senso dell'atto singolo di pensar l'essere privo di qualità, sia pur logica, pur concedendo che il contenuto oggettivo dell'idea di numero deriva dall'esperienza e perciò dalle grandezze della sensazione.

La teoria del Wundt¹⁾, secondo cui le verità matematiche sono vere e reali in sè stesse e derivate mediatamente dalla esperienza perchè ottenute non da induzioni della esperienza medesima ma da induzioni su astrazioni della esperienza, non appaga completamente il Masci, che trova anche in quella un fondamento troppo empirico, in quanto le verità matematiche sarebbero per essa ancora provate dalla induzione. È vero — egli dice — che il calcolo aritmetico, nelle sue operazioni fondamentali, è nato dalle percezioni degli oggetti separati e del loro aggruppamento; che la misura delle aree si cominciò risolvendo il quadrato in tanti quadrati minori, che ai fanciulli s'insegnano empiricamente gli effetti della diversa disposizione degli elementi di un numero invariato per mezzo della differenza di impressioni sensibili e della identità del risultato; che la prova della somma degli angoli interni di un triangolo eguale a due retti fu fatta in origine per ciascuna specie di triangolo, e che forse non diversamente

¹⁾ *Logik*, II, etc.

avvenne pel teorema pitagorico, per la scoperta dei numeri irrazionali (irriducibilità della diagonale d'un quadrato ad un numero intero, quando il lato è misurato da un numero intero), per le dimostrazioni geometriche, ecc: è vero tutto questo dal punto di vista psicologico, ma non è sufficiente pel Masci alla formazione delle idee delle entità matematiche, per le quali non son dunque bastevoli nè la osservazione, nè la induzione e l'astrazione, ma concorrono l' « intuizione », la « deduzione », e la « analogia perfetta » (specie di deduzione essa pure). Per lui p. es. l'astrazione stessa è un procedimento che si riscontra bensì nelle matematiche ma nella sua parte negativa, in quanto il numero non è un residuo di percezioni reali, ma è già un concetto, e tutto si riduce pel numero alla stessa funzione del numerare e alla successione e nesso delle appercezioni. Il numero — continua il Masci — per un procedimento spontaneo si isola dalle cose, pur conservando un valore oggettivo, e diviene un'entità a sè; non è sensazione, ma un concetto: il numerare è una sintesi o una analisi meramente formale, nella quale il pensiero non tiene nessun conto della qualità, nemmeno di quella delle grandezze intuitive, e però diviene un pensare estrinseco e meccanico. Così inteso, il numero cade nel campo della logica pura e non ha per oggetto che l'attività formale del pensiero. « La certezza dei teoremi del calcolo non dipende se non che dall'esattezza del pensiero, e la necessità loro non deriva dall'esperienza esterna ». Quindi le verità fondamentali dell'aritmetica ordinaria, cioè gli assiomi delle eguaglianze e le definizioni dei numeri, si fondano, secondo questo modo di vedere, esclusivamente sullo schema, senza qualità, della funzione di « sintesi » e di « analisi » del pensiero puro, formale: insomma si tratta sempre non di esperienze ma di funzioni del pensiero; così, per esempio, l'Algebra è la scienza delle funzioni ossia dei modi di formazione dei numeri in generale, e dei rapporti delle quantità, astraendo dal concetto di « valore » che è invece essenziale all'aritmetica.

In generale il calcolo, secondo l'espressione stessa del Masci, è « la logica formale della quantità » : non può formularsi indipendentemente dalla esperienza, è vero: ma « a differenza delle relazioni che interessano la qualità e l'essere delle cose, p. es. quelle di sostanza, di causa, ecc., le quali sono incapaci di darci una conoscenza qualunque indipendentemente da un'intuizione empirica corrispondente, le relazioni numeriche, quantitative, si possono esercitare su mere funzioni, su dati di natura esclusivamente logica ». Quindi ecco derivare il concetto, che, nel caso del differenziale, dei due concetti che informano quest'ultimo, il valore e il limite, il più esatto sia quello di limite che meglio corrisponde all'idea che il soggetto del numero sia una funzione, e quindi una funzione logica e un criterio che considera una grandezza nel momento di sparire.

Dunque il numero è una funzione logica, e propriamente un concetto, concetto quantitativo, che implica l'unità: di per sè è una entità indipendente dalla esperienza ma che in origine ebbe fondamento nella esperienza stessa. È vero che, con la aggiunta della nozione di numero immaginario, l'idea di numero « acquista una nuova denotazione, quella delle grandezze continue a due dimensioni », e che le « significazioni o applicazioni geometriche delle idee dei numeri sono posteriori, e che sarebbe impossibile descrivere l'origine psicologica di queste idee delle rappresentazioni geometriche »; ed è pur vero che, essendo i numeri prodotti propri del pensiero, « tutti i teoremi del calcolo, dal sistema di numerazione alle più complicate equazioni, si possono trovare e provare sviluppando ed analizzando la funzione generatrice, cioè dire a priori »; ma, anche volendo togliere del tutto dall'idea di numero la natura speciale della cosiddetta intuizione e grandezza spaziale (ed anche temporale), nelle quali non ci sembra si possa astrarre dal sensibile e dalla qualità, resta assodata in modo certo la natura quantitativa di essa e quindi la riduzione al concetto di unità. Lo stesso Masci ci avverte essere l'unità non una data sensazione

continua, ma « l'atto di pensare un continuo e di *limitarlo*, di unire e distinguere insieme *in un tutto* di sensazione ». E per mostrare il valore quantitativo del numero, che lo rende indipendente dalle cose del mondo esterno, aggiunge che ogni quantità è quantità di qualche cosa, ma che però le qualità primitive non possono spiegarsi quantitativamente. Neppure la Logica può identificarsi col calcolo; e, quanto alla qualità, essa « è il limite che il ragionamento matematico non può superare; l'essenza delle cose non è il numero.... »

Con ciò ci sembra risulti abbastanza evidente che il concetto di numero implica la quantità e quindi l'unità, astraendo dalla qualità, dalla causalità, ecc.: inoltre nel numero è la limitazione del continuo, e nella unità la riunione e la distinzione in un tutto di sensazione (Masci).

Queste considerazioni, e qualche altra che aggiungeremo per nostro conto, ci sembrano sufficienti per concludere che le idee fondamentali della scienza dei numeri non tendono che ad ottenere la determinazione del « finito » per eccellenza, del numero, e quindi dell'unità, (intendendosi non l'uno assoluto, ma la individuazione di qualsiasi contenuto ridotto ad un astratto formale di quantità), non potendosi in nessun caso uscire da quel campo chiuso che è il concetto quantitativo. D'altra parte ci sembra che questo concetto quantitativo non possa assolutamente prescindere da un contenuto rappresentativo almeno originario, quali che siano le condizioni che hanno operato la trasformazione di esso in una necessità di pensiero.

Se io considero un oggetto, esso sarà per me veramente « un oggetto » (a parte la distinzione logica operata dal pensiero tra soggetto e oggetto entro il contenuto empirico originario indifferenziato), quando potrò raccogliere la somma di impressioni sensoriali, che mi provengono da esso, in un insieme, nel quale, pure riapparendo i diversi elementi costitutivi, si presentino questi elementi non più come tali, ma come una nuova impressione più complessa e però

unica, sommazione di parti e insieme unità, psicologicamente fusione associativa (assimilazione) con una sintesi nuova. Allora gli elementi divengono più trascurati e indistinti, sebbene sempre presenti, ed emerge invece la impressione risultante dall'unione di essi. Questa impressione totale unica è una specie di individuazione di un insieme riunito. In un mio precedente lavoro ¹⁾ io ho cercato di mostrare come nelle sensazioni visive, e in genere nel fatto elementare della sensazione, si diano delle condizioni psicofisiche per le quali elementi sufficientemente vicini (per noi) tra loro si associano per tal modo nella impressione sensoriale, da costituire insieme riuniti delle fusioni e dei rapporti intimi. Così due elementi affatto contigui, e però nettamente e vivacemente distinguibili, costituiscono bensì due elementi, ma anche « una » impressione risultante dal rapporto fra quei due elementi. Quanto più affini e contigui questi ultimi, pur rimanendo distinti, tanto più intimo il rapporto, quindi tanto più simultanea ed « una » la impressione di entrambi, e la loro associazione nel processo percettivo. Nella rappresentazione che ne succede, si ha in questo caso già in germe la « unificazione », la « unità », che verrà poi affermata intellettivamente. In quel lavoro ho pure modestamente cercato di provare che alcune cosiddette illusioni ottiche si devon riferire a questo fatto, in quanto è difficile separare in figure geometriche di piccole dimensioni certi elementi qualitativi, presentandosi essi nel sensorio connessi in un rapporto difficilmente solubile. Ora questo processo di fusione e di unificazione, di cui le condizioni si presentano già nel campo sensoriale, si rinnova in tutti i processi ulteriori e superiori intellettivi relativi alla conoscenza.

È evidente che, se io non potessi avere la rappresentazione del triangolo con la comparsa quasi simultanea delle sue linee e della superficie da esse limitata, sia nella

¹⁾ *Ricerche sperimentali intorno alle illusioni ottico-geometriche, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1909.

percezione diretta che nella memoria, difficilmente potrei averne l'idea ed il concetto; ed i giudizi e le definizioni relativi ad esso non sarebbero più ben possibili. Il confronto successivo delle impressioni parziali non può giovare alla conoscenza di quel triangolo se non a patto che si faciliti il confronto stesso rendendolo più immediato. Nè la memoria potrebbe conservarcene intero il ricordo, ove non solo le impressioni parziali non fossero intimamente associate fra di loro, ma non lo fossero ancora le impressioni totali successive sino all'istante del riconoscimento. — Ora, per questa condizione generale di fusione associativa, avviene appunto che tre rette, le quali si incontrano limitando tra loro uno spazio chiuso, costituiscano un insieme rappresentativo che è il triangolo, una specie di unità « sui generis », la quale, pure serbando vive le tracce delle differenze qualitative, si costituisce in un insieme riassuntivo, in una specie di « quanto », anzi e meglio in un « tutto ». Nell'idea del triangolo, se pure si è raggiunta una maggiore generalizzazione e una minore concretezza, ossia una maggior perdita o negligenza di particolari, si è d'altra parte, anzi appunto perciò, meglio semplificato l'insieme degli elementi parziali, e meglio raccolto e consolidato in unità. Nel concetto si ha ancor più semplificato e unificato quell'insieme, sì da poterlo rapidamente richiamare per mezzo di un simbolo che gli si fa corrispondere. Ogni funzione intellettuale mira in fondo, con modi suoi propri, a unificare in una specie di centro visivo intellettuale dei dati prima dispersi, e a raccogliere in un tutto omogeneo ciò che prima era eterogeneo. Quanto più il residuo antico di rappresentazione viene assorbito dalle attività superiori della coscienza, quanto più esso viene intellettualizzato e spogliato dalle particolarità concrete ossia reso generale ed astratto, tanto più esso viene a corrispondere all'unità di coscienza e si presenta immediato ed unico, sebbene in esso gli elementi particolari costitutivi non si perdano, ma si associno più intimamente sino a canfondersi in apparenza.

L'unità, che già nel campo sensoriale comincia a rendersi possibile attraverso tutta una completa serie di condizioni psico-fisiche, diviene realmente tale come concetto logico. Come tale, essa diviene anche una esigenza più frequente: così non solo l'intelletto la ritrova in quegli insiemi di elementi che erano già contigui e meglio associati nella rappresentazione originaria; ma di essa, per così dire, investe anche talora elementi o dati o fatti meno vicini tra loro, e li congiunge in un nesso associato fortissimo, in una unica totalità. Ogni concetto ha il suo proprio contenuto onde si distingue da ogni altro; e sotto questo rispetto esso è sempre riconoscibile per caratteristiche qualitative; ma in quanto ad esso è, per modo di dire, applicato dall'intelletto stesso lo schema dell'unità, esso diviene allora più specialmente « un concetto », separato con un criterio quantitativo. Abbiamo parlato di schema: con ciò non intendiamo alludere a pure forme intellettive, ma vogliamo dire che l'atto di pensiero in questione diviene sempre più ridotto e può considerarsi come uno schema solo nella sua applicazione ad un dato contenuto empirico. Nè per tal modo si è soppressa la qualità, chè anzi la unificazione è, di per sè stessa e in rapporto al dato unificato, una accentuazione in astratto della qualità.

In generale si presenta nella coscienza la tendenza a raccogliere elementi diversi in una quantità, quasi per un desiderio di possesso determinato, e poi a comprendere questa quantità in un tutto solo, in una unica totalità. Il contenuto della coscienza serba sempre questo carattere di unica totalità e si afferma conservandosi e ripetendosi come unità di coscienza. Ma ciò non è sufficiente a far comprendere perchè questo carattere si traduca nel concetto irriducibile di « unità ». Vedemmo già che questa fu da molti messa in relazione con l'« atto unico di pensiero ». Quando anche ciò fosse del tutto vero, non appagherebbe completamente; giacchè l'« uno » è tale nel confronto colla

pluralità, e quindi l'unità presuppone la pluralità non solo, ma la numerazione della pluralità: « uno » è tale appunto perchè esistono « due », « tre », ecc. Ora « uno », « due », « tre », ecc., sono necessari all'idea di « uno » non in quanto sono addizioni di una o più unità all'unità originaria, ma in quanto sono dei dati qualitativamente diversi; perchè altrimenti si ricadrebbe nel circolo vizioso di spiegare l'unità con l'unità, ossia con sè stessa, con nient'altro che con l'identità, la quale a sua volta presuppone l'unità. Per poco che si tenti di rappresentar mentalmente la serie dei numeri sino al 10, per esempio, noi li collochiamo in una data direzione, in un dato ordine, in disposizione seriale, con dei segni distinti figurati e diversi, con distanze eguali e proporzionali, in modo da riconoscerli ciascuno per sue proprie speciali caratteristiche. In generale una tale rappresentazione si fa mentalmente da sinistra verso destra, in direzione orizzontale, con carattere lineare. In questa serie si osservano varie cose, e soprattutto due fatti importanti, differenze qualitative tra i singoli elementi, e caratteri di identità per cui essi si riscontrano come eguali o equivalenti. Le differenze qualitative stanno nel diverso posto, figura, segno, colore; l'identità può essere nelle dimensioni, nelle distanze, nell'aspetto complessivo generico (astratto) di ciascun elemento. Se le differenze di posizione son sufficienti a far distinguere ciascun elemento da ciascun altro, le altre differenze di figura, ecc. potranno esser sostituite dalla identità. Ad ogni modo occorre qualche cosa che contraddistingua ciò che per altro verso va reso identico a qualche altra cosa. Di una lunga serie di siffatti elementi, solo i primi, in un certo numero, saranno tutti simultaneamente coi loro caratteri distintivi presenti alla coscienza; gli altri, i più remoti o i venuti dopo nella rappresentazione, costituiranno un indistinto remoto.

I primi, dicemmo, saranno più facilmente e più a lungo conservabili. Ma essi non sono per ciò soltanto numerabili. Per divenir tali, occorre anzitutto che mentre uno si pre-

senti distinto e unificato nella coscienza, se ne presenti quasi insieme un altro che ne differisca per pochi particolari qualitativi, ma che appaia esso pure unificato e distinto, e che perciò, per riprodurre identicamente l'altro, salvo poche differenze necessarie alla separazione, appaia nello stesso tempo quello e un altro, identità e contraddizione. Perciò l'idea di unità e quella di numero non ci sembrano ben separabili; giacchè se il numero risulta da unità, la unità di per sè sola non ci pare possa avere quella evidenza immediata che solo le può esser conferita per mezzo di contrasti e contrapposizioni ad altre unità, e di rapporti con queste separatamente, o con pluralità in generale. Un oggetto può, è vero, comparire unificato, anzi unico nel processo percettivo; ma perchè il concetto che ce ne facciamo sia di « uno », occorre anzitutto che esso sia ben isolato nella coscienza, in contrasto immediato col campo generale e più indistinto (a partir dal centro visivo) della coscienza, poi che esso sia oggettivato e quindi meglio voluto, posseduto, determinato quasi come un contrapposto alla coscienza a cui però è intimamente riferito, apparendo quasi come un riflesso della sua attività individuata, una seconda personificazione dell' « io », il « tu ». Queste opposizioni apparenti tra individuazioni identiche, sebbene con contenuto qualitativo diverso, e però equivalentisi nella continuità dell'attività della coscienza, possono in parte spiegarci l'uno e il molteplice.

Così, per scendere ad un esempio, è noto che i bambini e le persone incolte in generale numerano gli oggetti, sino ad una quantità limitata, contandoli sulle dita, e precisamente stendendo successivamente un dito per volta, e raggruppando e sommando poi mentalmente le unità rappresentate da tutte le dita: ora in questo procedimento viene ogni volta isolato un dito, che si considera come un dato unico, a sè, poi lo si ricorda e contrappone alla impressione (tattile, visiva, muscolare) che viene dal dito seguente, il quale ha una posizione diversa e dà sensa-

zioni qualitativamente diverse; poi si affermano, riunite in un insieme, sensazioni provenienti da questo secondo dito e si procede ad una nuova analoga individuazione, che, confrontata con la prima, significa, « ancora la prima ma diversa; ossia un'altra volta la prima, ossia una seconda »; e così via, finchè poi si ricordano non solo la prima unità, la seconda, ecc., ma la precedenza dell'una e la successione delle altre, indi il rapporto tra la prima e la seconda, tra le due prime e la terza oppure tra la prima e le due seguenti, ecc.; tanto che, per esempio, se (come pensa Vecchietti) l'unità e anche la dualità, e sino a un certo punto la triplicità, posson ritenersi come immediatamente presenti ed evidenti di per sè, come facilmente ricorrenti insieme nella coscienza, un numero un po' più grande, ad esempio il 5, può pensarsi come un $3 + 2$ o più raramente come un $1 + 4$, o come un $2 + 2 + 1$, ecc., e il 10 come $5 + 5$ ossia come $(3 + 2) + (3 + 2)$, e così via, venendo qui in soccorso anche il ricordo del numero delle dita di ciascuna mano e di entrambe le mani insieme, il cui uso è familiare alla coscienza. In questa enumerazione di elementi, se i contrasti qualitativi servono a separarli fra di loro, il concetto di unità quantitativa invece li identifica: così le dita corrispondono, nel citato modo di contare, a dei segni diversi; ma il pensiero per ciascuno di questi ripete « uno », e in quanto fa ciò, astrae dalle qualità o le riassume in un tutto unico per ciascuno identico. Che la dualità e l'unità siano di per sè non dimostrabili ma evidenti (purchè tuttavia in continuo rapporto con pluralità più complesse se ben meno afferrabili), può apparire anche dal fatto che esse sono inevitabili e quindi meno richiedono il confronto successivo e tanto meno le operazioni, siano pure elementari: chè non solo i dati della sensazione si presentano già in un tale rapporto immediato con dati diversi od opposti, ma ancor meglio nel pensiero le opposizioni dialettiche e la loro risoluzione si presentano come necessità contemporaneamente presenti. Naturalmente si comprende

qual parte abbiano inquesti processi di pensiero la funzione appercettiva e la memoria, destinate ad elevare nella coscienza il tono dell'oggetto rappresentato, la sua totalità individuata, e la ripetizione ritmica successiva per la sua conservazione.

Ma, se nell'aritmetica ordinaria si ricorre, in fondo, a concetti e a idee ben definite, anzi le meglio definite, come quelle che poggiano sul numero e l'unità, e derivano da rappresentazioni che sono appunto le più determinate possibili, anche le operazioni e i processi mentali elementari di combinazioni, agglutinazioni, ecc., che si stabiliscono tra queste entità estremamente (infinitamente, potremmo dire, intendendo con ciò una tendenza inesauribile) definite, serbano pur esse il carattere di processi semplici, famigliari, ben determinati, conformi alle più profonde abitudini mentali nel riguardo quantitativo determinativo.

Ricorderemo con G. F. Lipps ¹⁾ che tanto i numeri, quanto le operazioni eseguite su di essi, e i numeri risultanti da queste operazioni, corrispondono a forme di pensiero, anzi alla forma seriale del pensare, alla « Reihenform des Denkens » per tal modo che, presupposta la presenza di oggetti nella coscienza come fondamenti dell'attività del pensiero, « Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein vorhanden sind und, da sie anders nicht vorhanden sein können, von einander verschieden sind; anderntheils.... dass das Denken in dem Erfassen des Vorhandenseins und in dem Erfassen der Verschiedenheiten der Objecte sich bethätigt, und zwar im ersteren Fall in Folge des reihenförmigen Fortschreitens von einem Apperceptionsakt zum anderen die Merkmale der Reihenform, im letzteren Fall in Folge des logisch begründenden Fortschreitens die Beziehungen des Grundes zur Folge erzeugt ». Per questo autore i fondamenti delle operazioni sui numeri sono nella natura stessa del pensiero, la cui attività si svolge su oggetti, su contenuti di coscienza:

¹⁾ *Untersuch. üb. d. Grundlage d. Mathematik*, Wundt's Philos. Stud., Bd. XI, S. 254 ff.

le forme principali di tale attività sono, sotto questo riguardo, il concepire riuniti in serie successive ed il raggruppare logicamente i diversi contenuti di coscienza appercepiti e resi oggetti di pensiero, secondo il nesso tra principio e conseguenza. Egli afferma il carattere di necessità e di validità universale della serie normale, la quale deve cominciare con un primo membro, essere omogenea e pensata come proseguibile (non proseguita) interminabilmente, ossia come una serie fissa chiusa dai limiti della memoria, ma ritornante un illimitato numero di volte, cioè un numero di volte che trascende la raccolta memorata. L'operazione fondamentale è il numerare, procedendo da un membro iniziale o in avanti o all'indietro, al di sopra degli intervalli eguali della serie numerica: il procedere in avanti è l'addizionare, all'indietro è sottrarre. — Nell'addizione è una legge di associazione, che riposa sulla proprietà omogenea della serie, e ve n'è una di commutazione. Lo zero non è un membro precedente a quello iniziale della serie, ma è un « numero improprio », un segno ausiliario, non un posto nella serie numerica. Siccome però le operazioni numeriche non si limitano a numerare e contare la serie membro a membro, così è possibile concepirla come una serie di intervalli, semplificando il procedimento e contando intervallo per intervallo, onde hanno origine due nuove specie di operazioni, il moltiplicare e il dividere, che includono pure la possibilità della commutazione. Un concetto ampliato di numero presuppone simboli in luogo dei su citati membri della serie rappresentati dai numeri interi assoluti: così sorgono dei simboli che si posson considerare come i numeri generali. Si danno allora i numeri negativi, frazionari, e irrazionali, risultanti da combinazioni dei numeri interi assoluti mediante le operazioni del sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere. Per l'autore tali numeri generali, se non trovano la loro applicazione in problemi di geometria, meccanica, o analisi, perdono il valore pratico e rimangono simboli privi di contenuto. — Sicchè, in fondo, le basi e le operazioni elemen-

tari della matematica presuppongo serie di elementi irriducibili, diversi qualitativamente, equivalentisi quantitativamente, indipendenti, facenti capo all'unità, che può esser relativa, ma che anche in tal caso fa metter capo sempre ai medesimi concetti fondamentali, risultando anche il numero generale da operazioni identiche sui numeri medesimi.

Abbiamo visto alcuni fattori, che non ci sembrano trascurabili, dei concetti di unità, di numero, di enumerazione, del contare e delle più semplici operazioni aritmetiche. Ora si tratta qui sempre di processi di pensiero, i quali hanno lo scopo di determinare valori quantitativi. — E qui viene in acconcio una considerazione sul concetto di « quantità ». A noi non sembra che possa darsi quantità indipendentemente dal concetto generale di relatività. Una quantità deriva da una raccolta di elementi, ma questa non è ancora una quantità. Il « molto » e il « poco » sono tali rispetto ad un criterio di sufficienza, e questo è in rapporto a un ideale, anzi ad una esigenza, ad un bisogno. Il « quanto » è « quanto per me », non in astratto. Il dare di un oggetto o di una serie di oggetti un giudizio per rispetto alla quantità, equivale a fare un apprezzamento non delle proprietà dei medesimi ma del rapporto in cui essi si pensano con un criterio di soddisfazione. In generale, nella sua origine empirica, il « quanto » equivale a un contenuto in quanto tale, ed il criterio quantitativo si fonda sul valore di maggiore o minore sufficienza attribuito ad esso. Ma « sufficienza » è « sufficienza per me »; il « poco », il « bastante », il « molto », il « troppo » sono gradi del « quanto », e sono apprezzamenti del tutto soggettivi. — Ora il numero di per sè se non è il quanto, è però una misura di esso, una applicazione di uno schema ad un contenuto. Per ciò noi riteniamo che il numero non indichi o non indicasse in origine direttamente la quantità pura, ma servisse a determinarla pei bisogni della coscienza. D'altra parte, per successivi processi di generalizzazione e di astrazione, il concetto quantitativo si andò modificando sino a

divenire una determinazione numerica delle grandezze, ed il numero un simbolo o segno corrispondente. Naturalmente la determinazione quantitativa non è così totalmente lontana da quel criterio di sufficienza, che non corrisponda ad un bisogno di render più definito ed afferrabile (possedibile, se pur sotto forma diversa), cioè di limitare per la coscienza ciò che in essa si presenta. — Se così il criterio quantitativo mira ad una limitazione, e questa include in parte l'idea di estensione, dovremo un poco considerare il limite, il punto, l'istante, come elementi determinati e definiti, in origine, empiricamente.

Ricorderemo qui di passaggio che nel problema infinitista il « limite » per alcuni è ammesso come esistente e noto, oppure è un'esistenza legata a certe proprietà di numeri costituenti la successione infinita. La circonferenza così può considerarsi come il limite di una successione infinita di poligoni di un numero di lati ogni volta raddoppiato. Ora se la cosiddetta « intuizione spaziale » dei matematici ci aiuta ad ammettere l'esistenza del limite o a negarla, la dottrina aritmetizzante ricorre ad un puro segno, ad un limite fittizio (che però, per esempio per il postulato di Dedekind si può far corrispondere ad una grandezza), al quale pertanto si attribuisce un contenuto ed un valore. Comunque la si consideri, la nozione di limite presuppone il limite empirico; secondo Du Bois-Reymond essa si riduce alla enunciazione del fatto intuitivo per il quale il limite è ammesso. « Se in simili dimostrazioni (dell'esistenza di limite) — egli dice — si ritorna sempre più alle idee elementari di cui esse sono formate, e a ciascuna conclusione ci domandiamo di nuovo se essa è davvero soddisfacente, scopriamo allora in ciascuna di esse almeno un punto che corrisponde a una *lacuna* nella successione delle nostre rappresentazioni, dove senza transizione qualche cosa sopravviene di cui non si cerca mai neppure di dimostrare l'esistenza. Questo qualche cosa è il limite stesso. Per vicino a noi che esso sia posto, un abisso insondabile

ce ne separa sempre; la continuità delle rappresentazioni è interrotta in qualche parte. Si attenua questo fatto dicendo: passare al limite, per esprimere il salto che si fa al di sopra di questo abisso; ma questa parola indica bene a qual punto si ha la coscienza di una lacuna ». Inoltre, se il limite ha questo fondamento empirico, esso è ancora qualche cosa di più determinato. Difatti « noi — prosegue lo stesso autore — non possiamo immaginare sotto il limite ipotetico nient'altro che una quantità lineare rappresentabile, ossia, ciò che raggiunge benissimo questo scopo, una lunghezza. Un limite numerico astratto, è un modo di parlare sprovvisto di senso; noi non facciamo in alcun modo torto alla generalità della nostra ricerca, quando sotto il limite ipotetico immaginiamo una quantità matematica lineare e diamo al problema l'enunciato precedente ». È chiaro adunque che per quanto astratto, il concetto di limite implica in qualche modo la rappresentazione di un limite reale. Secondo Vecchietti, « dicendo che una successione ha per limite esso (segno o limite fittizio), si afferma qualche cosa di positivo, non si dice che la successione non ha limite ». Anche astraendo dalla considerazione del limite come di una quantità lineare ossia come di lunghezza, resta pur sempre il fatto che il limite è ammesso, che è un concetto positivo, che quindi è in qualche modo rappresentabile. E, se noi indaghiamo nel campo delle sensazioni, vediamo presentarsi ovunque delle delimitazioni, dei confini che separano e distinguono tra loro dati diversi, delle linee di contrasto che segnano dei mutamenti, delle transizioni, delle cessazioni o variazioni.

Noi potremo con mezzi più potenti di ricerca ingrandire e dissolvere, per così dire, queste linee di confine, ma non potremo impedire che se ne presentino delle nuove, sia all'infuori delle precedenti, sia entro queste medesime. Ovunque si trovano punti d'arresto, limiti. Ora sotto questo concetto generico di limite noi non intendiamo solamente la cessazione di un fatto o di un fenomeno, ma anche qualche

cosa che rappresenti questa cessazione, e che, per esempio, nel campo delle percezioni visive può essere un contrasto marginale, una linea che limiti una superficie. La cessazione di per sè non ha valore; ma lo ha in quanto si afferra la differenza fra due stati successivi o due dati contigui, e tra questi un terzo elemento, la linea di separazione, il limite. Il limite è adunque anch'esso un dato rappresentabile. Se su un foglio nero disegno due piccoli quadrati bianchi contigui, io vedo entrambi i quadrati, li percepisco separati, e insieme percepisco la sottile linea nera che li separa. In questo senso si comprende che ogni dato distinto ha un limite, di più è esso stesso limite di un altro. — Ma v'ha di più. La rappresentazione più precisa di un limite è la rappresentazione di qualche cosa di estremamente piccolo e però di esteso. Per rimanere sempre nel campo empirico, se un quadratino bianco giace entro un assai grande quadrato nero, i limiti ossia i lati limitanti il primo non si diranno le quattro grosse fasce nere che lo rinserrano, ma piuttosto i margini, i bordi che lo separano immediatamente da ciascuna fascia nera. Quei bordi, concepiti come estensioni molto sottili, costituiscono per noi dei limiti. Quindi dei limiti di superfici bianche saranno per noi, per esempio, costituiti da linee sottili, di chiarore diverso dal fondo e ben distinte. E se anche queste linee sono in fondo esse pure delle sottili superfici in forma di bande o striscie, esse costituiranno però, di per sè e in confronto con i campi più estesi che esse limitano, delle estensioni minime. Se tali esse non sono, alla rappresentazione di linee limitanti subentra subito quella di superfici aventi esse pure dei limiti: onde ne viene che il limite lineare è qualcosa che sta appena sulla soglia della coscienza, che è un ultimo dato irriducibile; e se pure per processi di analisi e di sintesi si potrà ancora mentalmente suddividere questo qualchecosa, si tenderà pur sempre a trovare e a fissare, sia pur mentalmente, quel dato ancor più piccolo che costituisca il limite necessario. — Il limite empirico è così in origine un dato minimo

della sensazione, e però distinto nella coscienza, sebbene già esteso e risultante da una fusione associativa di elementi meno distinti, più disgiunti, meno afferrati in astratto. E però nella sua riduzione ad elemento sempre più astratto, semplice, ideale, diviene il limite matematico: quindi, per esempio, la retta matematica è il limite di ogni retta empirica riducibile a una sottigliezza infinitesima; ne è il termine ultimo, dopo una serie interminabile di assottigliamenti che non sufficientemente ci appagano; e in questo senso ha un valore positivo. — Questo per il limite empirico lineare. Ma vi hanno altre specie di limiti; ve n'ha una, soprattutto, di importanza capitale, il limite nel tempo. Newton, col suo concetto della flussione, viene a considerare la velocità che si ha alla fine di un tempo. Questa sottintende l'idea dell'ultimo istante di questo tempo: e anche qui la soluzione non può, almeno secondo noi, e non deve trovarsi che per via psicologica. Un matematico ben noto, il Poincaré¹⁾, parlando della misura del tempo, si pone due domande: « 1.° Possiamo noi trasformare il tempo psicologico, che è qualitativo, in un tempo quantitativo? 2.° Possiamo ridurre a una medesima misura fatti che accadono in mondi differenti? ». Alla prima risponde che noi non abbiamo affatto la intuizione diretta della eguaglianza di due intervalli di tempo, e che perciò, per la grande relatività di un tale apprezzamento soggettivo, non v'ha un modo di misurare il tempo che sia più vero d'un altro, ma v'ha solo un modo più comodo. Alla seconda domanda risponde citando il fatto che Tycho-Brahé nel 1572 notò una nuova stella; ma avendo dovuto la conflagrazione da lui avvertita avvenire, calcolando la velocità della luce, almeno 200 anni prima, ossia ad ogni modo prima della scoperta dell'America, noi dovremmo far risalire questa conflagrazione a una tale epoca, e nondimeno parliamo della scoperta del 1572. Adunque la sco-

¹⁾ *La valeur de la science*, Paris 1909.

perta avviene in un tempo che è esatto dal punto di vista psicologico, ma non da quello fisico.

Così, dice l'autore, quando un fenomeno ci appare come la causa di un altro, noi lo consideriamo anteriore, come allora che si ode il tuono e si pensa alla scarica elettrica che lo ha prodotto e che perciò si dice anteriore ad esso. Così di due colpi di fulmine, uno vicino ed uno lontano, si sente prima il rumore del più vicino, anche se questo fu di poco posteriore al più lontano, e perciò si dice anteriore il più vicino. Poi, dice il Poincaré, è difficile separare il problema qualitativo della simultaneità dal problema quantitativo della misura del tempo; noi non possediamo l'intuizione diretta della simultaneità, come non abbiamo quella della eguaglianza di due durate; onde la simultaneità di due avvenimenti o l'ordine della loro successione, la eguaglianza di due durate « *doivent être définies de telle sorte que l'énoncé des lois naturelles soit aussi simple que possible. En d'autres termes, toutes ces règles, toutes ces définitions ne sont que le fruit d'un opportunisme inconscient* ». Dal che appare che la nozione e la misura del tempo, come quella dello spazio, è affatto relativa. — Aggiungeremo che quindi è affatto relativa e soggettiva quella del limite del tempo, nel senso del tempuscolo infinitamente piccolo, anche senza considerare che in genere la idea di « piccolo » è già di per sé relativa a un « meno piccolo » per noi, per le nostre dimensioni e abitudini. Se vi è un fatto che sorprenda sempre l'uomo anche il più avvezzo a ricerche minuziose, è il vedere che si possono misurare indirettamente dei tempuscoli come il 0,001", che per noi non esiste, ma che ci è rivelato come un piccolo spazio segnato sull'orologio di Hipp, percorso da una lancetta in moto. Nemmeno il senso tattile nè quello uditivo, che pur son così analitici, ci potrebbero fornire una percezione diretta e distinta (tale che sia possibile rendersene conto) di un tempo sì breve. Tuttavia esiste il millesimo di secondo, e quindi esiste il milionesimo, ecc. Per attribuire un valore

reale a queste durate, noi non possiamo che servirci del solito nostro modo di apprezzare il tempo: ossia le immaginiamo come atti brevissimi, così brevi da dirsi istantanei. E qui si presenta la questione dell'istante. E' evidente che se un tempo è esso pure, come una estensione spaziale, divisibile infinitamente, non potrà mai trovarsi l'istante assoluto, ma si arriverà sempre a un tempuscolo. Ora anche qui rinasce l'idea dell'infinitamente piccolo, nel senso di una quantità empiricamente appena percettibile, che si può suddividere inesauribilmente nel pensiero, ma che condurrà sempre ad un minimo almeno mentale ed ideale per noi, ad un limite, che costituirà un termine ultimo, dopo una serie infinita di riduzioni; e che in questo senso ha esso pure un valore positivo. Insomma, come nel campo spaziale si arriva ad un minimum irriducibile per la nostra percezione e poi pel nostro pensiero, così per il tempo si arriva ad un minimum irriducibile prima nella percezione e poi nel pensiero. In realtà, per la percezione, supposto che nessun calcolo o strumento ci riveli ulteriori suddivisioni, si confondono nell'istante tanto il millesimo quanto il milionesimo di secondo, nè più nè meno come il milionesimo di millimetro e il centomillesimo di millimetro sono indifferenti per la nostra percezione visiva diretta, e coincidono col minimo punto, in cui rientrano confusamente. Anzi per la percezione tali misure non esistono; ma, dacchè siamo costretti ad ammetterle, esse diventano per noi dei minimi, degli istanti, cioè dei minimi percettibili rappresentati mentalmente, mentre si ingrandisce la immagine di quelle misure che sarebbero i veri minimi per la nostra percezione reale, ma che poi idealmente sappiamo essere più grandi delle prime. Se immaginiamo tali entità minime, ciò significa che, come ben fa rilevare Vecchietti, mentalmente noi operiamo un ingrandimento del minimo percettibile e lo suddividiamo per giungere nuovamente ad un minimum, e così via infinitamente. Dunque si deve, secondo noi, giungere a questa conclusione: in realtà, cioè

mentalmente, non si può trovare, nè nello spazio nè nel tempo, un limite, un punto ultimo, un istante, perchè queste determinazioni sono nostre esclusivamente, e dietro di esse intravediamo, in una specie di processo ritmico mentale, altri limiti più ridotti, più oggettivati e creduti più veri. Nondimeno questi limiti intravveduti e più ridotti sono ancora dei minimi per noi, nè più nè meno che quelli primitivi empirici abbandonati.

Se, come dice Poincaré, noi difficilmente possiamo registrare la oggettiva simultaneità di due fatti, noi aggiungeremo che quand'anche la determinassimo, essa non cesserebbe ancora dall'essere puramente psicologica e soggettiva. Il dire che un fatto che ci sembrò posteriore a un altro avvenne invece in realtà simultaneamente, equivale a dire che avvenne nel medesimo istante ossia in quel tempo infinitamente piccolo che costituiva un istante, se non per noi, per quell'altra persona che supponiamo intesa a correggere la nostra percezione errata. Quello che vi dev'esser stato, o che supponiamo esservi stato di oggettivo è questo: due fatti si verificarono, in luoghi diversi: la coscienza entro cui si presentarono, o si suppone che si presentassero, notò tra il verificarsi dell'uno e dell'altro nessun tempo, o un tempo trascurabile, un indivisibile di tempo, un istante. Ma se si pensa che quel tempuscolo era pur esso mentalmente divisibile in infinito, non si sa ancora il senso preciso che si deve attribuire a quella simultaneità, la quale potrebbe essere solo un tempo troppo piccolo per essere avvertito, e risultare soltanto dalla sovrapposizione dei due fatti e dalla percezione di essi come di uno solo. Ma quand'anche si abbia una prova convincente che l'uno dei due accade nè poco prima nè poco dopo di quel tempuscolo, si dovrà concludere in nessun altro modo che in questo: i due fatti furono avvertiti insieme; essi sono o erano diversi, ma per una minima, istantanea durata della coscienza furon percepiti in coincidenza. Se questa minima durata fosse anche più

piccola, sarebbe in fondo la stessa cosa: si troverebbe una coincidenza apparentemente più esatta, solo in quanto quella durata, confrontata colla prima, è minore; ma sarebbe sempre durata anche se ridotta all'istante, cioè alla durata della coincidenza più puntuale, ossia meglio riuscita come fusione esatta di elementi nella coscienza, in via simultanea e non successiva. Se due orologi battono vicino a me, e ad un certo punto sento i due « tik » come uno solo, ciò non vuol dire che i due suoni si siano sovrapposti, ma semplicemente che si sono fusi nella percezione ed hanno creato una « coincidenza », ossia la caduta di entrambi in una medesima durata minima di coscienza. Nel caso della cadenza, la coincidenza è ancor meglio avvertita come un fatto presente, anche pel concorso di altri fattori psichici. Quindi per una coscienza, per la quale la minima durata apprezzabile fosse il minuto primo, non sarebbe più errore apprezzabile la distanza di un minuto primo di due suoni, che perciò apparirebbero coincidenti. Il dire che due oggetti caddero insieme in un vuoto, o che le quattro ruote di una vettura percorsero su una via dritta il medesimo spazio in tempi eguali, non ha valore che per noi; ossia questi spazi e questi tempi furono da noi sovrapposti mentalmente e trovati coincidenti; per il nostro apprezzamento essi si confondono e si equivalgono, mentre per uno più sottile forse costituirebbero delle differenze non solo di qualità, come già avviene per noi, ma anche di quantità, come del resto si verifica in genere per l'apprezzamento del matematico, pel quale i minimi sono valori più esatti e mentalmente più sottili e ridotti di quelli empirici. Ora per le leggi associative i dati irriducibili della coscienza, il punto e l'istante, non sono estranei l'uno all'altro. Il punto può pensarsi col sussidio dell'istante, e viceversa: l'istante è puntuale, e il punto è istantaneo; difatti il punto più astratto è un inesteso appena suscettibile di estensione, e l'istante più astratto, non avendo durata, è puntuale o dura puntualmente, simultaneamente: si

l'uno che l'altro sono dati unici per la coscienza e come tali non differirebbero se non fosse pel fatto che l'uno è rappresentato come oggettivato, come estensivo, e l'altro piuttosto come intensivo. Si noti adunque che il punto, per apparire come irriducibile ed unico, deve anche venir afferrato come una impressione puntuale, ossia unica, con un processo immediato, istantaneo di pensiero, e non con atti successivi; onde esso deve costituire anche un istante per la coscienza, e quindi un dato semplicissimo, identico, in cui non sono diversità o in cui queste sono composte e fuse in unità perfetta. D'altra parte l'istante non può afferrarsi che col concorso della cosiddetta « intuizione spaziale » ossia della rappresentazione di qualcheduna, di un dato oggettivato, ossia di una minima estensione, di un punto, come una estrinsecazione, un che localizzato, oltre che sentito, pel concorso di campi di sensazione differenti. Questa oggettivazione si ottiene appunto mediante una proiezione all'esterno di quella entità minima; e ciò può sino ad un certo punto spiegarci perchè in origine le scienze matematiche, ed anche più tardi, (come pensa Du Bois-Reymond, e con lui altri), non abbiano potuto prescindere dalla rappresentazione spaziale di elementi lineari, di estensioni. La determinazione numerica si fonda, come abbiamo visto, sul concetto di numero e di unità, ma quest'ultimo, anche se astratto, non può in fondo fare astrazione dalla rappresentazione e dal relativo concetto di istante e di punto, che sono i mezzi più acconci, sebbene intuitivi, offerti alla coscienza per una esatta limitazione.

Ma se si rende necessaria, per determinarlo, la oggettivazione del dato della coscienza, e quindi, nel caso perfetto, la sua concezione come quantità estensiva, come del resto lo dimostra il fatto che in origine, secondo attestano il Wundt ed altri, anche il calcolo aritmetico nelle sue fondamentali operazioni è nato dalle percezioni degli oggetti separati e aggruppati e che da principio furono le ricerche di geometria pratica o induttiva che fecero trovare dei

teoremi aritmetici, se adunque è vero tutto questo, non si potrà mai prescindere nelle scienze esatte completamente dalla intuizione, quindi dalla rappresentazione spaziale di una estensione lineare, e anche in parte dalle proprietà qualitative degli oggetti, a cui però con processi astrattivi viene applicato il criterio quantitativo, connesso intimamente con quello di unità puntuale e istantanea. E' quindi ben importante la rappresentazione del punto e la sua nozione.

Partendo anche qui dal punto di vista empirico e gnoseologico, si dovrà convenire col Poincaré (op. cit., pag. 77 e sgg.) che, quando tentiamo di rappresentarci un punto dello spazio, in realtà ci rappresentiamo un punto bianco fatto col gesso su una tavola nera o un punto nero fatto con una penna sopra una carta bianca, quindi un oggetto o, meglio, le impressioni che quest'oggetto fa o farebbe sui nostri sensi. Questo spazio piccolissimo rappresentato deve sottostare a parecchie condizioni: esso dev'essere per noi piccolissimo, ma avente una certa evidenza e intensità, risultante dalla somma omogenea di elementi minori, poi in forte contrasto di chiarore col campo su cui lo si vede, o lo si ricorda o pensa, poi di forma circolare, spiccato e sollevato dal fondo. Non basta: dice il Poincaré che esso non dev'esser solo un punto, ma quel tal punto, perchè si abbia il mezzo di distinguerlo da un altro, deve poi essere localizzato in un dato luogo e ancora nel medesimo luogo, cioè in una determinata posizione relativa agli assi del nostro corpo, alla direzione della nostra linea visiva, ecc. La rappresentazione di quel punto sarà poi più esatta, ove essa lo comprenda non come una piccolissima superficie circolare ma come un minimo corpo solido sferico. In questo caso saranno di aiuto le rappresentazioni o il ricordo delle rappresentazioni tattili, di movimento muscolare, e quindi della distanza, della profondità, della sua piccolezza assoluta o relativa, dell'isolamento nell'ambiente, e così via. Esso può anche esser soltanto il « luogo » dell'incontro di due rette: ma

se queste si percepiscono in modo successivo e indipendente, non si ha il punto d'incontro. Questo si ha allora quando le due linee si « percepiscono » o si immaginano sovrapposte, e il loro incontro è una fusione d'elementi. Onde il punto empirico, che è elemento determinativo ausiliario per la grandezza estensiva, è esso stesso un dato complesso, il più complesso, determinatissimo, semplificato solo in quanto corrisponde al concetto quantitativo astratto di unità. Si deve anche pensare che un tal punto è anche non solo percepito, ma appercepito, conosciuto, ricordato e giudicato. Anche concepito negativamente o indirettamente come un luogo di incontro ecc., è pur sempre il posto lasciato da un punto, come la concezione negativa dell'istante è pur sempre quella di un tempo istantaneo pensato e poi abbandonato, ricordato come un puro simbolo, che è poi esso pure un atto di pensiero astratto il più possibile istantaneo. Il punto matematico non è in fondo che il medesimo punto, sempre più ridotto e semplificato mentalmente, ma per nulla diverso dall'ultimo punto rappresentato: esso è l'ultimo punto della percezione divenuta intellettiva e quindi è l'ultimo punto per il pensiero. Ma esso non perderà le caratteristiche del punto, se pure queste sembrano esser state del tutto eliminate dall'astrazione, a meno che non lo si assuma come un puro simbolo mentale di significato arbitrario, e però psicologicamente sempre dato unico, puntuale, istantaneo.

Questa origine empirica non deve disconoscersi nemmeno per entità lineari più complesse, come ad es. per la retta. E' certo che, dati due punti molto vicini tra loro, la distanza diretta tra l'uno e l'altro di essi è una percezione più immediata e più facile che non la distanza indiretta segnata p. es. da una curva. E qui sorge una questione importantissima. E' vero che non si può ben parlare di direzione e di lunghezza di una curva. Ma che cosa ci autorizza a parlare di direzione e di lunghezza di una retta? Se su una retta io posso ripetere più volte un iden-

tico segmento, posso rifare lo stesso procedimento su una circonferenza mediante un arco di questa. La difficoltà maggiore sta in questo secondo caso nel fatto che si richiede un arco del medesimo raggio di curvatura della circonferenza. Per la linea retta la direzione è più direttamente afferrata per coincidere essa con quella della linea visiva: inoltre per essere essa una distanza più breve e quindi anche come tale più direttamente afferrabile. Tra due punti veduti prossimi l'uno all'altro non si dà anzi, per la nostra percezione visiva, che la congiunzione più breve ossia la retta; mentre in un piccolo cerchio la percezione più diretta e immediata è quella di accentramento che annulla e assorbe ogni altra, tendendo a divenire la percezione di un disco minimo o di un punto centrale; invece in un cerchio grande si impone la percezione della direzione nella circonferenza a curvatura poco sensibile. Ciò è empiricamente dimostrabile, ed io rimando qui un'altra volta al mio lavoro citato sulle illusioni ottico-geometriche. E' anche noto, per opera del Lipps¹⁾ e di molti altri scienziati, che, se noi di una circonferenza di raggio abbastanza lungo isoliamo un tratto molto breve (p. es. un millimetro, veduto a una distanza di 30 cm.), vediamo questo tratto non più come un arco, ma come un tratto diritto o quasi diritto, tanto che ci sembra impossibile di dover ammettere che esso fa parte della curva del cerchio. Per la nostra percezione visiva, un minimo segmento di cerchio si confonde quasi con la sua corda e con la sua tangente. Questo ci conduce alle seguenti considerazioni: la distanza più direttamente afferrabile tra due punti vicini è la più breve, ossia la retta, perchè quelli essendo percepiti simultaneamente quasi come un solo elemento, sono anche posti nella coscienza in un rapporto immediato di congiunzione, nel quale figurano pochissimi elementi intermedi. Il prolungamento di una tale congiunzione, de-

¹⁾ *Raumaesthetik*, ecc.

terminato con eguale criterio o anche col sussidio di analoghe impressioni tattili e muscolari o col loro ricordo, e controllato mediante sovrapposizioni di segmento a segmento e all'insieme di tutti i segmenti e di questo insieme alle parti, costituisce la retta, che potrà poi controllarsi con la vista monoculare, per vedere se essa retta coincida con l'asse visivo e quindi si presenti o addirittura come un punto o come una linea più breve e diritta. Ma in fondo, anche se ci si giovi del tatto e del senso muscolare, si dovrà giungere a questa conclusione: che la lunghezza meglio concepibile è quella di una retta la quale segna fra due dati estremi la distanza più breve. Ora è chiaro che, perchè così sia, devono anzitutto esser presenti nella rappresentazione entrambi questi punti estremi, altrimenti si partirebbe da uno di essi per una direzione ignota; poi devono esser presenti simultaneamente il più possibile, perchè se così non fosse si dovrebbe ancora proceder per tentativi prima di raggiungere l'altra estremità; poi devono i due estremi rappresentarsi l'uno subito congiunto con l'altro, altrimenti non si avrebbe la evidenza immediata della maggior brevità, ma la si dovrebbe rintracciare con una serie assai lunga di confronti, i quali non ci darebbero che impressioni successive e meno sicure e connesse. Nel lavoro mio già citato io ho mostrato che fra due rette parallele vicine la distanza diretta e normale è ancor meglio percepibile quando si prolunghino e si accostino le parallele stesse in modo da imporre alla coscienza la impressione della lunghezza e da render più ridotta e immediata quella della distanza interposta. Adunque anche la percezione della retta è relativa ad alcune condizioni, ossia è tanto più sicura quanto più diretta; sicchè sarà più difficile rappresentarci la dirittura del fusto di un alto albero che non quella di uno spillo. Quindi la linea dell'orizzonte è per noi difficilmente analizzabile, e così quella del suolo. La linea dell'orizzonte però noi la diciamo una orizzontale ossia una retta, mentre in realtà sappiamo che essa è una

curva. Distanze piccole per noi son giudicate direttamente, quindi come distanze più brevi o come linee rette; così superfici minime son percepite come piane. Ora può darsi, come nel caso dell'orizzonte, che in realtà (come nozione acquisita e supposta come più interna e fondamentale al dato empirico) una tale linea sia parte di una amplissima curva, e quella superficie una minima porzione di una immensa superficie sferica. In questo caso nè la curva nè la sfera sono presenti nella nostra rappresentazione diretta; e se noi riusciamo a pensarle, è perchè quel tratto minimo o quella superficie piccolissima non ce li rappresentiamo più mentalmente isolati, ma incorporati in un insieme che ha i caratteri della circonferenza o della sfera. Perciò la curva noi ce la « rappresentiamo » quando essa non è incompleta ma quando al contrario è già evidente come curva, ossia quando si presentano varî elementi lineari contigui, i quali nell'insieme non corrispondono alla rappresentazione della distanza più breve fra due dati punti, ma ad una linea che muta continuamente ed uniformemente la sua direzione nel medesimo senso. Ciò può anche ricavarsi col soccorso della percezione della superficie interna racchiusa dalla curva, o rappresentarsi anche con movimenti muscolari di rotazione, ecc. Anche qui adunque si deve ricorrere all'evidenza immediata: e per questo noi crediamo che si richiedano anche in questo caso quelle condizioni di contiguità e di riunione degli elementi lineari consecutivi, di cui abbiamo più sopra discorso a proposito della retta; quindi riteniamo che l'idea di cerchio mai non avrebbe potuto nascere senza la visione di un cerchio abbastanza piccolo, tale da afferrarsi rapidamente nel suo insieme; mentre essa non nascerebbe così facilmente in colui che compisse per intero il giro della terra all'equatore.

Così in genere ci sembra che nella geometria euclidea non si possa astrarre da esperienze concrete non solo, ma da rappresentazioni di dati simultaneamente presenti e non costrutti separatamente con operazioni mentali. —

Il Poincaré (op. cit.) ricorda un altro fondamento essenziale alla geometria: il continuo a tre dimensioni. Anzitutto egli indaga come possa formarsi il concetto di un continuo ad una o più dimensioni, e dice: « On remarquera que toutes ces définitions sont construites en partant uniquement de ce fait très simple, que deux ensembles d'impressions, tantôt peuvent être discernés, tantôt ne peuvent pas l'être. — Cela posé, si pour diviser un continu, il suffit de considérer comme coupures un certain nombre d'éléments tous discernables les uns des autres, on dit que ce continu est à une dimension; si au contraire pour diviser un continu, il est nécessaire de considérer comme coupures un système d'éléments formant eux-mêmes un ou plusieurs continus, nous dirons que ce continu est à plusieurs dimensions ». Nel caso pratico dell'applicazione geometrica avviene così che « pour diviser l'espace, il faut des coupures que l'on appelle surfaces; pour diviser les surfaces il faut des coupures que l'on appelle lignes; pour diviser les lignes, il faut des coupures que l'on appelle points; on ne peut aller plus loin et le point ne peut être divisé, le point n'est pas un continu; alors les lignes, qu'on peut diviser par des coupures qui ne sont pas des continus, seront des continus à une dimension; les surfaces que l'on peut diviser par des coupures continues à une dimension, seront des continus à deux dimensions, enfin l'espace que l'on peut diviser par des coupures continues à deux dimensions sera un continu à trois dimensions ». Questo spazio, di cui parla il Poincaré, è un continuo che ha il suo equivalente in un continuo fisico, pure essendo divenuto poi un continuo matematico. Uno spazio assoluto è un non senso, egli dice, e noi dobbiamo riferirlo a un sistema di assi invariabilmente legati al nostro corpo ricondotto alla medesima attitudine. Quindi quell'equivalente fisico dello spazio risulta dallo spazio visivo e dallo spazio motore. Quanto al primo, le sole sensazioni retiniche ci darebbero esclusivamente lo spazio visivo semplice a due dimensioni; invece la cooperazione di due altri fattori,

le sensazioni di accomodamento e di convergenza, concorre a darci lo spazio a tre dimensioni, che potrebbero essere quattro ove queste due ultime classi di sensazioni non concorressero in accordo tra di loro. Lo spazio tattile e muscolare ha tre dimensioni, e le può avere perchè il tatto non si esercita a distanza come la vista, ed ha quindi una necessità di più per l'acquisto delle impressioni. Ma anch'esso presuppone delle condizioni fondate sulla esperienza: così noi distinguiamo una serie di impressioni σ perchè le sensazioni muscolari corrispondenti persistono inalterate (nel caso specifico « quand je dis qu' une série de sensations musculaires S conserve une de nos impressions A , je veux dire que nous constatons que si nous éprouvons l'impression A , puis les sensations musculaires S , nous éprouverons encore l'impression A après ces sensations S »). Inoltre noi non conosciamo i punti dello spazio o più generalmente la situazione « finale » del nostro corpo che mediante le serie di sensazioni muscolari relative ai movimenti fatti per passare da una certa posizione iniziale a questa posizione finale, e mediante un riferimento diretto a quella iniziale, che di per sè non ci sarebbe rivelata come tale. Tutto ciò prova l'importanza della esperienza per la rappresentazione spaziale. Ma se l'esperienza è una tal condizione fondamentale, essa, rispetto allo spazio geometrico che è un continuo matematico, ci insegna soltanto che, se a questo spazio noi assegniamo tre dimensioni, lo facciamo perchè ciò ci riesce più comodo, essendo a tre dimensioni lo spazio rappresentativo. Invece risalendo non al continuo fisico ma ad un continuo primitivo ed amorfo, (che però sarebbe un astratto mentale posteriore) i risultati sono differenti. Bisogna qui osservare che si può uscire dalla nozione dello spazio a tre dimensioni nuovamente per esigenze ulteriori della esperienza, o per necessità di pensiero, che, se non implicano delle rappresentazioni determinate e conosciute, non sono perciò meno corrispondenti ad esigenze della esperienza in senso vasto o della funzione conoscitiva e determinativa in gene-

rale. Così talora la stessa esperienza che ci fece adottare lo spazio a tre dimensioni, può farci sorpassare questa nozione; oppure si rende necessaria una ipotesi che conduce allo stesso risultato, come nella meccanica di Herz, che suppone i punti materiali visibili assoggettati a nessi invisibili che li collegano con altri punti invisibili.

Pel primo caso, in cui la esperienza stessa può portare a nuovi criteri, valga l'esempio addotto dal Poincaré: « Supposons que je sois enfermé dans une chambre entre les six parois infranchissables formées par les quatre murs, le plafond et le plancher; il me sera impossible d'en sortir et d'imaginer que j'en sorte. — Pardon, ne pouvez-vous vous imaginer que la porte s'ouvre, ou que deux de ces parois s'écartent? — Mais bien entendu, répondra-t-on, il faut qu' on suppose que ces parois restent immobiles. — Oui, mais il est évident que moi, j' ai le droit de bouger; et alors les parois que nous supposons en repos absolu seront en mouvement relatif par rapport à moi. — Oui, mais un pareil mouvement relatif ne peut pas être quelconque, quand des objets sont en repos, leur mouvement relatif par rapport à des axes quelconques est celui d'un corps solide invariable; or, les mouvements apparents que vous imaginez ne sont pas conformes aux lois du mouvement d'un solide invariable. — Oui, mais c'est l'expérience qui nous a appris les lois du mouvement d'un solide invariable; rien n'empêcherait d'imaginer qu'elles fussent différents ». Sicchè per Poincaré lo spazio fu costruito dallo spirito con dei materiali o modelli; tra questi egli ebbe modo di scegliere, e la scelta fu da lui fatta su indicazioni fornite dall'esperienza. Ora l'esperienza non conduce direttamente allo spazio, ma ai corpi e ai rapporti fra di loro; essa però costituisce la genesi della geometria, in quanto quest'ultima studia i movimenti di solidi, i quali, pur essendo ideali e invariabili, sono in fondo delle immagini semplificate e lontane dei solidi naturali veduti attraverso la esperienza. Il Poincaré però insiste nel concetto che non si tratta di un geometria più o meno vera

di un'altra, ma più o meno comoda per le esigenze dello spirito, più o meno vantaggiosa, e che gli assiomi geometrici non sono dei « giudizi sintetici a priori » e nemmeno dei fatti sperimentali, ma delle convenzioni. Dato questo carattere convenzionale, si comprende come per lui p. es. la geometria euclidea si debba considerare provvisoria ¹⁾, e come quindi possano darsi altre geometrie come quella di Lobatschewsky (secondo cui per un punto si possono condurre infinite parallele a una retta data), o la geometria di Riemann (secondo cui per un punto non si possono condurre parallele a una retta data), ecc. Queste geometrie sembrano inverosimili a chi giudica coi criteri della geometria euclidea: difatti se con Euclide la somma degli angoli interni di un triangolo è eguale a due retti, in quella di Lobatschewsky è minore di due retti e in quella di Riemann è maggiore di due retti. Nondimeno — osserva il Poincaré — i teoremi di questi due autori non presentano alcuna contraddizione, il che significa che corrispondono esattamente alle esigenze logiche: tanto è vero che Poincaré ne dà la prova traducendo ad esempio, dei teoremi di Lobatschewsky in teoremi della geometria ordinaria, e assicurandosi così che due di codesti teoremi non sono contraddittori tra di loro. In questo caso — egli dice — se i due teoremi fossero contraddittori, sarebbero pure contraddittorie le traduzioni dei medesimi in geometria ordinaria, il che sarebbe più facilmente avvertito, in quanto nessuno dubita che questa geometria ordinaria sia contraddittoria, sebbene non sappia trovare la ragione di tal certezza.

Ora, fatti come la mancanza di contraddizione logica e la riducibilità di geometrie non euclidee alla geometria ordinaria, secondo noi, lasciano ancora intravedere una origine empirica dei nuovi concetti, i quali in apparenza sembrano essersene resi affatto indipendenti. Ciò sarebbe provato dal fatto che matematici medesimi come il Poincaré, sentono

¹⁾ Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, 1909, cit.

il bisogno di rappresentarci, per renderlo afferrabile, il procedimento che condusse p. es. il Riemann alla sua geometria, e ci parlano della possibilità, per esseri sferici muoventisi su una superficie sferica, di apprezzare come la via più breve tra due punti sulla sfera, un arco di circonferenza. S'intende che data questa rappresentazione di una superficie sferica, in ciò non vi ha contraddizione; ossia si ha ancora un nesso logico conosciuto fra dati rappresentativi positivi, i quali, se non corrispondono direttamente alla realtà delle cose, si richiamano però a una parte di questa realtà come possibile di per sè. Questo modo di concepire, poi, diverrà ancora più naturale, quando si cerchi di far astrazione dal confronto con un modo diverso; ed anche in questo caso si avranno dati e nessi, se non corrispondenti del tutto a quelli reali, corrispondentisi fra di loro e alle leggi generali del pensiero oltrechè alle esigenze di un modo qualunque di rappresentazione. Talora si potrà concepire negativamente, nel senso, p. es., di una curvatura negativa; ma è evidente anche in questo caso la perfetta corrispondenza logica a un concetto positivo; per lo meno sarà determinata la sua posizione di fronte a un concetto diverso, essendo salvo anche qui il principio di contraddizione. Questo potrebbe esser minacciato p. es. nel caso, in cui si dicesse che quegli esseri supposti da Poincaré sulla superficie sferica, privi di spessore, e costretti ad ammettere uno spazio a due sole dimensioni, possono nello stesso tempo produrre una geometria sferica a tre dimensioni, come quella di Riemann.

Ma anche qui, in fondo, non si ha contraddizione che col modo consueto di concepire una geometria sferica: in realtà si tratta di un concetto nuovo formato con l'aggiunta di una nuova proprietà, del resto conosciuta, ad altre già note; solo che la nuova concezione risultante esce dal campo della rappresentazione comune, perciò sussiste come entità astratta solo ammessa. Tutto si riduce, adunque, da una parte, a trovare anche in concezioni geometriche non euclidee, dei punti di contatto con la geometria ordinaria

e quindi con le rappresentazioni e le intuizioni più comuni; d'altra parte a creare dei concetti nuovi e delle nuove coordinazioni di questi concetti, le quali però non escludono interamente il dato rappresentativo nè la funzione logica del pensiero, ma presuppongono soltanto una nuova disposizione di quei dati entro il pensiero. Per tal modo la contraddizione si avrà solo nel confronto col modo più familiare o più comodo (come lo chiama Poincaré) di concepire; se pure non è qui a parlarsi, anzichè di contraddizione, di contrapposizione di obbietti separati e successivi comparati fra loro, di cui alcuni sono più familiari alla coscienza, ed altri son meno consueti e rappresentabili, trascendenti i concetti comuni e possibilissimi in astratto. Se adunque la mente del matematico riesce ad astrarre da questa concezione del più comodo, del più noto, del più familiare, è evidente che cresceranno per essa le possibilità di concetti nuovi. Valga qui un'altra considerazione del Poincaré: « Puisque plusieurs géométries sont possibles, est-il certain que ce soit la nôtre qui soit vraie? L'expérience nous apprend sans doute que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits; mais c'est parce que nous n'opérons que sur des triangles trop petits; la différence, d'après Lobatschewsky, est proportionnelle à la surface du triangle: ne pourra-t-elle devenir sensible quand nous opérerons sur des triangles plus grands ou quand nos mesures deviendront plus précises? La géométrie euclidienne ne serait ainsi q'une géométrie provisoire ». — E, se con ciò si spostano, per così dire, i limiti della esperienza comune, non si spostano quelli della esperienza intesa in senso più vasto: si tolgono i confini apparenti, mantenendosi però sempre quelli più costanti.

Come la ricerca sperimentale può ad ogni istante riserbarsi delle sorprese, così può anche il pensiero trovar nuove concezioni, pur non potendosi nell'un caso e nell'altro uscire dal campo definito delle nostre abitudini rappresentative e logiche più fondamentali. In ogni caso mai

non si esce dalla realtà, ma solo da quella realtà più conosciuta che aveva potuto per alcun tempo ritenersi come la sola vera, e che però tale era solo in quanto costituiva pel nostro spirito una necessità più urgente. Il fatto stesso che è possibile concepire p. es. una geometria diversa dalla ordinaria, che essa implica nozioni nuove in confronto di altre, e che essa è una scienza dello spazio sia pure sotto nuove condizioni, prova che essa per un rispetto è una esigenza nuova del pensiero, ma che per un altro ha ancora un fondamento nella cosiddetta « intuizione spaziale » e si regola sulle funzioni logiche, e sui rapporti di quantità e di grandezze.

Il fatto citato dal Poincaré del movimento apparente dei solidi invariabili in una stanza in cui io mi muovo, prova due cose: che l'esperienza (intesa in senso largo come funzione del pensiero totale) può essere diversa, ma che è sempre esperienza. Se noi non avessimo sensazioni di convergenza e accomodamento oculare, nè tattili, nè muscolari, potremmo solo parlare di uno spazio a due dimensioni; nondimeno noi ancora con l'esperienza conosciamo una terza dimensione. Per questo ci par di vedere anche in ogni più nuova concezione geometrica od aritmetica, la traccia di procedimenti di pensiero che, nuovi in apparenza, si riconducono a funzioni elementari irriducibili, e a forme mentali costanti.

Come nella geometria la intuizione spaziale, la costruzione e la rappresentazione son necessarie, così nella matematica non potrà mai prescindersi, oltre che dalle funzioni logiche dell'astrazione, generalizzazione, deduzione, e perfetta analogia, anche dalla induzione, dalla intuizione, dalla ricorrenza, dalla costruzione, specialmente presso quei matematici che posseggono un temperamento più intuitivo che analitico. — Anche ove si presentano nuove specie di numeri o principî di formazione di numeri, si avrà pur sempre implicita la idea di unità o di numero o di collezione e del principio più comune di formazione; sintesi ed analisi, in-

duzione e deduzione, intuizione e logica son processi e mezzi a cui sempre si ricorre e non separatamente sempre. Ed in questi processi è ancor sempre presente la idea finale e più generale di limitazione e di determinazione quantitativa. — Vivanti (« La nozione dell'infinito ecc., cit. ») ricorda alcune considerazioni di Borel, secondo il quale noi non riusciamo a concepire se non aggregati numerabili: poichè si danno aggregati non numerabili, questi ultimi sono una nozione puramente negativa; noi non possiamo aver dinanzi alla mente che una serie n , finita, e a questa, mediante un processo d'induzione, aggiungere mentalmente un nuovo numero e formare così $n+1$ qualunque sia n . Ora, se questo è il primo principio di formazione, il secondo principio di Cantor rappresenta un processo che la nostra mente non è atta ad effettuare, e così è necessario stabilire che i numeri, i quali escono dal consueto concetto di numeri, i numeri trasfiniti, si posson definire e non concepire.

Ma anche qui giova fare una considerazione analoga a quelle fatte per la geometria. Si dà, è vero, una aritmetica diversa dalla ordinaria: in questa si fa uso di entità nuove, che si posson soltanto definire e non concepire, e di principî di formazione di numeri che non sono più quelli nati dall'addizione dell'unità ad entità numerabili composte di unità, ecc. Ma anche qui, come per la geometria non euclidea, può ripetersi che i numeri e i principî di formazione abituali non sono che i più famigliari e più comodi, come tali designati in origine da una esperienza più facile e più vantaggiosa. In realtà, come dice anche Vivanti, anche il punto e la retta sarebbero degli enti definibili e non concepibili se si togliesse loro il carattere di famigliarità che essi serbano per noi sin dalla nostra infanzia e da quella della specie. Una siffatta famigliarità si ripete pel matematico che considera nuovi enti, i quali divengono per lui nuove e costanti necessità di pensiero: « nello stesso modo il matematico, che fa uso continuo di numeri irrazionali, di integrali, di serie, di fra-

zioni continue illimitate e così via, crede di poter pensare una infinità numerabile di termini »; e così « forse il geometra, dopo lunga familiarità con questi spazi (gli spazi non euclidei e quelli a più dimensioni), finirà per credere di poterli concepire: egli vedrà nella sua mente negli spazi a curvatura negativa fasci di parallele ad una geodetica uscenti da un punto, come vedrà in uno spazio a quattro dimensioni una linea continua congiungente l'interno coll'esterno di una superficie chiusa senza attraversarla, e crederà di aver a che fare realmente con quattro dimensioni. E così l'analista, in un tempo più o meno prossimo, si illuderà di avere dinanzi al pensiero nella sua totalità la seconda classe di numeri trasfiniti, come oggidì qualunque persona mediocrementemente addestrata nelle matematiche crede di dominare colla mente l'intera serie dei numeri naturali ». È adunque evidente che, mentre il matematico cercherà sempre di rendersi familiari i concetti nuovi e quindi di poterli ricondurre a dati rappresentabili e a funzioni note di pensiero, e di stabilire le differenze ed i rapporti con questi elementi conosciuti, d'altra parte egli non troverà maggior motivo di attenersi a concetti più familiari anzichè a quelli nuovi divenuti per lui ora i più consueti. Egli farà col pensiero una esperienza diversa, ma pur sempre una esperienza. E ch'egli in fondo non può uscire dalle abitudini mentali più profonde, è per esempio espresso dal fatto rammentato dal Vivanti, che la uniformità risultante dall'applicazione costante del primo principio di formazione dei numeri si mantiene in parte anche nel processo di creazione della seconda classe di numeri, ed è turbata soltanto di quando in quando dall'uso del secondo principio di formazione, che però è pur esso necessario per ottenere la prima classe nella sua totalità. L'equivoco si avrebbe allora soltanto quando si volessero applicare ai nuovi concetti tutti i criteri valevoli per i concetti abbandonati.

Abbiamo già visto che Cantor stesso osserva dovere

lo studio delle grandezze infinite appunto avere il suo fondamento nelle differenze esistenti tra le proprietà delle grandezze finite e quelle delle infinite. Ma se si vuol porre così nettamente questo concetto della differenza, vero è che anche per i nuovi concetti si cerca un fondamento determinato e rispondente alle necessità di distinzione nel pensiero. Si tratta di concetti più o meno famigliari, ma tutti egualmente soggetti a certe leggi e condizioni fondamentali del pensare, fra le quali, nel caso qui discusso, è indiscutibile quella della « definizione ». Il numero trasfinito non può concepirsi, nel senso che non rientra nel concetto a noi famigliare di « numero »; ma può e deve definirsi, cioè deve ubbidire alla suprema esigenza del pensiero matematico, la definizione, la determinazione. Non altrimenti avviene, come vedemmo, a proposito della geometria: anche in questo caso, come dice Poincaré, « dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes », cioè essa in fondo non può astrarre dall'idea di certi solidi, di corpi localizzati nello spazio; salvo che ad essi si attribuiscono proprietà differenti e si considerano poi idealmente invariabili ed assoluti. Se non che la determinazione estensiva non è mai completamente assente da essa, come quella quantitativa pura non esula dalle matematiche.

Per lungo tempo gli oggetti, di cui s'occupano i matematici — osserva Poincaré — erano per la maggior parte mal definiti: si credeva di conoscerli perchè si potevano rappresentare coi sensi o con l'aiuto della immaginazione; ma in fondo se ne aveva una immagine grossolana anzichè una idea precisa. Erano oggetti appartenenti al dominio della cosiddetta intuizione sensibile, e non ancora a quello della certezza; per ottenere questa occorreva definirli con rigore. Così anche il numero incommensurabile si risolveva dapprima nella idea vaga e intuitiva di continuità. Ma quando si volle la certezza, si dovette ricorrere alla logica, allo strumento abituale della dimostrazione, allontanandosi sempre più dalla semplice intuizione e scostandosi

sempre meno dalle necessità del pensiero. Dal pensare per immagini si passò al pensare logico. Se quest'ultimo è il modo di procedere nella analisi matematica, nella geometria rimane il bisogno della intuizione spaziale, sebbene non più grossolana, ma corretta e coadiuvata dalla concezione aritmetizzante. — Nella matematica s'impone, abbiamo detto, il bisogno della logica, della dimostrazione, dell'analisi, della deduzione. Esso ci può spiegare fino a un certo punto il carattere di perfetto rigore di questa scienza; non ci spiega però perchè, se le proposizioni da lei enunciate posson trarsi le une dalle altre con le regole della logica formale, essa non si riduca a una pura logica e tanto meno a una immensa tautologia. Gli è che nella matematica non si ha a che fare col solo sillogismo, il quale non può insegnarci nulla di nuovo, nè col solo principio di identità: sono dati bensì gli assiomi, ma nessun teorema sarebbe nuovo, se nella sua dimostrazione non intervenisse un nuovo assioma. Ed ecco così che la matematica non è solo deduttiva, non solo offre la possibilità di derivare per via analitica da un piccolo numero di giudizi sintetici « a priori »; ma ha anche una specie di virtù creatrice. Per questo, per esempio, il Poincaré trova che la dimostrazione che Leibniz dà di $2 + 2 = 4$ è un ragionamento puramente analitico e quindi, più che altro, una verifica; mentre nella vera dimostrazione la conclusione è in un senso più generale delle premesse, e contiene così qualcheda di nuovo. Questo qualcheda di nuovo fa pensare che nella matematica dev'esserci, oltre la deduzione per cui dal generale si scende analiticamente al particolare, anche un processo di induzione, un ragionamento « par récurrence » che permette di affermare che se un teorema è vero di $n - 1$, lo è di n . Tale ragionamento, per il quale non è più sufficiente il solo principio di contraddizione, è una induzione speciale, la induzione matematica, che procede, come la induzione nelle altre scienze, dal particolare al generale, ma che però se ne distingue per questo, che è

come il tipo dei « giudizi sintetici a priori », e che è possibile solo a patto che una medesima operazione possa ripetersi indefinitamente, mentre l'esperienza non potrebbe considerare la serie indefinita dei numeri. Quindi anche nella matematica è necessaria una specie di intuizione diversa da quella primitiva sensibile; una intuizione del numero puro, mediante cui è possibile il seguente assioma: « se un teorema è vero del numero 1 e se si dimostra che è vero di $n + 1$, posto che lo sia di n , sarà vero di tutti i numeri interi ». Il quale non è un giudizio analitico dal generale al particolare, ma « un giudizio sintetico a priori » per cui si conclude da $n + 1$ a tutti i numeri interi. Senza l'intuizione — dice Poincaré — i giovani non potrebbero iniziarsi ad intendere le matematiche: essa è lo strumento dell'invenzione; solo che, per quanto sia talora necessario (e forse lo è in ogni caso) ricorrere alla intuizione sensibile, essa deve però manifestarsi senza il soccorso diretto dei sensi e dell'immaginazione, ma per un sentimento diretto di ciò che fa l'unità interna di un ragionamento; e qui giova pensare alla teoria, già sopra accennata, del Wundt, secondo la quale le verità matematiche sono vere e reali in sè stesse e però derivate mediatamente dall'esperienza con induzioni su astrazioni dall'esperienza stessa. Questa specie di induzione matematica, che giace a fondamento di tutta la scienza dei numeri di cui è come un cardine inevitabile, ha il suo contrapposto nel procedimento analitico e deduttivo matematico; anche qui va però osservato che nel recedere con l'analisi da certi insiemi ai loro elementi primitivi, si scoprono i rapporti fra questi elementi e se ne deducono i rapporti fra gli insiemi stessi; quindi si fa una costruzione, mediante cui non solo si discende sino ai singoli elementi ma si risale anche ai loro insiemi.

Ci sembra così abbastanza dimostrato che, come nella geometria euclidea e non euclidea rimangono costanti alcune condizioni del modo di costruire, di rappresentare, di intuire,

malgrado che le concezioni, per il loro carattere astratto possano uscire più facilmente dall'ambito di quelle più note e perciò ritenute più vere, così nella matematica rimangono costanti certi concetti e certi processi di pensiero, malgrado che alcune concezioni si siano modificate rispetto ad altre più famigliari e le trascendano. Così l'idea di unità, di simbolo numerico, di segno, di istante, di punto, di quantità, e le rappresentazioni spaziali più elementari, insomma tutto ciò che caratterizza il finito non empirico ma astratto matematico rigoroso, come pure i processi logici più elementari, non ci sembrano per nulla compromessi dalle nuove vedute, ma soltanto diversamente adoperati e interpretati.

Ed è anzi appunto per questa permanenza loro nelle nostre abitudini mentali, che sorgono le difficoltà nella mente di chi vuole adibirli alla determinazione di oggetti o di fatti prima non mai presi in considerazione. Per esempio il calcolo infinitesimale non fa che applicare a contenuti qualitativi e intensivi delle determinazioni quantitative, che, in quanto tali, non potranno mai perdere il loro carattere quantitativo più rigoroso, ma, in quanto limitazioni di una realtà extra-quantitativa, vengono a trovarsi di fronte a difficoltà di nuovo genere. Inoltre abbiamo già veduto che il criterio quantitativo fa capo al concetto di unità, nel senso simbolico di un ente unico puntuale istantaneo, la massima determinazione, il finito per eccellenza. Quindi tutto ciò che in ultima analisi si riconduce a questa idea precisa e determinata, tutto ciò che è o a cui si applica misura e numero, è finito. Ora, non solo il finito ma anche l'infinito sono entrambi necessità di pensiero, coordinate e dipendenti fra di loro. Se ogni quantità determinata è un finito, per ciò stesso è possibile un infinito, in quanto la determinazione è una funzione che ha il carattere della continuità, non soltanto dell'istantaneità, e rende possibile sempre altri risultati determinati. Si può così avere una serie di limitazioni, la quale può durare quanto dura il pensiero che la pensa, ossia sempre al di là dell'ultimo pensiero fatto. Ne risulta una

catena interminabile che è sempre in potenza di prolungarsi, e che è incessante e interminata in atto; ossia ad ogni limite fissato essa rappresenta la possibilità di creare un nuovo limite ulteriore e quindi si realizza come un continuo. È potenziale in quanto la si considera come contesta di punti d'arresto o limiti; ed attuale nel senso che essa pensata nella sua generalità è un insieme continuo che ha perso ogni carattere di limitazione. Come processo determinativo, è l'infinito potenziale; come realtà intrinseca, priva di carattere determinativo specifico, sarebbe l'attuale. Ma i due concetti non vanno profondamente separati: il fatto stesso della necessità del rinnovarsi del limite, ossia l'essere ogni limite in potenza un non limite, dimostra la sussistenza continua di una tale possibilità ossia la attualità; d'altra parte un infinito extra quantitativo, attuale, può ritenersi sotto un certo rispetto qualchecosa non di possibile o di realizzantesi, ma di realizzato, compiuto, e perciò chiuso come una quantità finita, a cui non si conviene più alcuna determinazione; e allora in questo senso esso potrebbe in parte ricadere nel concetto di un finito indeterminato, che può meglio definirsi e dar luogo nuovamente all'infinito potenziale, il quale poi a sua volta come necessità reale è un infinito non possibile ma vero.

Si è così in una specie di circolo vizioso; ma in realtà un concetto balza chiaro da queste osservazioni.

Esso è, secondo noi, il seguente; il criterio di determinazione quantitativa crea il finito, e null'altro che il finito; conseguenza psicologica e logica di esso è il concetto di infinito. Se non vi fosse la possibilità di un criterio quantitativo determinativo, come non si avrebbe il finito (e il definito e numerabile), così non si avrebbe l'infinito. Difatti la matematica ci dice che l'infinito non è zero e nemmeno una quantità infinita costante chiaramente concepita, ma o è un infinito dato e costante ma non afferrabile e soltanto definibile, oppure è da concepirsi come un incremento finito infinitamente variabile, tendente a sparire senza sparire

mai, cioè in fondo intimamente il finito, sempre il finito, nient'altro che il finito. Quanto meno si cerca di determinare una data qualità, un dato continuo, tanto meno il nostro pensiero è limitativo, e tanto più sarà esso stesso continuo, senza interruzioni, indeciso; ma dal momento che il pensiero determina e applica i suoi schemi di dissezione, ed i risultati delle sue sintesi e delle sue analisi, il continuo appare rivestito del carattere schematico trasmessogli dal pensiero. Per dare un esempio grossolano, citeremo il caso di una goccia di sangue che a occhio nudo ci sembra perfettamente omogenea e senza particolari, mentre con più potenti mezzi d'osservazione si scompone in una quantità immensa di corpuscoli di forme ben determinate: ammettendo che questa goccia sia grande in modo da non presentare al nostro occhio un limite preciso, il numero dei corpuscoli lo diremo infinito. Ma infinite sono le determinazioni del pensiero, nel senso che continuano col pensiero stesso, e che, se anche io penso la cessazione del pensiero, fo con ciò un nuovo pensiero e così via un pensiero del pensiero fatto, senza potermi arrestare. Se io mi trovo davanti a un'immensa superficie bianca di cui non vedo i confini, non potrò determinarla; ma se in essa compare all'improvviso un piccolo disco nero, io mi rappresento questo piccolo disco e penso alla possibilità di vederne comparire altri ed altri in numero infinito. — Questo trascendere il limite nell'atto stesso di fissarlo, è in fondo non una limitazione, ma una continuità fatta di successive limitazioni, la quale non potrebbe cessare mai, perchè la sua cessazione sarebbe non più un processo di pensiero, e perciò non potrebbe essere affermata, ma soltanto intravveduta prima come una possibilità. — Adunque, ritornando ai concetti su espressi: finchè non si fa uso di un esatto criterio determinativo quantitativo (la quantità, il numero, l'unità, il punto, il simbolo numerico, l'istante, sono, come vedemmo, le più rigorose delle determinazioni possibili per noi), non si ha nè concetto del finito, nè dell'infinito (e quindi nep-

pure del definito e indefinito, numerabile e non numerabile, trasfinito, ecc.): questi concetti sorgono ed assumono importanza man mano che la determinazione si fa più precisa nel pensiero, e divengono allora l'uno il correlato dell'altro. Il vero correlato del finito quantitativo è l'infinito potenziale; come substrato e condizione di questo potrebbe supporre un infinito reale ed attuale, ma è questo un substrato supposto per astrazione, e un concetto che non si fa più in base al semplice criterio di determinazione quantitativa, e che perciò rientra sotto una specie di criterio qualitativo, o almeno ricorre a principii di formazione del tutto nuovi. Quindi non vi è determinazione che di un finito; necessaria conseguenza ne è il finito infinitamente possibile, ossia l'infinito potenziale.

Questa conseguenza è necessaria, data la persistenza del pensiero, la continuità della coscienza, i processi continui di sintesi e di analisi del pensiero, i processi di riconoscimento e di conservazione nella memoria; cosicchè i finiti costituiscono nella coscienza una successione: ma non questa soltanto.

Così, se pensiamo alla serie dei numeri interi naturali, noi ce ne rappresentiamo distintamente alcuni dei primi; per mezzo dei primi due o tre noi ci rappresentiamo la cinquina, con questa le decine, e poi via via le centinaia, migliaia, ecc. Arriveremo così alle centinaia di milioni, al bilione, al trilione. Ma qui la nostra rappresentazione comincia a divenire più incerta e potrà sorreggersi solo con la suddivisione in gruppi sottoordinati. Al di là di un numero equivalente al decilione, non potremmo procedere con sicurezza, e fin lì giungeremmo soltanto con l'aiuto dell'idea di migliaia di milioni. Ecco che adunque tutta questa serie ci si presenta come un tutto, di cui gli elementi più prossimi sono i più evidenti, e i più lontani sono solo afferrati per gruppi e finalmente confusi in un indistinto remoto. Malgrado ciò, questo indistinto remoto non costituisce per noi una cessazione, ma soltanto una tendenza verso un limite

che è non conosciuto e perciò poco probabile, ma solo intraveduto nell'indifinito; oppure un limite distinto, al di là del quale si vede la possibilità della prosecuzione. Ora anche la serie indeterminata supposta al di là di un ultimo limite, rientra in realtà nella nostra rappresentazione, venendo a costituirsi parte di un tutto; ma con ciò il processo rappresentativo non è ancora e non sarà mai esaurito. Quindi si succedono le sintesi che raccolgono in totalità gli elementi, appena questi entrano nella coscienza più o meno distintamente, e le analisi che suddividono in elementi determinati gli ulteriori campi nuovi e meno distinti. Si tratta adunque di un processo di pensiero, che, analogamente a quanto vedemmo per l'infinito teorico-conoscitivo, si ripete su dati astratti e conservati dalla memoria. Però l'esperienza può averci mostrato che un dato limite fu oltrepassato, ma non mai che fu sorpassato un numero infinito di volte: l'infinito è un processo non delle esperienze in senso ristretto, ma del pensiero, della funzione conoscitiva per eccellenza, e trascende il suo oggetto, pur divenendo a sua volta un processo oggetto di conoscenza, sempre però oltrepassabile.

Ora si noti che nella matematica, ove le determinazioni quantitative del pensiero sono più rapide compendosi in un campo astratto ove i concetti divennero più generali ed affini, esse sono anche più numerose e possibili che non quelle della sola esperienza. Per questo noi crediamo ad una specie di relatività dell'idea dell'infinito, in quanto essa può essere, p. es., più densa di elementi più rigorosamente definiti. Essa può anche essere, perciò, più feconda ed evidente in chi è maggiormente addestrato all'astrazione e a rendersi indipendente dal pensar per immagini. Chi vi è meno avvezzo, formerà la idea dell'infinito in altro modo: avrà un più scarso numero di idee determinate e lascerà quindi maggior campo nel proprio pensiero all'indeterminato, il quale è un finito non ancora definito. Colui che è invece più proclive all'astrazione, avrà un maggior numero di dati

definiti nel pensiero, e quindi potrà più facilmente immaginare un'infinito potenziale e ricondurre questo alla totalità attuale, e così via di nuovo in un processo continuo (che è poi in fondo un infinito potenziale esso stesso). Dei due tipi di individui, il secondo avrà meglio del primo la idea della possibilità infinita, appunto perchè è più capace di definire, di determinare; quindi il suo « infinito » pensato sarà, per così dire, più ricco e intenso che non quello del bambino, il quale, per es., riuscirà a immaginare dietro le più lontane stelle visibili ad occhio nudo poco spazio non ben determinato popolato di pochi astri, mentre nella mente dell'astronomo si formano moltissimi spazi ancor più vasti di quello visivo.

Ma ciò significa che, perchè l'idea dell'infinito sia relativa, essa deve possedere un fondamento rappresentativo-empirico. Dato uno spazio mentale costante, una capacità di coscienza rappresentativa ben determinata, quanto più nel quadro di rappresentazione prepondera l'elemento sensibile, tanto meno vi sarà posto per quello pensato in astratto; quanto meno ingombrante il primo, tanto più esteso il secondo: il primo (il sensibile) sarà piuttosto un indefinito consecutivo ad un finito o ad una unità di pensiero più faticosamente costrutta; il secondo (l'astratto) conterà invece di finiti od unità di pensiero più determinate e sintetiche, che perciò lasciano un più ampio posto ad altri finiti in maggior numero. Si potrebbe dire che nello spazio più ampio possibile, costante, del pensiero, possono esser contenuti tanto più elementi quanto più questi sono definiti ossia quanto più sono condensati in unità, perchè queste entità condensate equivalgono quasi a riduzioni sempre maggiori dello spazio mentale, in cui rimane maggior posto per nuove riduzioni.

È press'a poco ciò che avviene quando tentiamo di rappresentarci il complesso di tutti gli elementi che nell'universo possono esserci rivelati una volta dal microscopio, un'altra volta dal telescopio: noi li diciamo infiniti in en-

trambi i casi, perchè la possibilità della scoperta e dell'aggiunta di un nuovo elemento sussiste in entrambi i casi; ma in realtà, nella rappresentazione totale simultanea, i primi sono in assai maggior numero che non i mondi ingranditi dal telescopio, sebbene anch'essi rappresentabili sino ad un certo numero: e ciò perchè sono più piccoli e più definiti rispetto allo spazio mentale rappresentativo. Per questo anche le quantità infinitamente piccole sono, per così dire, meglio concepite in infinito che non le infinitamente grandi, giacchè la riduzione di un dato minimo, e di per sè già ben determinato, ad uno ancora più piccolo, è una riduzione ed una economia sempre crescente dello spazio mentale, mentre per l'infinitamente grande è il caso inverso: malgrado che, giunti ad un certo punto dell'impiccolimento o dell'ingrandimento nel pensiero, il processo muti natura e cessi, oppure si trasformi in una ripetizione del medesimo atto di ingrandire per dividere e di ridurre per moltiplicare.

Dicemmo che l'infinito è potenziale, quindi è un processo, ma che la realtà sua sta nell'essere esso veramente un infinito, ossia risiede nella sua attualità. Per decidere la questione del potenziale e dell'attuale, dobbiamo ancora aggiungere altre considerazioni.

Come vedemmo, il Vivanti dice essere ormai stato dimostrato che la nozione di infinito attuale è superflua nel calcolo infinitesimale, il quale può svolgersi col solo uso dell'infinito potenziale, cioè « senza lasciare il campo delle grandezze finite »; per lui le discussioni intorno all'infinito attuale, la cui introduzione nella matematica è dovuta a G. Cantor, non hanno valore quando si fondano sul presupposto che questo infinito attuale sia concepibile, mentre esso può soltanto « definirsi ». Così il Vecchietti trova conseguente Cantor quando afferma che la realtà di un insieme infinito costituisce la realtà del numero che ne esprime il numero degli elementi e che quindi esiste un numero ω avente una realtà oggettiva;

ma si domanda se sia veramente concepibile tutto l'insieme come dato, sebbene infinito, a meno di considerarlo come una realtà noumenica, « in sè », a cui corrisponde un numero simbolico. Ma allora, egli osserva, non si comprende come gli si possano attribuire delle qualità così determinate: perchè, se da una parte si ammette un secondo principio di formazione diverso da quello comune che consiste nell'aggiungere l'unità all'ultimo numero intero da noi formato (e quindi non bene afferrabile, poichè si parla dell'ultimo numero intero finito fra tutti gli esistenti), d'altra parte, poichè si tratta ancora di numeri interi, il primo dopo tutti i numeri v non può esser che quello che supera di una unità l'ultimo numero v , a meno che non si supponga più questo nesso tra il nuovo numero ω e la successione dei numeri naturali e che si neghino a questo numero e al suo principio di formazione tutte le proprietà dei numeri interi finiti; nel qual caso però non lo si comprenderebbe bene come « numero immediatamente superiore a tutti i numeri v »: e il Vecchietti cita qui Stolz e Bettazzi e i loro ragionamenti per dimostrare il postulato di Archimede. O si devono ammettere per questo numero trasfinito proprietà dei numeri finiti, il che sino a un certo punto è inevitabile per il nesso su citato; oppure si devono sopprimere queste proprietà e concludere allora col Vivanti che « se verrà un giorno in cui le nostre abitudini mentali ci permetteranno di illuderci di poter concepire il trasfinito non numerabile come oggi ci illudiamo di concepire l'infinito numerabile, quel giorno noi vedremo colla stessa facilità decomposti in punti un segmento ed un continuo a due o a tre dimensioni ».

Un'altra considerazione importante a proposito dell'infinito attuale in matematica è quella dell'Enriques¹⁾. Egli

¹⁾ *Problemi della scienza*, Bologna, 1910, p. 16 e sgg. — Dell'Enriques è ancora molto importante, pel nostro proposito, un articolo *I numeri e l'infinito*, comparso in *Scientia*, Vol. IX, Anno V (1911),

osserva che la parola « infinito » non può applicarsi ad alcun numero o ad alcuna quantità data, ma denota sol-

N. XVII - 1. Ivi l'Enriques, che è una delle menti direttive più cospicue della bellissima rivista (ricordiamo, tra i molti lavori da essa pubblicati e che più qui ci interessano, un lavoro di Arrhenius *Die Unendlichkeit der Welt*, che ricorda il *Divenire dei mondi*, un lavoro del Borel *Le continu mathématique et le continu physique*, uno del Brouwer *L'évolution des mathématiques pures*, del Fano *La geometria non-euclidea*, del Poincaré *L'avenir des mathématiques*, di Volterra e di Ziehen sulla coltura contemporanea ecc.), annuncia che il lavoro fa parte di un volume *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, rifacimento di uno anteriore. — L'A. ci richiama dapprima al significato empirico dei numeri, cioè alle esperienze da cui nasce il concetto di numero, ai numeri cardinali. Viene spiegato poi sperimentalmente il concetto della prevalenza e quello astratto di numero, badandosi anche a spiegare tale processo di astrazione, e la eguaglianza (somma di un'identità e di una diversità), alla quale ultima spettano la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, esprimenti le proprietà fondamentali del processo logico d'associazione e astrazione. Poi si passa ai numeri ordinali, alla corrispondenza ordinata, e al confronto fra numeri cardinali e ordinali, a proposito dell'uso scambievolmente dei quali (cioè dell'uso dei numeri come cardinali o ordinali), l'A. dice l'aritmetica incapace di sciogliere la questione di questo genere, come non può riuscirvi qualsiasi considerazione « a priori ». Premesso ciò, l'eminente scienziato e filosofo si domanda a questo punto in che senso l'esperienza è sufficiente a giustificare le proposizioni esposte, e fin dove essa sia necessaria per stabilire il concetto del numero e le proprietà ad esso inerenti. Anzitutto con la pura esperienza bruta del conteggio non si va molto al di là del miliardo, se pure tutta l'esperienza vien fatta su classi di oggetti: nondimeno « la nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinita ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri ». Allora per l'aritmetica si può ricorrere semplicemente ad esperienze mentali: anzi, secondo la tesi idealistica « le esperienze elementari conducenti alla definizione dei numeri non vertono sulle proprietà obiettive degli oggetti e delle classi d'oggetti considerati, ma esprimono piuttosto le leggi operative del nostro stesso pensiero, dell'associazione e dell'astrazione logica ». Così, riconoscendosi come pertinenti allo spirito umano quelle proprietà per cui qualcosa di reale viene pensato come un « oggetto »,

tanto un modo di accrescimento di una quantità variabile suscettibile di ricevere valori più alti di qualsiasi valore

la determinazione di questo (distaccato dal reale mediante il pensiero e assunto come alcunchè di fisso) appare una « convenzione o finzione arbitraria » intellettuale. Tra questo modo di vedere subiettivo intellettuale, e il modo empiristico (V. Stuart Mill), vi è la veduta critica, secondo cui « i principi della teoria delle classi, i numeri e le loro relazioni, corrispondono egualmente alle leggi logiche (assiomi) dei processi d'associazione e d'astrazione cui dà luogo il pensiero, e a proprietà generali dei gruppi di oggetti reali, sotto la condizione d'invarianza di questi e nei limiti, in cui tale condizione è soddisfatta ».

Ora, per costruire la serie infinita dei numeri, occorre, oltre gli assiomi logici esprimenti le proprietà fondamentali dell'associazione e astrazione, un « postulato esistenziale » mercè cui si affermi la ripetibilità indefinita dell'atto del pensare, così espressa: « dato un numero qualsiasi, esiste sempre un numero successivo ad esso ». Così, mentre il sistema di numerazione moderno basato sul posto delle cifre e la considerazione dello zero fu scoperto dall'indiano Brahma-Priester e venne nell'800 agli Arabi e nel 1200 in Europa, passando alle serie infinite si entra negli « elementi supposti », con cui si estendono con la supposizione i dati sperimentali, e ciò in vari modi, dando origine a diverse « classi infinite » di oggetti. La possibilità di compiere entro una classe C « un numero infinito di scelte arbitrarie » trascende però le facoltà del pensiero umano, a meno, dice l'A., « che non si possa fissare una regola che determini a priori le scelte successive dipendentemente da un numero finito di operazioni ».

Per le classi infinite, come già si vide, si ha che « la possibilità di stabilire una corrispondenza fra una classe ed una sua parte appartiene a tutte le classi infinite e costituisce quindi un carattere distintivo fra le classi infinite e le classi finite ». Oltre ciò, è circostanza fondamentale questa, che una classe infinita può essere contemporaneamente equivalente e prevalente ad un'altra. — L'A. poi osserva che il principio di induzione matematica, esprimente la possibilità (logica) di immaginare tutti gli oggetti di una classe finita come effettivamente pensati un dopo l'altro, non fa in realtà che ingrandir la facoltà del pensiero senza decampar delle regole logiche nè condurre a contraddizioni: piuttosto esso può interpretarsi come « possibilità di costruzione della serie infinita che corrisponde ai numeri naturali » quindi come un « modo generale di passaggio da

fisso prestabilito; il che corrisponde a quel processo di pensiero di cui abbiamo più indietro discorso e che costi-

un pensiero al successivo » (psicologicamente), l'affermazione che l'operazione di passaggio conduce ad « ogni » termine della serie. Una serie bene ordinata, per cui valga il postulato di Peano, si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata colla serie dei numeri naturali 1, 2, 3,... n ...: serie bene ordinate non soddisfacenti a quel postulato conducono ad estendere il concetto ordinario dei numeri ordinali, ossia a numeri ordinali infiniti, ossia ai numeri trasfiniti di G. Cantor. Osserva l'A. che, prolungando mentalmente la serie dei trasfiniti, « si cade sempre in classi numerabili ». Dubbio rimane se il continuo possa essere bene ordinato. La qual cosa non può ora risolversi, perchè o dovrebbe esigersi in tale ordinamento un criterio determinato mediante un numero finito di atti del pensiero, oppure una prova negativa che mostrasse contraddizioni nell'ipotesi di una serie ben ordinata avente la potenza del continuo.

Aggiungeremo a questo proposito che oggi sono molto discusse le questioni attinenti ai fondamenti della matematica, alle nuove concezioni della logica matematica, dell'infinito matematico, ecc. in generale; da parte di puri scienziati e di filosofi, logici, ecc. Per non entrare in un oceano inesauribile, basterà accennare, oltre ai lavori citati dell'Enriques, quelli del Natorp: *Die log. Grundlag. d. exacten Wissensch.*, del Peano, del Pastore, ecc. Nelle riviste filosofiche nostre e straniere compaiono spesso discussioni in proposito. Per alludere ad alcuni casi speciali, citeremo l'articolo *Il Caso* di C. Ranzoli in *Rivista di filosofia*, Anno III, 1911, Fasc. I. Ivi, a pag. 25, si parla del valore strumentale dell'infinito e dell'infinitesimo nella matematica, affermandosi ch'è l'infinito positivo è il trasfinito, e il negativo o indefinito è quella quantità che ha tutti i limiti possibili perchè ha nessun limite assegnabile. Un infinito che si ripetesse negherebbe sè stesso, perchè avrebbe finito la serie delle sue formazioni possibili. E a pag. 29 (ibid.) si dice che il pensiero umano, in cui tutto converge e si raccoglie, è esso, e esso solo, l'equazione perfetta dell'infinito. Oltre questo lavoro, che contiene concetti interessanti sebbene non concordanti perfettamente coi nostri, lo stesso numero della Rivista cit. contiene un lavoro che ci tocca più da vicino: *Logica e Matematica* di Corradino Mineo. In esso si parla non di separazione delle due scienze, ma di una maggior fusione di entrambe, nel senso che la matematica non ha bisogno di postulati suoi propri, consistendo essa in deduzioni per mezzo di principi logici da principi o definizioni logiche; e ciò in opposizione a Kant, per cui

tuisce l'infinito genetico o « potenziale ». All'infuori di questo, che deve aversi presente nell'analisi infinitesimale,

la matematica costruisce in una intuizione a priori e non è riducibile alla logica pura. In questo lavoro son citati lavori fondamentali di autori notissimi, quali Peano (v. la sua *Rivista di matematica* del 1891, divenuta nel 1896 la *Rev. de Mathématiques* e nel 1900 *Revista de Mathematica*, nel latino « sine flexione »: v. di lui *Notations de Logique mathématique*, Torino 1894; *Aritmetica generale e algebra elementare* ecc.), Padoa (v. in *Questioni filosofiche*, Bologna - Modena, Formiggini), Russell (*The principles of Mathematics*, Vol. I, Cambridge, 1903), Couturat (*Les principes des Mathématiques, avec un appendice sur la philos. des Mathém. de Kant*, Paris, Alcan 1905), Burali-Forti (*Logica matematica*, Manuali Hoepli 1894), Vailati (v. gli *Scritti* raccolti e pubblicati da Calderoni, ecc.: cfr. un articolo di Amendola in *Nuova Antologia*, Marzo 1911; v. ancora *Pragmatismo e logica matematica* in « Leonardo », anno IV, febbraio 1906). Un lavoro importante ricordato dal Mineo è ancora *L'induzione matematica* di Varisco in *La cultura filosofica*, anno II, n. 7; come pure *De infinito in mathematica* di Jourdain in *Revista de mathematica*, VIII; e un altro di Lugaro sulla base [anatomica dell'] intuizione (*Rivista di filosofia*, V, 1908); poi son rammentati i matematici Richard, Zermelo-König, ecc. Ci interessano le conclusioni a cui giunge il Mineo: l'attività logica elabora a preferenza i dati più semplici e sintetici della esperienza, i prodotti ultimi della astrazione, che danno maggior garanzia di corrispondere alla realtà obbiettiva; si giunge insomma a una sintesi logica, a un aposteriori-a priori più determinato che non nel senso della logica filosofica.

Ancor più da presso ci tocca l'argomento trattato dal Natorp in *Die log. Grundl. d. exact. Wiss.* (cit. sopra). Nella recensione che A. A. ne fa in *La cultura filosofica*, Anno V, n. I, 1911, è detto come il Natorp si ispiri alla Logica di H. Cohen. Il Natorp rivendica l'elemento a priori nelle scienze esatte. Logicamente nulla è prima del pensiero; non esiste il dato prima della funzione, la quale sola gli dà l'esistenza. La realtà è l'« *individuum omnino determinatum* »: ma questa esigenza non è mai del tutto soddisfatta, perchè l'oggetto non è, ma diviene. Riportiamo dalla recensione citata queste importanti parole: « Solo per una illusione di prospettiva il cercato si trasforma in dato, in quanto la necessità di questa determinazione del fatto è una esigenza che si pone a priori, e si anticipa perciò senza riflessione nel concetto del fatto come dato ciò che è piuttosto il risultato ultimo della conoscenza ».

per l'Enriques deve bandirsi ogni processo di definizione trascendente come quella (v. Cantor, ecc.) delle « totalità degli infiniti enti cui spetta un certo carattere assegnato ». Difatti — egli dice — se si ha un insieme $s \equiv [\alpha]$, composto di enti qualsiasi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, il quale non contenga sè stesso fra i suoi elementi ossia non contenga alcun ente coincidente con s , e poi si definisce Σ l'insieme di tutti gli insiemi s cui spetta la indicata proprietà, $\Sigma \equiv [s]$, « si ha anzitutto che Σ non deve trovarsi fra gli elementi s , altrimenti si contraddice alla proprietà supposta per gli s . Ma d'altra parte se Σ si trova fuori dell'insieme $[s]$, questo insieme non esaurisce tutti gli s possibili che godono della proprietà anzidetta ». — Per tal modo si comprende anche il valore della obbiezione di Burali-Forti¹⁾ alla teoria dei numeri trasfiniti. Sicchè o si concepisce il trasfinito come una quantità finita, per quanto grande, di un valore assegnato; o in caso contrario, come vedemmo, occorre uscire dalle normali consuetudini quantitative, e negare le proprietà dei numeri finiti. Da questo punto di vista si intende come possa parlarsi di una nozione d'infinito « negativa ». È vero — dice il Vivanti — che questo concetto negativo può risolversi in positivo dicendo che un aggregato infinito contiene sempre aggregati parziali che possono riferirsi ad esso biunivocamente ossia che sono equivalenti a sè stesso (Dedekind); e questo concetto divenuto positivo ha tanto valore che per esso trova soluzione il paradosso di Achille e della tartaruga e l'altro di Tristram Shandy citato da Russell²⁾, perchè mette in corrispondenza biunivoca fra di loro la parte ed il tutto, ossia li fa equivalere; ma è in ciò un concetto negativo rispetto al modo abituale di concepire e di determinare il tutto e la sua parte: tutt'al più si deve dire che è necessario,

¹⁾ *Una questione sui numeri trasfiniti*, Rend. Circ. mat., Palermo, II, 1897, p. 154-164; cit.

²⁾ *The principles of mathematics*, I, Cambridge, 1903.

come son necessari dei procedimenti straordinari nella matematica applicata alla realtà non quantitativa. Quindi il dire, come fa Couturat¹⁾, che l'idea d'infinito è un portato della ragione, e però come sintesi razionale non è successiva, per noi equivale a dire che in tal caso essa sarà un infinito attuale indipendente da qualunque criterio quantitativo, come quello che non ha rapporto alcuno con grandezze finite, o al più sarà un ignoto non concepito chiaramente, un indefinito; oppure una definizione o un simbolo, nel qual caso è sempre qualcosa di stabilito e quindi avente una determinata proprietà qualunque, come è di una qualunque grandezza finita al di là della quale si può sempre andare; ma allora, dal momento che lo si è posto o supposto, esso, anzichè essere un ignoto inconcepibile e indefinito, giusta quanto dicemmo per l'infinito filosofico e a proposito delle osservazioni del Wundt, rientrerebbe nel campo consueto della possibilità, della tendenza, ossia dell'infinito potenziale. Esso è bensì un concetto, un dato della ragione; ma la ragione si forma appunto il concetto della « possibilità » infinita, e, se vuole « definire » l'infinito, non ha che due modi per farlo: « lo suppone », o « vi tende », rendendo così il suo compito ineffettuato.

Quindi è, secondo noi, evidente la seguente conclusione. Qualunque infinito attuale, per essere pensato come costante e invariato, gode di proprietà costanti e ben definite ed è affine al concetto di una immensa quantità o grandezza finita, essendo come questa già assegnato. Siccome però in matematica esso è soltanto definibile e non concepibile, così, sebbene la definizione sia già una determinazione fissa, esso non è più un vero concetto e non può discutersi, ma va distinto nettamente dalle proprietà del finito. Invece l'infinito matematico, di cui può e deve trattarsi in modo più speciale, è l'infinitesimo, perchè questo è quantità finita, di origine rappresentativa, dive-

¹⁾ *De l'infini mathématique*, Paris 1896.

nuta un simbolo astratto, indicante il variare infinito di una quantità, che si accosta incessantemente al niente e che però è sempre qualchecosa, sebbene infinitamente più ridotta di una minima quantità empirica. Ed eccoci ricondotti al finito, ma al finito così ridotto e astrattamente idealizzato da costituire, più che sia possibile, un niente.

L'infinitesimo matematico è perciò il simbolo di una funzione che tende a un limite senza raggiungerlo mai. Ma l'incremento dato alla variabile è sempre finito e determinato perchè corrisponde alla differenza per quanto piccola fra due valori di essa; solo che tende infinitamente a zero; ma siccome è nello stesso tempo la quantità più prossima a zero e la più discosta da esso (perchè è indefinitamente piccola e perchè rimane pur sempre una quantità), così è variabile sempre. L'infinito matematico è insomma il vero infinito, che pone entro più esatti termini di pensiero il problema. Per questo esso è più restrittivo ma più comprensivo, e quindi più estensibile ai concetti dell'infinito filosofico e dell'infinito naturale. Vogliamo con ciò dire che, poichè l'infinito matematico astraе dalle qualità che sono proprie dei singoli oggetti, e li trascende in sottigliezza, esso si estende a tutti gli oggetti, e li comprende nel concetto quantitativo applicabile a ciascun contenuto di coscienza. Così pure esso non tien conto del nesso causale ma solo del rapporto tra principio e conseguenza, a meno che non si tenga in considerazione il nesso causale psichico presente nello stesso processo di pensiero. Questo processo, poi, come abbiamo veduto, è esso stesso l'infinito, nel senso che noi lo pensiamo ancora e non ne attingiamo mai il termine. Il limite preveduto non è una cessazione, ma un pensiero, ed il limite effettivo non è un pensiero quindi non è un limite.

Ora, secondo il ragionamento di Bolzano (Vivanti, op. cit., pag. 11), con cui si contrappone all'infinito potenziale ossia al concetto di una quantità finita variabile un infinito proprio, costante e determinato quale è l'insieme di tutti i

numeri interi, l'esistenza stessa di un tale insieme mostra che la nostra mente è atta a concepire un aggregato infinito di idee. Ed il Vivanti aggiunge: « La dimostrazione può porsi sotto forma un po' diversa, e forse più chiara. Sia A_1 un'asserzione qualsiasi; la proposizione affermatrice che A_1 è vera è un'asserzione formalmente diversa da A_1 , che diciamo A_2 ; così l'asserzione che A_2 è vera è diversa da A_2 e può dirsi A_3 ; ed è evidente che una tale successione di proposizioni differenti non ha alcun fine ». Qui non si tratterebbe più dell'infinito potenziale, perchè ciascuna di quelle asserzioni è condizione dell'altra; quindi non si tratta di un numero finito, al di là del quale si può continuare, ma di un numero che attualmente è inesauribile. Ora ciò potrebbe portarci ad ammettere l'origine trascendente della serie delle asserzioni, ove non badassimo che quelle sono asserzioni affermate dal nostro pensiero e che anche un pensiero che fosse supposto al di là di questo e però pensasse il medesimo obbietto sarebbe ancora il nostro pensiero mutato di posto. La questione va, secondo noi, posta così: è certo che se io faccio l'asserzione A_1 , posso presupporre per essa condizioni che devono precederla, e d'altra parte seguirla, ossia una serie di giudizi già preparata e antecedente, e che non è mai esaurita perchè non si può arrestarla a un primo giudizio del giudizio, ma che d'altra parte è già trascorsa appena fatta, e perciò vuole altre asserzioni dopo di sè per attingere il presente: ora, poichè tutto ciò è presupposto, e l'asserzione non è che una sola, ne viene che quella serie infinita di condizioni la si suppone già implicita ed effettuata nell'asserzione stessa, altrimenti non si avrebbe più un'asserzione presente ma infinite asserzioni attese e trascorse; ma, siccome il pensiero presuppone soltanto e non svolge tutta quella serie, così ne risulta che l'attualità stessa del nostro pensiero che asserisce, in quanto tale, non è affermata dal pensiero, ed è perciò un indefinito, un indeterminato, che tende a definirsi: non appena si determina, esso è già un'attualità affermata e quindi

trascorsa, e dà origine, in seguito, al pensiero di tutte quelle innumerevoli condizioni preparatorie e susseguenti (per la correlazione di principio e conseguenza) che non hanno un termine possibile. Ma anche qui, chi ben osservi, si ha nuovamente espresso l'infinito potenziale; perchè, per quanto si presuppongano già implicite nell'asserzione A_1 la A_2 , A_3 , ecc., noi non possiamo che pensare successivamente nel tempo, come atti consecutivamente ordinati di coscienza, prima la A_1 , poi la A_2 , che immaginiamo anteriore ma che pel pensiero è posteriore, e che però è preceduta dalla tendenza a procedere sempre di asserzione in asserzione della asserzione. Solo che questa determinazione delle asserzioni precedenti e susseguenti è tanto più necessaria quanto più assoluto e rigoroso è il carattere che si assegna all'asserzione. Ciò prova che quella serie di elementi trascendenti l'attualità del nostro pensiero come attuale essa stessa non è cosa determinata e perciò esce dal criterio quantitativo del pensiero: in quanto pensata, essa ritorna ed essere l'infinito pensabile, l'infinito potenziale, in altri termini l'infinito matematico che è un finito infinitamente variabile. E questo è un concetto relativo, che implica un numerabile, un definito e un finito: ad esso è assegnato un valore assoluto in quanto si identifica con la stessa funzione determinativa quantitativa del pensiero, ossia col pensiero per eccellenza, anzi con la funzione di pensiero più determinativa e rigorosa.

Ma esso non è, come credono alcuni, la verifica empirica dei singoli dati o momenti assegnati nel tempo (o rispettivamente nello spazio). Se così fosse, si tratterebbe solo di determinare una serie finita non bene definita. Invece si tratta di fissare il concetto della proseguibilità indispensabile, della impossibilità del limite, della rinuncia la più assoluta ad esso, malgrado la più assoluta tendenza alla determinazione del limite. Ci troviamo bensì di fronte ad un concetto: ma questo, in fondo, tende ad esprimere la impossibilità di un obbietto ben concepibile, sebbene cerchi

di definirlo il meglio possibile. Ciò è anche espresso dal fatto che la quantità finita variabile del calcolo può assumere qualsiasi valore, che l'infinitesimo è una funzione ed è anche una finzione, giacchè non esiste quella quantità ultima che si cerca e che dovrebbe soddisfarci. Quindi è anch'esso, come vedemmo per l'infinito teoretico-conoscitivo, un processo inesauribile del finito e una pura funzione la sua sintesi. Solo che qui, nel caso dell'infinito matematico, essendo la grandezza finita così determinata e ridotta ai minimi termini da tendere il più possibile o infinitamente a zero, il numero infinito di tali grandezze (o di punti generatori di estensioni, ecc.) per la costituzione del continuo, acquista tanto più il carattere a base rappresentativa della inesauribilità, essendo certo che qualunque piccolezza non sarà mai sufficiente al matematico, mentre pel naturalista può sussistere un limite empirico e pel filosofo l'infinitesimo non è ancor rigorosamente definito. Il limite non si raggiunge che simbolicamente per il matematico: ed è per questo appunto che esso trascende ogni idea men che matematica dell'infinito, e che, pel grado più elevato di sintesi astratta, supera i concetti più comuni ed è un infinito più compressivo e infinito di ogni infinito di natura empirico-naturalistica o filosofica.

V. — CONCLUSIONI.

Dalla considerazione del problema dell'infinito sotto i tre aspetti, naturale, teoretico-conoscitivo (filosofico), e matematico, ora intendiamo procedere ad una sintesi delle conclusioni parziali a cui siamo giunti in fine di ciascuna di queste tre trattazioni, per poter esporre il nostro pensiero generale sull'argomento.

Nel chiudere i cenni storici, già abbiamo accennato ai motivi che ci indussero alla disposizione delle parti teoretiche seguenti. Essi consistono nella necessità di procedere dall'indeterminato al determinato, per poter giungere gradatamente a un concetto sempre più chiaro. Ora in questa necessità noi vediamo pure la chiave per la soluzione, a nostro modo di vedere, del problema. Difatti, ove noi volessimo risolvere in un concetto più chiaro la questione dell'infinito nella natura e nella scienza, dovremmo risalire alla conoscenza e quindi all'infinito teoretico-critico; e la soluzione di quest'ultimo problema non può aversi che esponendo col massimo rigore i termini del problema stesso, ossia penetrando nel concetto di infinito matematico. Ciò che si richiede per la esplicazione di un concetto è la determinatezza; e questa è attinta nel suo massimo grado dal pensiero matematico. Per questo pensano non pochi matematici che la ricerca dei fondamenti gnoseologici del calcolo non sia più necessaria del porre con chiarezza e sicurezza i termini stessi del calcolo. — La questione è, ad ogni modo, molto grave, e si ripresenta sempre più in-

calzante nel pensiero sistematico, sia che esso si rivolga alla natura, che si raccolga in sè stesso per esaminare i modi del conoscere, o che perfezioni la sua stessa attività e tecnica nella matematica. Ovunque troviamo inevitabile l'infinito. Ma ovunque troviamo pure inevitabile il finito; e in tutti i casi una conclusione balza ai nostri occhi, questa, che, ove il pensiero pone un limite finito, esso pensiero « può » ancora procedere oltre quel limite: e dove non è dato un finito, un punto di partenza o un limite, non è possibile procedere all'idea dell'infinito. L'infinito ha quindi la sua ragion d'essere in una opposizione. — Ma per procedere con ordine, conviene in qualche modo ricapitolare.

Dopo aver parlato dell'infinito nella natura e nella scienza, siamo giunti a questa conclusione: che quand' anche noi amplissimo smisuratamente i confini dell'universo rappresentabile sino a rendere difficile, se non impossibile, il confronto tra quello e la rappresentazione precedente, noi ci troveremmo ancora nel campo del finito, anzi del definito dai limiti non bene misurabili; e che quindi non può giungersi all'idea dell'infinito se non quando, dopo aver concepito un tutto empirico come distintamente determinato, si procede col pensiero nuovamente al di là del limite fisso che lo determina. In certo qual modo può affermarsi che l'infinito sorge non appena il finito è sicuramente stabilito dal pensiero astratto. Ma ciò non può effettuarsi che sotto alcune condizioni, di cui le principali sono il rinnovarsi continuo del contenuto empirico di pensiero, e la continuità dell'attività stessa di questo pensiero. Entrambe sono strettamente connesse fra di loro, perchè, se così non fosse, le differenze qualitative dei contenuti empirici non sarebbero poste in rapporto fra di loro, e perciò non apparirebbero tali, e d'altra parte la attività del pensiero non sarebbe più un infinito progresso ma persisterebbe immutabile ed identica a sè stessa. Onde non soltanto si richiede il dato e la coesistenza o la successione di dati continuamente

differenti, ma ancora si rende necessaria la conservazione di essi nella memoria, la trasformazione in dati astratti, e quindi il loro assorbimento entro un processo di pensiero diverso per contenuto, identico nella forma, vale a dire perfettamente continuo ma rinnovantesi continuamente. — Da queste conclusioni non differiscono quelle da noi poste per l'infinito teoretico. Difatti anche lì dicemmo che il vero infinito è quello che non è dato, ossia è un processo mentalmente inesauribile al di là di qualsiasi finito astratto, sia che questo si presenti come un definito o come una totalità infinita e indefinita. — In tutti questi casi noi ci troviamo di fronte a un processo di pensiero, anzichè ad un oggetto di pensiero, ad una possibilità anzichè ad un dato, ad una « Unendlichkeit » anzichè ad una « Endlichkeit ». Ma se così è, non è meno vero che anche un processo di pensiero continuamente rinnovantesi viene a costituire una totalità seriale mentalmente rappresentabile, giacchè nulla vi ha che non sia concepito dal pensiero e perciò ridotto ad una immensa unità totale. Sicchè, mentre qualunque totalità è in fondo un finito e perciò è sorpassabile dal pensiero, anche l'ultima trasgressione di questo rientra in una nuova totalità più vasta della prima e però non definitiva neppur essa. Quindi, per poter giungere a una conclusione sicura su questo proposito, bisognerebbe pensare la possibilità del pensiero di oltrepassare un ultimo limite, ma non come data in tutti i suoi casi, bensì come supponibile una volta sola per sempre, in ogni caso: ossia occorre pensare infinita la possibilità, non la effettuazione. — E qui ricorre la conclusione dell'infinito matematico: la necessità di bandire il concetto di infinito attuale e di limitarsi a quello potenziale, ossia al modo di variare di una quantità o grandezza finita variabile. Anche qui l'infinito non è attuato, ma è anzi una funzione, un divenire, e precisamente il divenire di una quantità, ossia di un finito; quindi è anche in questo caso nient'altro che un modo di esprimere le variazioni, i momenti, presi sempre più piccoli e più rigorosi, tendenti a 0,

senza giungere a 0: è la variabilità più rigorosamente continua, cioè la possibilità di variazione di ogni limite sino a conseguire la stessa continuità.

Ma, per giungere a tanto, si deve considerare una quantità, e poi i gradi e i momenti per cui essa passa nel suo variare. Quanto più piccoli e contigui quelli, tanto più continuo il modo di variare. Sicchè in fondo, si tratta di un infinito che ha la sua ragion d'essere nel divenire del limite, in una tendenza e in una possibilità che si esaurisce attraverso una serie infinita di momenti definiti; possibilità di rendere sempre meno discontinui, fin che si vuole, e quindi di porli sempre più contigui, piccoli, simili, e numerosi, i momenti finiti del suo variare, senza ridurli mai al niente, nel qual caso non avrebbe più ragione d'esistere il problema.

Anche nel caso di una infinita totalità, si ha in fondo una universalità, un tutto finito ed ammesso e definito come totale, a cui si contrappone però l'infinito progresso, che o la sostituisce e la nega, o la supera. E se pure è esso stesso pensato come un totale, non s'esaurisce in questo pensiero. Ma se così stanno le cose, noi ci troviamo sempre di fronte all'infinito potenziale, ossia sempre ad una totalità finita e alla possibilità di oltrepassarla, continuamente. Quindi si ripresenta la opposizione di finito ed infinito, ma non nel senso dell'antinomia kantiana, perchè non si tratta di giungere con la ragione a conclusioni separate contraddittorie fra di loro, ma di realizzare un vero e proprio processo dialettico di pensiero che si continua attraverso e mediante il finito da una parte, e l'infinito dall'altra. In tale processo i termini opposti sono inevitabili e insieme concorrenti, giacchè il primo è condizione e insieme il condizionato del secondo. Ora, se l'infinito sta nella natura dialettica di questo processo inesauribile, esso dovrebbe soprattutto essere l'infinito successivo, l'infinito della intuizione matematica kantiana del tempo. Ma neppur questo può accontentarci, giacchè anche la infinita successione può

pensarsi come una sintesi totale per quanto superabile, e d'altra parte può pensarsi anche l'infinito nell'ordine non successivo.

Già abbiamo veduto che il calcolo infinitesimale può svolgersi col solo uso dell'infinito potenziale, cioè senza lasciare il campo delle grandezze finite (Vivanti, op. cit.). D'altra parte, come dice Borel, se oltre gli aggregati numerabili vi sono degli aggregati non numerabili, la nozione di questi ultimi è puramente negativa. Se anche a ciò si aggiunge che si può trasformare la nozione di infinito da negativa in positiva coll'affermare, per esempio, che un aggregato si chiama infinito quando contiene un aggregato parziale equivalente a sè stesso, rimane certo questo: che o noi, avendo dinanzi alla mente una data serie, possiamo ancora mentalmente aggiungere a questa serie l'unità, qualunque sia la serie; oppure che, invece che a questo processo d'induzione, noi ricorriamo a un principio di formazione del tutto diverso, e per esso a numeri che non hanno più nulla a vedere col finito, trasfiniti. Nel primo caso noi non riusciamo a concepire la totalità completa della serie infinita e ci troviamo perciò di fronte all'infinito progressivo o alla possibilità di aggiungere nuovi termini all'ultimo termine pensato: nel secondo caso, poi, ci troviamo di fronte a quell'infinito che, a detta degli stessi matematici, possiamo definire ma non concepire. Ora, dice il Vivanti, il matematico crede, per esempio, di poter pensare un'infinità numerabile di termini, mentre non pensa se non una successione finita ma prolungabile senza alcuna restrizione: e così l'analista ha l'illusione di aver dinanzi al pensiero nella sua totalità la seconda classe di numeri trasfiniti: nell'un caso e nell'altro egli può definire degli enti che tuttavia non concepisce. Ma è evidente che, se per un lato questi concetti non sono ben possibili, tuttavia ciò che si conviene di definire è una proprietà costante che si ammette come data. Per quanto si rinunci a concepire un dato ente che però si definisce, importante è il fatto che lo si stabilisce; mentre la

addizione continuamente ripetibile dell'unità ad una serie, non può esser data se non come possibilità che si va continuamente ristabilendo. Tutt'al più si potrà in questo caso pensarsi come data una serie immensa, ma con la condizione che sia possibile prolungarla ancora illimitatamente; oppure potrà pensarsi come data addirittura una volta per sempre la « possibilità » di prolungamento, nel qual caso è implicito il pensiero non di una serie esaurita ma di un processo inesauribile di addizione. Sicchè, guardando la questione da un punto di vista gnoseologico e filosofico, ci sembra che nel caso del trasfinito, in fondo, si rinunci al concetto consueto di numero finito ed anche al primo principio di formazione dei numeri e così pure all'idea di infinito potenziale: ma ciò che non possiamo escludere è la necessità di considerare in questo caso un infinito definitivo, posto, fissato nella definizione; e nel caso del primo principio di formazione, ci sembra che il concetto dominante sia quello della infinita possibilità o dell'infinito progresso. Onde, anche tenuto conto che non è possibile applicare al trasfinito le proprietà delle grandezze finite, crediamo tuttavia che esso debba almeno ritenersi come un infinito attuale o come una infinita totalità. Ma allora ricorriamo ancora nel caso della infinita totalità e quindi anche dell'infinito progresso: e questi due termini antiteci sono ancora la condizione di un processo incessante del pensiero dialettico, come quelli del finito e dell'infinito.

Se adunque non può non concepirsi l'infinito all'infuori di un finito che diviene e quindi anche del divenire di un finito (cfr. Wundt, « Essays », cit.), resta a chiarire il motivo o la condizione e la natura di un tale infinito procedere.

La soluzione sta in noi nel fatto che un tale infinito è relativo e condizionato. — Già vedemmo che Kant considera le antitesi delle antinomie dal punto di vista empirico: ossia la proseguibilità infinita ha un fonda-

mento nel dato empirico e nella possibilità di procedere oltre il limite imposto dalla esperienza. Ora, anche ove si ammetta ivi soltanto un regresso in indefinito, si ha a considerare un fatto fondamentale: che cioè nella esperienza è dato un limite, al di là del quale è solo intravvista una « indeterminata » possibilità di procedere, mentre nella intuizione pura è oltrepassato non solo quel limite ma ogni limite assegnabile, e ciò è infinitamente possibile. Sicchè abbiamo qui due casi: nell'uno si dà un regresso che non è ancora il vero regresso infinito del secondo: ossia abbiamo due modi di infinito, corrispondenti a due diversi gradi di determinazione del finito, entro la esperienza, ed entro la pura intuizione matematica. Il vero regresso in infinito è quello della intuizione matematica, ossia è il regresso relativo al dato più astrattamente e rigorosamente determinato, sebbene già dal punto di vista delle antitesi sia ammessa nell'esperienza stessa la possibilità di un continuo progresso.

Se anche nell'infinito del tempo e dello spazio dovrebbe vedersi un regresso in indefinito perchè solo empiricamente esso si presenta illimitato e non può essere dato tutto intero ed esaurito, d'altra parte il vero regresso indefinito si ha quando si parte da un caso determinato, p. es. da un uomo vivente, e si risale sempre più indietro nella serie de' suoi antenati: nel qual caso si dà un regresso empirico, il quale, se pure non potrà arrestarsi ad un primo uomo, avrà nondimeno una origine non solo empiricamente rappresentabile, ma anche ridotta ad un fatto o avvenimento probabilissimo per motivi empirici, mentre in confronto con un tal regresso è assolutamente ineffettuabile la rappresentazione di un principio del tempo o di un limite dello spazio.

E questa differenza è tanto più visibile se compariamo le antinomie matematiche con quelle dinamiche. Difatti, come già osservammo, il concetto della massa si riferisce a ciò che è dato entro lo spazio, e quello della causalità

a ciò che avviene nel tempo; ed entrambi questi concetti hanno origine sotto l'influsso della esperienza, e non derivano le relative contraddizioni dalle proprietà matematiche astratte delle forme del tempo e dello spazio, bensì introducono in quelle delle speciali determinazioni. I concetti delle antinomie dinamiche si connettono con la esperienza scientifica, pure presupponendo anch'esse delle esigenze fondamentali di pensiero. Se così non fosse, esse si ridurrebbero a proposizioni vuote di contenuto e a ripetizioni delle antinomie matematiche. Ora, se per Kant il mondo, in rapporto al tempo e allo spazio, non è nè finito nè infinito, poichè spazio e tempo sono in fondo fenomeni (intuizioni della esperienza), ed il regresso è esclusivamente empirico, gioverà ripetere che, se invece secondo il vero concetto kantiano tempo e spazio si considerano non più come cose esistenti fuori di noi ma come forme pure della intuizione, il pensare limiti nella estensione e divisibilità di tempo e spazio non è pensiero esauribile. Insomma, se il regresso è puramente empirico, non esclude assolutamente la possibilità del limite empirico al di là del quale si può accedere però ancora soltanto all'indeterminato, mentre se il regresso è compiuto non più nella serie empirica ma nelle forme pure matematiche, esso non potrà assolutamente arrestarsi ad alcun limite in nessuna direzione. Ma allora in quest'ultimo caso non potrà più parlarsi solo di un regresso in indefinito, come nell'esempio della serie regressiva che va da un uomo vivente ai suoi più remoti antenati; bensì di un vero regresso in infinito, ossia di una retrocessione che non si arresta ad un casuale limite empirico dato, ma che prosegue al di là di ciascun limite pensabile. E questo è propriamente il concetto delle antitesi (e relative dimostrazioni) matematiche, le quali in confronto delle tesi, che si appoggiano per combattere l'infinito al concetto di una infinita totalità compiuta, sostengono invece la necessità dell'infinito nel senso del vero regresso non in indefinito ma in infinito, non come dato, ma come da darsi.

Quand'anche nel tempo e nello spazio si volesse arrestarsi al concetto di un regresso in indefinito nel senso empirico sopra accennato, rimarrebbe pur sempre il concetto dell'ulteriore progresso possibile al di là di qualunque limite dato; e, ad ogni modo, se si confronta questo processo con quello della serie causale più disforme, si vede come per questa siano più forti i motivi per l'indefinito regresso, più indeterminata la esigenza del progresso oltre ogni limite, e più determinata quella di limitarci alla nostra esperienza.

Sicchè, se da una parte anche nel tempo e nello spazio, rispetto alla doppia direzione della estensione e divisibilità, si danno motivi per ammettere il regresso indefinito oltre il limite empiricamente dato o affermato, d'altra parte deve soprattutto ricordarsi che tempo e spazio sono forme pure matematiche della intuizione, che di fronte alle dinamiche implicano la impossibilità di arrestarsi a un limite assegnabile (dalla rappresentazione empirica), ma la possibilità o di una infinita totalità esaurita (come vuole l'argomento delle tesi), o una infinita proseguibilità cioè un regresso in infinito, come propriamente vogliono le antitesi destinate a dimostrare la necessità dell'infinito stesso. Mentre nel regresso in indefinito si ha il finito empirico e l'indeterminata continuabilità oltre di esso, nel regresso in infinito si ha la totalità infinita e l'infinito progresso: ma, essendo la prima sostenibile soltanto come termine di opposizione al secondo, ne viene che questo secondo è il vero infinito, il quale appunto come tale ha la proprietà di non essere mai dato e quindi di costituire il vero regresso inesauribile. Questo regresso può continuarsi in guisa stabilmente determinata mediante la sintesi precedente, mentre nel regresso in indefinito si giunge invece a limiti determinati, al di là dei quali un ulteriore progresso è possibile in generale ma è indeterminato rispetto al modo. La nostra conoscenza empirica conclude per un ultimo termine, dopo il quale il regresso è del tutto indefinito, perchè la sintesi dei fenomeni è solo possibile a cominciare da quel termine

estremo: al contrario nulla impedisce di continuare il processo di pensiero al di là di quell'estremo termine, perchè tempo e spazio posson pensarsi estesi al di là di un ultimo limite o di un'ultima causa. — Per un lato l'estremo limite empirico è per noi l'ultimo; per un altro lato possiamo procedere sempre dopo di quello. Nel primo caso si ha una sintesi finita, unitamente con la infinita esigenza (derivante dalle forme intuitive di natura matematica) di un possibile trapasso al di là del limite raggiunto; nel secondo caso si ha la sintesi infinita e l'infinito progresso. — Stabilita così questa diversità nei due regressi, rimane evidente anche la differenza delle due sintesi ossia dei due limiti, quello empirico e quello puro o matematico. — In corrispondenza di ciò, nell'infinitesimo matematico i momenti finiti son presi sempre più ridotti e rigorosi per esaurire il continuo, e quindi la determinazione del finito è ancor più sottile.

Insomma l'infinito è relativo: quanto più astratto il finito e più determinato esattamente, matematicamente, tanto più sicuro l'infinito progresso.

Man mano che il limite empirico viene assunto nelle forme pure matematiche, la possibilità del progresso di pensiero oltre quel limite si fa pur essa più decisa; da indefinita diviene infinita. Non è quindi l'infinito un processo di pensiero il quale a sua volta possa determinarsi assolutamente; ma è un processo, il quale si ripeterà in modo uniforme e costante finchè costanti si manterranno le condizioni che lo fanno essere, ossia finchè costante rimane la determinazione del finito. A un finito non ben definito corrisponderà un infinito pure indeterminato; ad un finito più determinato corrisponderà un infinito, per così dire, più determinato; ed al finito il più determinato corrisponderà l'infinito il più rigoroso. In certo qual modo l'infinito si presenta come una disponibilità di finiti; quanto più distinti i caratteri determinativi di questi ultimi, tanto più essi saranno disponibili: quanto più sintetizzato il dato o i dati finiti, tanto più intensi

essi si costituiranno nel processo continuativo di pensiero. Sicchè, secondo noi, può aversi una idea più o meno grandiosa di infinito a seconda che essa è o più o meno ricca di elementi costitutivi, di contenuto definito.

È la relatività ed il confronto che contribuisce all'incremento della idea dell'infinito: ed è per noi cosa certa che il pensiero di un numero, il quale sia posto al di là della serie già infinita dei numeri naturali, è di per sè un concetto di infinito assai più complesso che non quello di uno spazio possibile oltre il sistema della Via Lattea; giacchè in questo ultimo non potrebbe ancora esaurirsi la infinita serie dei numeri naturali e tanto meno quindi un numero trasfinito. Si potrà dire che in entrambi i casi ricorre la idea della possibilità infinita; ma nell'uno compare come una vaga presupposizione generica e costante, nell'altro invece come una presupposizione divenuta certezza e di poi superata incessantemente da nuove certezze.

Già, parlando dell'infinito nella natura, abbiamo detto che, persistendo costante la nostra attività di coscienza, l'idea di infinito può in essa occupare un posto più o meno grande a seconda della sua determinabilità; difatti la rappresentazione dell'universo empirico occupa già di per sè quasi tutto il nostro spazio mentale e poco posto rimane per la possibilità astratta dell'al di là di quell'universo, mentre la sintesi astratta dello stesso universo è un processo mentale più rapido, il quale lascia un posto molto più ampio per lo sviluppo delle ulteriori sintesi astratte decorrenti nel pensiero. Ora, quanto più astratte e rapide quelle sintesi, tanto più determinato sarà il finito e tanto più frequentemente esso ricorrerà nel processo di pensiero. Perchè, se è vero che la idea d'infinito è un tale processo di pensiero che si presenta sotto la forma di una possibilità sempre rinnovata, e come processo di pensiero implica una connessione intima di rappresentazioni, affetti e impulsi, e una successione varia di cause finali, non è meno vero che questa possibilità non è in ogni caso la medesima, ma

la impressione che se ne desume varierà in rapporto alla quantità dei casi da cui la si induce e che possono esser presenti insieme alla coscienza. Per esempio, se io immagino un sistema di elementi, o una serie di fatti che concepisco come una totalità indefinita composta di un numero ristretto di parti, e poi penso una totalità composta di un numero molto maggiore di elementi ben definiti, avrò in entrambi i casi la idea della possibilità che si diano altri elementi oltre quelli assegnati, ma la impressione sarà nei due casi differente, giacchè nel secondo essa supera un contenuto più ricco di coscienza.

Ora, perchè questo contenuto sia più ricco e la impressione più intensa, occorre appunto che quegli elementi non solo siano più numerosi, ma che per essere tali siano anche più semplificati, individuati, e quindi più serrati, per così dire, gli uni contro gli altri, perciò più continui. Ma questa individuazione crescente non può raggiungersi che attraverso il numero ed il concetto astratto di unità, o di punto, o di simbolo astratto. L'unità astratta, o il simbolo matematico o anche il punto inesteso generatore di estensione (che è poi la individuazione più astratta del luogo di una coincidenza) è la più precisa determinazione finita di cui sia capace lo spirito umano. Essa corrisponde ad un riflesso dell'unità di coscienza nella sintesi massima o più rapida di pensiero. Se nella esperienza il dato empirico può assumersi come un finito non ancor ben definito, esso è per il pensiero soprattutto « un » dato, e non diverrà in massimo grado afferrabile se non divenendo un'unità, anzi l'unità. Ma questa unità non è un elemento semplice staccato da un sistema di elementi; bensì è una sintesi di tutti gli elementi che in date circostanze compaiono nella coscienza, è una fusione, una coincidenza di dati in una risultante superiore, di effetto e valore saliente per la coscienza: è una specie di ciò che in altra guisa è costituito in sommo grado dal simbolo, dal punto e dall'istante, ossia da ultimi elementi irriducibili per la coscienza, e in cui

elementi ulteriori coincidono come nella determinazione più intensa. Se adunque l'unità è la determinazione massima, e, come tale, quantitativa, del pensiero, la quale non presuppone già altre condizioni fondamentali per la conoscenza esatta ma è presupposta da tutte, giacchè nulla si rende comprensibile se non si presenta unificato nella coscienza, il processo di pensiero continuativo delle unità più sintetiche, sarà appunto il più intenso di fattori. Ma supponiamo ancora che in una serie inesauribile di unità, ciascuna di queste unità la si pensi a sua volta costituita con una quantità immensa di parti: in questo caso noi avremo pure un infinito, ma una idea assai più complessa di infinito. Così se noi pensiamo alla quantità di elettroni che possono essere in una particella minima di materia, possiamo anche pensare che essi concorreranno in numero infinito nella massa di una montagna: ma se pensiamo tutto l'universo astronomico costituito di tali elettroni, noi dovremo pensarli in numero infinito anche nell'universo totale; se non che la idea di infinito in quest'ultimo caso si presenta pel confronto molto più sviluppata. In tutti questi casi, adunque, si ha questo doppio fatto: che si tratta sempre di un medesimo concetto, l'infinito; ma che esso ha nei due casi un valore differente per la coscienza. Gli è che, per quanto si voglia mantenere sempre identico quel concetto, esso si accompagna ogni volta a un contenuto rappresentativo simultaneo che può esser diverso, perchè diversa ne è la origine empirica nel finito. Tanto è vero che, pure dicendosi infinita la serie dei numeri naturali, si è ancora pensato il numero trasfinito che è all'infuori di quella prima infinità; onde è inevitabile pensare un confronto ed un rapporto di varî modi dell'infinito, anzichè un infinito « in sè » immutabile in ogni caso. — Ma, se così è relativo codesto concetto di infinito per rispetto al modo in cui si presenta serialmente nella coscienza, esso è relativo anche per un altro motivo, perchè ha una condizione « sine qua non », un punto di partenza, un finito. Difatti

o esso non è pensato o è pensato; se è pensato, lo è o come una infinita totalità, e allora è un tutto unificato, per quanto indefinitamente, nella coscienza, e può dar luogo nel pensiero a una prima sintesi, indi ad altre sintesi, a un finito e a una serie di finiti. Oppure è la sola possibilità di sorpassare un ultimo finito della esperienza, e allora ha per fondamento la stessa sintesi empirica finita. Oppure ancora è pensato come un infinito procedere, e allora si presenta la necessità di stabilire un limite qualunque al di là del quale si può sempre andare. In ogni caso si dà questa doppia esigenza: una sintesi ossia un finito, e un punto o un momento qualunque, che quindi sarà ogni volta diverso, da cui comincia per il pensiero la serie infinita.

Per quanto si voglia pensare l'infinito come un assoluto, esso non cesserà mai di essere in realtà un processo di pensiero che si inaugura ad un certo punto e in un certo modo (difatti si son pensati varî infiniti comincianti in momenti diversi), e che si protrae persistentemente per una data estensione come una serie qualitativamente riconoscibile nel tutto e nelle parti: esso è detto inesauribile perchè si rinnova astrattamente subito dopo che lo si era supposto esauribile ed esaurito. Quindi basta l'aver sorpassato una volta o poche volte il limite creduto insormontabile, perchè nasca l'idea della possibilità infinita, che in fondo è quella della impossibilità del finito definitivo: questa idea però si sviluppa quanto più precise e numerose sono le determinazioni finite, perchè in questo caso alla impossibilità di limitarsi ad esse si aggiunge, come dicemmo, la coscienza di un più complesso sistema di condizioni di quella impossibilità, o una impossibilità moltiplicata e più sicura. Due sono adunque qui i fatti importanti: la relatività del concetto di infinito riguardo alla sua estensione, e la relatività sua rispetto al finito come tale. L'infinito è il finito posto nella sua vera luce, ossia presentato non come un tutto indefinito, ma come un punto di partenza,

una individuazione, un limite, che segna un « al di qua » e un « al di là ». Un finito al quale non corrispondesse la possibilità infinita, sarebbe un semplice indeterminato nè ben finito nè veramente infinito: invece la possibilità dell'infinito si introduce quando si comprende un tutto e se ne vede, per così dire, il limite esterno e quindi l'« al di fuori », l'« al di là ». Per esempio l'« uno » è appunto l'inizio di una serie infinita, perchè è un concetto subito affermato e subito superato: e l'infinito è più facilmente asseribile delle unità astratte che di unità concrete, perchè queste ultime, essendo accompagnate da rappresentazioni complesse, sono in certo modo più ingombranti per la coscienza, meno rapidamente affermate, e quindi meno facilmente afferrate e superate, mentre quelle astratte costituiscono piuttosto degli elementi quantitativi più sintetici ed identici che non quelli qualitativi empirici.

L'infinito è, in certa qual maniera, un processo di pensiero mediante cui si circoscrive sempre più esattamente il finito e lo si rinserra in limiti rigorosi. L'infinità degli elettroni è un concetto, oltre che più complesso, anche più immediato che non la infinità di sistemi cosmici analogi alla Via Lattea, perchè l'elettrone, per la sua piccolezza immaginata, è meglio individuato, e più afferrabile e superabile dalla coscienza. Quindi la crescente individuazione determinata del dato nella coscienza, fa sì che in questa si presenti la idea dell'infinito come più spontanea e più densa o intensa di fattori nella totalità rappresentativa mentale. Ma ciò conferma la ipotesi nostra della relatività del concetto di infinito. Anche la idea di un infinito indipendente dal nostro pensiero, dell'infinito concepito come identità dell'uno e del tutto, o come corrispondenza biunivoca della parte al tutto, non sono che apparenze di un infinito assoluto; perchè anche qui si danno condizioni che pongono questo infinito come un tutto realizzato, affermato in un dato momento dal nostro pensiero, identico come insieme e come parte ossia unico, e quindi avente i

veri caratteri della infinita totalità. Perciò anche un tale infinito è un concetto relativo, che può essere superato.

Altrove dicemmo che due condizioni essenziali si danno per la origine della idea dell'infinito: il rinnovarsi del contenuto empirico e la persistenza dell'attività del nostro pensare astratto. A queste due condizioni corrispondono quelle, qui sopra accennate, della relatività dell'infinito rispetto al finito, e alla propria estensione e intensità come processo di pensiero. Difatti codeste quattro condizioni convengono in queste due: che il fondamento dell'idea dell'infinito è pur sempre il contenuto empirico rappresentativo, ma che questo contenuto è unificato e sintetizzato in astratto del pensiero, e sta quindi in rapporto alla qualità e intensità di quel contenuto e al grado a cui è giunto il processo di sintesi, di analisi e di astrazione.

In fondo, la base del concetto di infinito sta adunque per noi nella funzione progressivamente determinativa del pensiero: risultato di essa è il concetto progressivamente distinto ed esatto del finito e, in corrispondenza di questo, anche del concetto di infinito. Finito ed infinito sono adunque termini correlativi, e lo sviluppo dell'uno è in rapporto diretto di dipendenza con lo sviluppo dell'altro. Non si tratta però semplicemente della opposizione di « finito » a « non finito ». Ciò significherebbe l'affermazione separata di ciascuno dei due termini con la esclusione dell'altro, ossia la insistenza su un termine solo identico a sè stesso, non contraddittorio. Invece la opposizione è nel nostro caso un processo dialettico integrativo, con la partecipazione e la cooperazione necessaria di entrambi i termini. Difatti l'unità quantitativa stessa, come altrove osservammo, non sarebbe tale senza la contrapposizione di una unità prossima, e di altre meno prossime unità tutte poste a confronto, riconosciute identiche logicamente in astratto, sebbene con differenze qualitative; e d'altra parte la serie interminabile delle unità non sarebbe tale ove perdesse il suo essenziale carattere di serie di elementi unitari individuati.

La crescente determinazione e unificazione del dato, se rende questo sempre più definito, lascia sempre più vuoto il rimanente campo di coscienza più esteso e capace. Sicchè ne risulta questo fenomeno: che quanto più il pensiero si fa determinativo della realtà, tanto più riesce ad afferrarla ossia a definirla, ma nello stesso tempo tanto più essa realtà gli sfugge aparendogli come inesauribile. La maggiore determinazione si risolve in fondo nella impossibilità di arrestarsi ad essa; ed è ciò che avviene nella matematica soprattutto, ove le determinazioni sono le più sottili e rigorose, come l'unità, il simbolo, il punto inesteso generatore di estensione, il limite, il continuo, il numero irrazionale, l'infinitesimo tendente a zero, e tutte le altre che sono il limite delle determinazioni empiriche, in quanto le trascendono infinitamente. Se si considera l'infinitamente piccolo, si trova che questo è appunto la quantità, la quale, come più rigorosamente individuata di qualsiasi quantità assegnabile, non giunge ad esaurirsi mai: esso, ove sia pensato come dato rappresentativamente, costituisce già una quantità estremamente finita, entro la quale rimane posto per un numero interminabile di altre quantità infinitesime. Anzi, come già dicemmo, il fatto che il concetto di infinitesimo tormenta la nostra mente in un modo particolare e che non può pensarsi una quantità ultima per piccolezza, sebbene continuamente la si cerchi, dimostra per noi chiaramente anzitutto che non si può astrarre dall'idea di « piccolo » e quindi dal contenuto rappresentativo di un minimo, poi che la determinazione più precisa si cerca nel senso della piccolezza rappresentativa e quindi della maggiore possibilità di afferrare, unificare, e definire il dato della coscienza; infine che anche un minimum in tal modo concepito è sempre per il pensiero un complesso, una unità risultante, anzi è quella massima, in cui si possono rintracciare sempre più facilmente elementi in numero infinito. Tanto è vero che la decomposizione di una grandezza in parti è per il matematico non indefinita, ma qualunque: egli finge,

per convenzione, di giungere gradatamente al limite; ma in realtà o vi passa senz'altro, fingendo di aver esaurita tutta la serie pensabile dei trapassi, o non vi giunge mai in effetto, ma solo finge di arrivarvi dopo aver soddisfatto ad una quantità di approssimazioni, il cui numero non lo preoccupa essendo qualsivoglia, indifferentemente. — Ma allora sempre meglio determinare equivale a sempre meno concludere per la vera definitiva determinazione. Quanto più esattamente circoscriveremo l'universo, tanto meno esso ci apparirà definitivo e soddisfacente. Quanto più apprezzeremo i minimi momenti della nostra vita psichica, tanto più intensa ci apparirà la serie temporale. Quanto più piccoli gli elementi della materia, tanto più inesauribile l'universo.

Sicchè, risolvendosi in siffatto modo il finito nell'infinito e l'infinito nel finito, è evidente che il risultato della conoscenza sempre più determinata non può che essere, secondo noi, negativo. Essa tende costantemente a passare dal finito ad un'ulteriore definizione; anzi non si conosce e non esiste sostanzialmente che ciò che è il più rigorosamente determinato, ossia il sempre crescente rigore sistematico determinativo: man mano che si compie questo processo, la determinazione crescente diviene sempre meno sufficiente; la sintesi finale sempre più diviene esigenza e sempre meno un soddisfacimento; onde può dirsi che tanto nell'uno che nell'altro caso la indeterminatezza misteriosa del primitivo conoscere permane sotto altro rispetto anche nell'ulteriore sviluppo di conoscenze. In fondo, l'ignoto mistero dell'universo che era negli antichi miti, è rimasto mistero pur entro le prime fantasie religiose, e nelle dispute teologiche, o nelle filosofie naturali, o nei sistemi filosofici idealistici o empiristici, metafisici o positivi, oggettivi o soggettivi. Quale differenza essenziale sta per lo spirito umano tra l'idea di una sostanza indefinibile, o di un substrato illimitato, o di una essenza trascendente, e quella di uno sviluppo interminabile di forme, o di un processo infinito teleologico, o di un infinito matematico? Ove si pone

l'idea di un trascendente o di un inconoscibile, il mistero è confermato dalla stessa indeterminatezza con cui è pensato; mentre, ove si nega il trascendente e si avvalora il criterio empirico, si giunge a qualchecosa di equivalente, o alla insufficienza della esperienza o alla inesauribilità della ricerca. La storia della filosofia ci fa conoscere questo eterno malcontento dello spirito umano, che non si acquieta nel dogma, che investiga nella scienza, che spera nella religione, che infinitamente si sviluppa e si espande, invadendo sempre nuove parti del mondo della natura e dello spirito, senza cessar mai la sua progressiva marcia in avanti. Ma esso non ottiene la definitiva conoscenza; questa si sviluppa e trionfa solo nella volontà di ottenerla. Ed è appunto in ciò la migliore conferma, a nostro giudizio, di quella relatività del concetto di infinito, che abbiamo sin qui sostenuta. Relatività che deve pur essa intendersi non come principio costante, ma come un divenire, una possibilità, ossia a guisa di rapporto soggetto a trasformazione e sviluppo. Se il pensiero nostro sa creare un infinito corrispondente alla più rigorosa determinazione di cui ora è capace, esso non ne ha ancora posto l'ultima, la definitiva. Quanto più irriducibile ed unico è il dato pensato, tanto più esso è sorpassato e perduto; ma insieme tanto più intenso è il processo spirituale che lo ha determinato mediante prodotti di fusione e di sintesi psichica, ossia tanto più attivo e volitivo un tale processo.

Ora, se il pensiero è un processo interminato, lo è appunto perchè è attivo; ma è tanto meno terminato appunto quanto più è attivo, e viceversa è più attivo e volontario quanto meno si accosta al limite desiderato, alla sintesi ultima. In questo caso esso crea rapporti sempre più complessi e numerosi, trasformandosi in un processo sempre più rapido ed astratto, da esaurirsi continuamente. Onde l'infinito cessa di essere un concetto chiuso, o un principio o un postulato metafisico, o un ordine sistematico di conoscenze, una norma o una regola; e non è neppure un pro-

cesso di pensiero regolato da leggi invariabili, ma una tendenza, la cui legge teleologica può dirsi ridotta allo sviluppo progressivo, voluto più che non sia subito. E questa non va intesa oggettivamente come un processo mentalmente rappresentabile, ma al contrario come cosa voluta da noi, non mai abbastanza ottenuta, non ancor conosciuta perchè ancor da crearsi. È un processo che va dall'indefinito della rappresentazione al definito e all'infinito astratto progressivo. Ossia è il processo attivo e volitivo per eccellenza. È questa essenza di volere che costituisce per noi il vero infinito, quello che non si esaurisce mai, perchè ad ogni limite trovato risorge con moltiplicata energia di progresso, quanta può trovare in sè stesso lo spirito umano. Ogni confine non potrà mai esser tanto sorpassato quanto dalla volontà di superarlo: sicchè tanto più potremo parlar di infinito progresso quanto più col nostro volere concorreremo a promuoverlo, dal momento che il suo definitivo valore non è posto ma è sempre da ottenersi. Così, nel campo metafisico e in quello della conoscenza, il vero è quello che più corrisponde alla fusione, alla sintesi ultima mentale, destinata a soddisfare l'esigenza definitiva di tutta l'attività conoscitiva, sentimentale, volitiva. Ma anche qui, quanto più ottenuta è quella unificazione o sintesi finale, tanto più ne risorge la esigenza, tanto più vi si tende, la si vuole. Ma anche questa volontà non è definitiva: anch'essa non ha limiti, estendendosi dall'iniziativa individuale alla cooperazione sociale progressiva e volontaria. Una vasta associazione umana, dotata di una volontà complessa ed unica sempre più rapida ed energica, va man mano assumendo figura grandiosa e distinta. Le conquiste, i beni, i valori, ciò che nel campo della determinazione conoscitiva sono i limiti, i dati, aumentano; sempre maggiori bisogni ed esigenze vengono riconosciute, ed altre ci prepariamo a conoscere e soddisfare. Onde, non nel solo ambito del conoscere, ma in tutta la sfera della nostra attività, sino alle più imponenti risoluzioni collettive, si manifesta una espansione

infinita di energia spirituale, che, quanto più realizza, tanto più anela a realizzare; quanto più si svolge, tanto più vuole essere svolta, sorpassando il più possibile sè stessa. Si consacra per tal modo quella che ci sembra l'idea più grandiosa di un infinito, la immensa e progressiva ascensione spirituale attiva, l'accrescimento volutamente illimitato del valore dello spirito, il volere e il superarsi, senza arrestarsi mai ad un fine. — Una prova è data, secondo noi, dalla crescente volontà di vivere dell'umanità. Mentre i popoli primitivi immaginano una vita ultraterrena che prolunga quella terrena individuale, le popolazioni più evolute concepiscono piuttosto un immortalità dell'organismo sociale, ed annettono maggior valore al sacrificio individuale di fronte alla continuità del progresso volontario, alle esigenze profonde dello spirito attivo.

Ma qui, per approfondire questi concetti, ci riferiremo ad alcune idee intorno al progresso e sviluppo spirituale, prendendo l'occasione dal modo in cui la mente poderosa di Guglielmo Wundt ha concepito la natura dell'anima. Siccome la sua concezione ci sembra di importanza capitale, specialmente in rapporto al nostro concetto volutaristico dell'infinito, così crediamo opportuno di riportarne qui alcuni punti fondamentali, non senza avvertire che già in Kant¹⁾ era l'idea dell'inesauribile libertà umana. Il Wundt²⁾ anzitutto

¹⁾ In KANT la questione è attinente alla sua concezione di una morale trascendente di forma volutaristica (egli pure ammette l'attualità dello spirito, però dal punto di vista della psicologia empirica). La volontà è un potere trascendente, soprasensibile, sebbene d'altra parte immanente in quanto è impulso alla espressione; sta ad ogni modo sotto una legge generale imperativa, trascendente la causalità empirica e fuori dell'intuizionismo, avente un primato in confronto dei fondamenti del conoscere, contrapposta a questo come il credere al sapere, intellegibile e libera. — Cfr. KANT, *K. d. r. V.*; *Die metaph. Anfangsgr. d. Naturw.* — V. anche PAULSEN, *Kant*; Volkelt, ecc.

²⁾ *Grundz. d. physiol. Psych.*, V Aufl. (v. anche la VI) Bd. III, S. 725, 744-45, 756 ff.; *Ueb. psych. Kausalität*, Philos. Stud., X, S. 26 ff.; *System d. Philos.*, III Aufl. (1907), Bd. II (6. Abschn., *Grundz. d. Philos. d. Geistes*) S. 136, 145, 168, 174, 188, 192, 200, 205 ff.; *Einleitung in d. Philosophie*, V Aufl. (1909) S. 250-1, 345, 402, etc.; tutti cit.

avverte che, come meccanica ed energetica sono due modi opposti di intuizione della natura, così nel campo dei fenomeni vitali in genere si trovano di fronte meccanismo e vitalismo, l'uno con la considerazione causale meccanica, l'altro con un principio teleologico. Ma il vitalismo propriamente detto si distingue ancora dal concetto animistico che è affine a quello della energetica aristotelica, perchè mantiene la separazione della parte psichica dal campo dei processi naturali (tra questi assegna un posto speciale ai fenomeni fisici della vita), e include il concetto di una forza attiva finale, la quale ha analogia con le nostre rappresentazioni finali, ma non è una tale rappresentazione, pure assumendo un significato teleologico quasi esclusivo di fronte alla concezione causale delle condizioni meccaniche e chimiche. — Ora nei processi vitali psico-fisici si impone soprattutto il concetto della causa finale. Ivi si comincia con un membro iniziale, ossia con una rappresentazione accompagnata da un forte sentimento e designata comunemente come motivo, indi, dopo un certo numero di membri intermedi mutantisi, si termina con un'azione psichica, con un movimento esterno. E sono propriamente gli atti di volere, (come atti di impulso, di volizione, e di scelta) che noi, dai movimenti spontanei dei protozoi salendo sino alle più alte manifestazioni della vita umana, assumiamo come forme tipiche dei processi psicofisici. In tali atti le reali rappresentazioni di scopo acquistano un significato causale, ossia si comportano esse stesse come cause dell'atto. Dal punto di vista psico-fisico, all'eccitamento centrale, che fisiologicamente può considerarsi come il momento iniziale di un movimento volontario, devono ancora già presupporci ulteriori condizioni fisiologiche a noi poco conosciute; onde qui la spiegazione causale fisiologica non essendo sufficiente, subentra il bisogno di passare ad un altro campo non immediatamente adeguato a quella e di risalire ad un momento iniziale psichico, iniziando così una serie causale psico-fisica. In questo caso il concetto della causa fi-

nale è empirico, nel senso che non presuppone le mistiche energie vitali della teleologia biologica, non pone cause fisiche sconosciute, agenti analogamente alle energie spirituali, e neppure potenze spirituali ancora inconscie e perciò empiricamente indimostrabili, e nemmeno idee creatrici trascendenti la realtà empirica. Ciò che vi si manifesta è invece il nesso di motivo ed effetto. Ma i motivi finali non sono già, come le energie vitali, anticipazioni dei loro effetti; bensì sono cause accanto ad altre cause, che concedono al decorso dei fenomeni un carattere finale, senza che, con ciò il motivo finale contenga in sè come rappresentazione l'effetto che è solo raggiunto alla fine. Per esempio l'animale, che nella lotta per la propria nutrizione e per la propagazione, acquista man mano proprietà che consolidano la conservazione sua e della specie, non ha, nei suoi atti diretti al raggiungimento del più vicino risultato oggettivo, alcun presentimento di ciò che è il riverbero dell'agire finale, originariamente considerato in tutt'altro senso, sull'agente stesso: e se anche le rappresentazioni accompagnanti i motivi vengono a trovarsi prossime ai loro ultimi effetti, i risultati dell'azione oltrepassano le rappresentazioni finali contenute nei motivi originari e presenti soltanto come oscuri elementi accompagnatori dell'impulso; quindi cadono in un ambito che prima non poteva presupporli. E' da ciò che ha origine la famosa eterogenesi dei fini, che il Wundt considera come un principio capitale dello sviluppo psichico. Se l'azione dell'ambiente è puramente causale, non si deve dimenticare che i più bassi esseri viventi hanno proprietà essenziali degli organismi animali elementari, e che le reazioni che essi compiono alle azioni esterne, posseggono chiaramente il carattere dei movimenti impulsivi, i quali fanno concludere per sensazioni e sentimenti accompagnatori, e in genere per i processi, per quanto oscuri, di coscienza. Le piante stesse, come mostrò il Pflüger¹⁾, com-

¹⁾ *Die teleologische Mechanik d. lebendigen Natur*, Arch. f. d. ges. Physiol., Bd. XV, 1877, S. 57 ff.

piono reazioni agli stimoli esterni, le quali rammentano i processi di ricambio materiale, che in tutti gli organismi elementari si compiono originariamente secondo il tipo dei processi animali di assimilazione e decomposizione. Insomma queste reazioni mostrano anch'esse il carattere dei movimenti animali impulsivi, e danno a conoscere quelle auto-regolazioni che hanno la loro prossima analogia con le manifestazioni vitali dell'uomo e degli animali superiori, cioè sensazioni conscie, sentimenti e moti impulsivi, e quella in generale mancata coincidenza di motivo finale e risultato finale. Nelle piante lo sviluppo totale morfologico si riferisce in più alta misura alle condizioni esteriori del loro sviluppo, e però nella serie di queste condizioni l'originario momento iniziale psicofisico agisce nel senso che i rapporti di organizzazione inducono tuttavia alla considerazione teleologica ¹⁾. — Ora, se questi criteri causali-teleologici si impongono dal punto di vista psico-fisico, da quello puramente psicologico si impone la considerazione dei contenuti immediati di coscienza; considerazione concreta in quanto contiene soltanto dati fatti singoli della nostra percezione, e intuitiva in quanto si dirige sul dato della espe-

¹⁾ Interessante è ciò che si legge nel volume di GUIDO VILLA, *La psicologia contemporanea* (Torino Bocca, 1.^a edizione, pag. 191 e segg.; v. anche la 2.^a) sull'antico animismo, che immaginava una animazione generale della materia (ilozoismo), a cui faceva contrasto la concezione meccanica atomista, combattuta a sua volta da Platone e Aristotele con la distinzione tra fenomeni fisici e fenomeni organici (tra essi l'anima, divisa in vegetativa, irascibile, razionale, ecc.). Il vitalismo (GALENO, ecc., e modernamente ALB. HALLER e G. MÜLLER) considerava i fenomeni vitali come affatto diversi dai materiali, e trovò opposizione nel meccanicismo scientifico della metà del secolo XIX. Il neo-vitalismo (BUNGE, ecc.) propugnò ancora il principio vitale, la grande complicazione di molti fenomeni vitali e la possibilità di una forza vitale.

Notevolissimo è poi ciò che il VILLA (op. cit., pag. 591 e segg.) riferisce delle leggi psichiche del WUNDT (v. anche del VILLA il bel volume *L'idealismo moderno*, specialmente nei capitoli « La psicologia » e « La filosofia »).

rienza ma senza tutte le restrizioni ed astrazioni concettuali; mentre la fisiologia, come scienza della natura, dovendo ricorrere pel contenuto materiale del dato oggettivo a determinazioni concettuali astratte, elimina gli elementi soggettivi della percezione e ritiene come dato intuitivo soltanto gli elementi formali (tempo e spazio) risultanti da quella eliminazione. Il punto di vista psicologico, a differenza di quello psico-fisico, fa sì che i nessi psichici intermedi non hanno più soltanto il significato di puri rappresentanti di una data posizione, ma bensì lasciano apparire i fenomeni nella loro realtà immediata e intuitiva: quindi, al posto degli eccitamenti nervosi, dei movimenti muscolari, delle rappresentazioni di moto, son sostituiti (per gli atti volitivi) immediati contenuti di coscienza, i quali nel loro insieme e nel loro nesso più o meno regolare di principi e conseguenze, si manifestano come un nesso causale puramente psichico.

Il nesso psichico tra motivo ed effetto si distingue per ciò, che nel motivo non è ancora contenuta la conseguenza effettiva, ma soltanto la direzione in cui si muove la serie causale che conduce all'effetto. Quindi ciascun nesso psichico è insieme causale e finale; ma finale non nel senso regressivo come avviene della causalità naturale, bensì in senso progressivo in quanto lo scopo stesso divien causa e come tale precede l'atto. Per questo avviene anche che tale scopo agente come motivo non è identico all'effetto, ma vi è piuttosto discrepanza tra lo scopo stabilito e lo scopo effettuato: discrepanza, da cui deriva nel campo psichico il giudizio finale, in quanto da un lato si confrontano gli effetti coi motivi che contengono la direzione verso i motivi stessi, e si avvalorano i motivi considerando gli effetti che se ne attendono. In tal modo si ha nel campo psicologico il giudizio di valore, che è a sua volta possibile nelle due forme soggettiva ed oggettiva. La forma sua soggettiva misura i motivi secondo la loro naturale azione conseguente, ed è quindi un giudizio di valore dei senti-

menti, del sentire dell'uomo, e quindi della sua personalità. Il giudizio di valore oggettivo invece misura gli effetti delle azioni secondo la loro importanza e il significato loro per i motivi generali ed i fini dell'agire umano, e perciò considera i sentimenti e le personalità in modo mediato come punti di partenza e sostegni naturali.

Ne viene che il giudizio delle conseguenze, rispetto al nesso ininterrotto dei fini stabiliti dall'uomo, è diretto soprattutto agli effetti delle azioni, e presuppone che ciascuna conseguenza divenga essa stessa a sua volta fonte di nuovi motivi, e si ingrani così nello sviluppo totale della vita spirituale.

E, poichè ogni sviluppo è determinato in fondo dalla idea del perfezionamento e da quella del valore, si comprende che il pensiero dello sviluppo stesso ha radice nel campo dello sviluppo spirituale, da cui si estende al mondo esterno e quindi nuovamente a quei processi naturali che sono in più stretto rapporto con lo sviluppo spirituale, vale a dire con i processi della vita. E da questo punto di vista, causalità psichica e fisica cessano di essere soltanto forme conoscitive che si sopprimono a vicenda, ma sono tali che si completano, giacchè entrambe si connettono a punti di vista differenti, che però si appartengono di fronte ad un solo contenuto di coscienza.

Da queste considerazioni il Wundt passa direttamente al concetto dell'anima, e fa notare come sin dall'epoca del pensiero mitologico sia venuto il pensiero di una sostanza indipendente, diversa dal corpo, a lui congiunta per sempre o per un certo tempo, spirito o demone, che poi nel pensiero filosofico si tramutò nella sostanza dell'anima. Quest'ultimo concetto conservò, come residuo delle antiche rappresentazioni, la indipendenza dell'anima dal corpo, e la persistenza nel cambiamento degli stati interni e nei rapporti col mondo esterno corporeo: concetti rimasti quasi invariati da Platone a Cartesio e più in là. Da principio due grandi concezioni si stabilirono: o non si dà (così l'una

concezione) che un genere di sostanze, le corporee, e i fatti dell'anima si spiegano con essa; oppure (così l'altro modo di vedere) non si dà che una sostanza, quella spirituale, e i corpi stessi non sono che rappresentazioni di uno spirito o di molti spiriti: oppure ancora si affacciava una terza ipotesi, che non si dia in verità se non una sola sostanza soprasensibile o possibile in una unica essenza infinita (Spinoza), o in innumerevoli essenze semplici (Leibniz, e anche Herbart). — Ma nella sostanza assoluta infinita, di Spinoza la personalità scompare come un modo transitorio dell'essere, e l'anima semplice di Herbart è un concetto privo di contenuto.

Invece un concetto meno remoto di quello mitologico, divenuto poi trascendente, della sostanzialità dell'anima, è il concetto dell'anima attuale. Questo data da quando si tentò di trattar la psicologia come scienza sistematica, ossia da Aristotele, il quale nel « De anima » designa appunto l'anima come l'« attualità, agente con finalità, del corpo vivente », cioè come il complesso dei fenomeni vitali.

Aristotele, però, designando la ragione attiva come la più alta delle facoltà dell'anima, la rende quasi una essenza indipendente, separabile dal corpo. Parimenti Cartesio fece valere come la vera e propria anima il νοῦς ποιητικός, cioè la ragione pensante, assegnando le attività inferiori dell'anima alla spinta meccanica dei processi corporei. Kant diede il colpo di grazia al concetto trascendente della sostanza dell'anima, che si era rifugiato in seno alla metafisica, e, mostrando a nudo la ingannevole natura delle prove su cui si fondava la cosiddetta psicologia razionale, si pose piuttosto dal punto di vista della psicologia empirica dell'associazione di Hume, che aveva definito l'anima un « fascio di rappresentazioni ». Però Kant non disse con ciò la sua ultima parola, se si pensa all'altro campo kantiano della credenza pratica religiosa, e se si considera ancora la speculazione consecutiva a Kant, la discussione della « cosa in sè », la filosofia hegeliana e il mondo dei fenomeni esplicazione dell'essere assoluto.

Nondimeno queste idee fecero sì che anche l'anima individuale comparisse come il nesso immediato dei fatti animici, come una parte di quella infinita realtà dello spirito universale che trae ogni importanza dalla sua intima realtà attuale. È ben vero che coi vecchi concetti della psicologia delle facoltà passati nella filosofia romantica, la psicologia si era quasi ridotta a esser trascurata entro il sistema di una dialettica a tre termini; ma ciò nondimeno rimase l'insegnamento che ogni divenire spirituale, e così anche il fatto dell'anima, è attualità, è realtà vissuta immediatamente, e che essenza e fenomeno spirituale sono la medesima cosa e soltanto diversificano in quanto sotto la essenza intendiamo il nesso dei fenomeni stessi: insomma la filosofia speculativa della romantica ha trasferito l'essenza dello spirito nella realtà degli sviluppi spirituali. D'altra parte la filosofia dell'associazione dei tempi dell'illuminismo, pur avendo designato l'anima un fascio di rappresentazioni, e quindi imposto al complesso della vita dell'anima una espressione insufficiente e falsata intellettualisticamente, nondimeno anch'essa aveva insegnato che si ha a che fare con la reale vita dell'anima e non con una sostanza trascendente nascosta dietro di essa.

Ora dice il Wundt che la odierna filosofia cerca appunto di utilizzare la verità che da quelle due correnti deriva, evitando gli errori che vi si contengono. I quali errori si riassumerebbero in quello schematismo esteriore che viene contrapposto al fatto reale: schematismo che, se è empirico, conduce ad una analisi della esperienza intrapresa senza metodi e soccorsi sufficienti, e, se è logico, riesce un ordinamento esterno ma non dei fenomeni, bensì dei concetti generali ed indeterminati a cui si era abbandonata la psicologia pre-scientifica. Ora la psicologia odierna, liberatasi dalle superficiali generalizzazioni, considera l'anima come il fatto dell'anima; quindi non applica un nuovo concetto dell'anima, ma adopera ancora quello, a cui si deve ricorrere allora che si vuole accostare qualche fatto

dell'anima; e con ciò l'anima concepita come sostanza viene ad essere, per la conoscenza reale della sua propria vita, un concetto metafisico inutile, a cui si ricorre proprio quando la psicologia comincia a oltrepassare i limiti del suo territorio.

Malgrado ciò, quando si affaccia la questione dei rapporti d'anima e corpo, ritorna in qualche modo ad aver importanza l'anima sostanziale, almeno come controposta al principio dell'attualità della stessa. — Ora il concetto dell'anima deve appunto uscir chiaro dalla soluzione di questa questione. Due sono i punti di vista da cui essa si considera: l'uno è quello della esperienza pratica della vita, l'altro quello della analisi scientifica dei fenomeni. In generale i risultati della scienza riescono in contraddizione apparente coi fatti della vita pratica, tenuto conto che in tal caso non si tratta veramente di fatti, ma di opinioni più o meno transitorie. Nel caso del problema di corpo e di anima, questo, dal punto di vista della esperienza pratica della vita, non può dirsi propriamente che sia un vero problema, poichè un fatto immediato della realtà è che corpo e anima si appartengono. Persino nelle primitive rappresentazioni mitologiche, da cui è uscito, come vedemmo, il concetto della sostanza dell'anima, le ombre e gli spiriti, le anime separate non sono essenze incorporee ma solo ripetizioni della reale essenza animata. Importante è il fatto che una tale unità, primitivamente rappresentata, di anima e corpo, è rimasta; e non soltanto riappare nella esperienza pratica della vita come data immediatamente e come insolubile, ma costituisce anche per la scienza un presupposto inamovibile, in quanto, per esempio, la scienza dello spirito considera l'uomo totale. I due rami opposti, la ricerca sistematica della natura e la psicologia, quando della rispettiva astrazione del lato psichico o di quello fisico dei fenomeni della vita fanno un uso ulteriore, affine a quello che ne fanno quei rami del sapere che meno si scostano dalle necessità della vita pratica, non giungono più a porsi la questione

della unità di anima e corpo: tutt'al più in questo caso il naturalista, finchè rimane nel suo campo, astrae da quelle proprietà degli oggetti, che appartengono al lato spirituale delle cose: e lo psicologo fa altrettanto dal lato opposto. Sicchè è chiaro che in circostanze come queste una tale astrazione unilaterale non può condursi con la massima absolutezza, perchè si presenta dinanzi come ostacolo insormontabile la unità effettiva di anima e corpo, la quale non è un presupposto che si contrappone alla esperienza, ma al contrario è una esperienza che tutte le astrazioni e separazioni scientifiche non riescono a sradicare.

La separazione che più tardi ha luogo tra la scienza della natura e la psicologia, è originata da quel principio di suddivisione del lavoro, a cui si deve anche la separazione delle singole scienze. Ma non deve dirsi per questo che le singole discipline, naturali o spirituali, si riferiscano a diversi substrati delle cose o a differenti sostanze, bensì piuttosto a diversi punti di vista. Quanto alla separazione tra scienza della natura e psicologia, essa non è identica a quella che sussiste, p. es., tra zoologia e botanica; e la ragione sta in ciò, che corpo e spirito non sono due corpi come lo sono la pianta e l'animale, inoltre che non si dà una proprietà psichica conveniente a tutte le forme dell'essere psichico; poi, mentre sul compito della scienza della natura non può sussistere alcun dubbio, su quello della psicologia non regna egual sicurezza. Alla psicologia si ascrive generalmente la « esperienza interna » o il « contenuto della coscienza », come se a questo contenuto non appartenessero anche gli oggetti della scienza della natura: e, siccome il compito di quest'ultima è qualcosa di più noto, e in genere si suol procedere dal noto al meno noto, così è forse più opportuno stabilire prima il compito della scienza della natura, per vedere poi in che differisca da quello della psicologia, e quale sia propriamente l'ufficio di questa.

Per ottenere questa distinzione, bisogna anzitutto osservare che anche la scienza della natura ha a fare con

contenuti di coscienza. Però essa si differenzia dalla psicologia non pel contenuto come tale, ma, come vedemmo, per il diverso punto di vista. Questo per la scienza della natura è espresso in quel « mondo esterno », a cui appartiene anche il corpo del soggetto percipiente, e col quale si astraie e si elimina il più possibile ciò che ha origine in una qualche proprietà del soggetto percipiente, o che ad ogni modo rende impossibile una interpretazione non contraddittoria dei fenomeni oggettivi, come la qualità delle sensazioni considerata come un'apparenza soggettiva, mentre essa pel punto di vista naturale è da ricondursi al suo substrato oggettivo. La scienza della natura, quindi, sottrae dal fatto oggettivo i sentimenti e gli affetti, come non appartenenti ad esso. Ma allora ciò che in tal caso rimane è il fatto spaziale-temporale, i moti varii, i rapporti vicendevoli, dietro cui si suppone uno spettatore che però non influisce su di essi: e tutti questi fatti costituiscono per la scienza della natura delle cose reali in sè, pensate non come sostanze metafisiche, ma come substrati intuitivi spaziali-temporali dei fenomeni, a cui questi fenomeni vanno riferiti, non avendo essi di per sè una completa realtà se non in forza di quella fondamentale astrazione e di quei concetti ipotetici ausiliari.

Di fronte alla scienza della natura, la quale comprende tutto il contenuto della esperienza ma astraie dagli elementi pertinenti al soggetto, la psicologia fa oggetto proprio questi ultimi elementi; la psicologia, insomma, non considera un altro mondo, un altro substrato, ma la stessa esperienza in quanto è vissuta immediatamente dal soggetto percipiente. Gli oggetti della natura ricompaiono nella psicologia sotto un altro punto di vista; così un dato oggetto (pianta, minerale, ecc.) diventa per lo psicologo una rappresentazione spaziale, che consta di sensazioni di chiarezza e di colore, di sentimenti estetici elementari, ecc. Naturalmente anche lo psicologo non si contenta di constatare immediatamente un fatto, perchè lo scinde ne' suoi fattori e ne ricerca le sue condizioni; ma questi fattori e condi-

zioni hanno questo di caratteristico, che rimangono sempre contenuti di coscienza soggettivi, vissuti subito. In conclusione la scienza della natura e la psicologia considerano uno stesso mondo della esperienza, una volta dal punto di vista degli oggetti, un'altra da quella di colui (soggetto) che percepisce, sente e vuole: tanto l'una che l'altra devono poi mirare a non porsi mai in contraddizione con la immediata esperienza pratica della vita, e in ciò si accordano entrambe. Esse diversificano nei punti di vista pei bisogni dell'analisi, e perciò fanno anche uso di metodi diversi; ma in fondo, in quanto servono alle esigenze della vita reale, escono dalla unità del reale e a questa ritornano.

Tale unità, come è da attendersi, acquista una ancor maggiore importanza quando gli oggetti della osservazione sono essi stessi dei soggetti e ne hanno le proprietà, ossia sono degli organismi psicologici. Anche qui per la nostra concezione immediata, l'anima e il corpo loro costituiscono un essere solo; e soltanto si scindono in processi vitali fisici e psichici quando subentrano le esigenze di suddivisione scientifica, che fanno ammettere un punto di vista che deriva da quelle originarie astrazioni, le quali conducono alla doppia considerazione naturalistica e psicologica. E però va notato che, siccome appunto nei fenomeni naturali, compresi anche i fenomeni fisici della vita, si astrae dai processi psichici, così si rende tanto meno possibile il derivare le proprietà soggettive dai processi oggettivi o i processi fisici della vita da quelli psichici. Anima e corpo sono una unità, non una identità; si appartengono o, meglio, son proprietà appartenenti insieme all'essere vivente, ma non si confondono. Già per la intuizione pratica della vita sono irriducibili l'uno all'altra, e tanto meno lo sono nella scienza, ove i punti di vista son di necessità differenti. In quest'ultimo caso, essendo i due punti di vista, oggettivo per la scienza della natura, soggettivo per la psicologia, ben differenti, si impone la questione dei rapporti

fra i fenomeni considerati sotto l'uno e quelli sotto l'altro rispetto.

La questione spetta, dice il Wundt, all'esperienza, ma anche qui ha valore per la scienza. Ora l'esperienza ci avverte che certi fenomeni appartenenti ai gruppi oggettivi dei processi fisici stanno in regolare rapporto con altri che sono per noi fatti soggettivi immediati; e nondimeno non è a dire che i membri o fattori cosiddetti fisici del processo in questione si siano trasformati in quelli psichici; giacchè i due punti di vista differenti sussistono e si escludono a vicenda. In questo caso si danno relazioni di processi vitali fisici e psichici, che non sono identici, nè trasformabili gli uni negli altri, nè paragonabili in sè, ma tali che a certi processi psichici corrispondono regolarmente processi fisici. Allora tali processi li diciamo paralleli. Però ciò non significa che i due gruppi siano incomparabili assolutamente fra di loro, perchè le astrazioni che conducono ai concetti del substrato dei fenomeni naturali sono un mezzo che conduce a un tal concetto, il quale è ben diverso da quello metafisico della sostanza e non esiste per la psicologia, essendo passato tra i concetti oggettivi astratti. Quindi quel parallelismo tra le due classi di fenomeni non è affatto un principio metafisico.

Ben diverso era il pensiero di Cartesio, il quale trasportò il concetto della immutabilità della sostanza materiale anche sull'altro concetto della sostanza dell'anima, contrapponendo poi nello stesso tempo come contrarie e contraddittorie le proprietà delle due sostanze, estesa (materia non pensante), e pensante (anima non estesa); e per il rapporto tra entrambe egli pensava un'unità immediata di anima e corpo, come egli poteva trovarla appunto nella intuizione pratica della vita, sebbene a ciò si opponesse l'astrazione scientifica; ma, per quanto l'anima fosse da lui definita come non spaziale, per altro rispetto egli la faceva localizzata spazialmente e implicata nel meccanismo dei processi materiali di movimento, ossia in fondo la ren-

deva una specie di atomo materiale rivestito eccezionalmente della proprietà del pensiero. La concezione dell' « occasionalismo » si scosta meno da quella del suaccennato parallelismo, in quanto per essa anima e corpo son diversi del tutto e non possono agir l'uno sull'altro se non mediante un' « assistenza sovranaturale »: il corporeo e lo spirituale son paralleli, e questo parallelismo costituisce un che di meraviglioso, che la metafisica successiva cercherà di render razionale e necessario. A ciò la metafisica si volse in due modi: l'uno rigorosamente logico, l'altro più conciliativo sebbene arbitrario e, in fondo, fantastico; l'uno dello Spinoza, l'altro del Leibniz. Difatti in Spinoza materia e spirito sono attributi diversi, e però coincidenti tra loro, di una sostanza; a ciascun essere materiale corrisponde una idea di questo essere e viceversa, e perciò l'anima è la rappresentazione del corpo vivente che le appartiene, e questo corpo è la realizzazione oggettiva della sua idea. Invece in Leibniz l'anima e le monadi del corpo sono essenze in sè non disformi, collegate anzi tra di loro in una armonia prestabilita. Tanto in Spinoza che in Leibniz, adunque, il lato fisico e il lato psichico van paralleli, differendo soltanto in entrambi le premesse metafisiche, perchè nel primo (Spinoza) essi sono realtà immediate che lasciano apparire nel fondo una sostanza sovrasensibile infinita, e in Leibniz sono entrambe sostanze spirituali, anime, che coincidono intimamente e armonizzano nel fenomeno esterno. In Spinoza e in Leibniz è ammessa una legge metafisica universale e necessaria « a priori », secondo cui a un fatto psichico corrisponde qualcosa di fisico (e viceversa), come una sua immagine laterale o come un suo prestabilito processo parallelo.

Ma, con tutto ciò, vi sono differenze essenziali tra un siffatto parallelismo metafisico e quello che ha fondamento nei diversi punti di vista della scienza della natura e della psicologia. Anzitutto in quest'ultimo caso non fa più capolino la ipotesi metafisica della sostanza, sia questa uni-

taria o sdoppiata, ma è piuttosto accettato il concetto attuale dell'anima, secondo cui anima e corpo sono una unità in cui l'anima è soltanto il presupposto dei reali processi spirituali. Inoltre il parallelismo metafisico è trascendente, indimostrabile empiricamente, mentre l'altro parallelismo non fa che trasferire la unità immediatamente data di anima e corpo, nei campi della scienza della natura e della psicologia, ove avviene la suddivisione del lavoro; ma con questo trapasso esso non si limita nè all'unità primitiva dei due campi e neppure alla loro scissione, bensì mira nuovamente a sopprimere quella divisione netta dei due territori. Inoltre, mentre il parallelismo metafisico cerca di dedurre la esperienza psicologica dalle sue premesse, che tradiscono una considerazione intellettualisticamente deviata della vita dell'anima, il parallelismo, che il Wundt chiama euristico, non considera che ciò che immediatamente si offre come dato effettivamente alla osservazione soggettiva ¹⁾, e la immediata realtà dei fenomeni, non la natura metafisica delle cose. Come tale, rappresenta un ponte di congiunzione tra i due punti di vista, completantisi a vicenda, quello della scienza naturale oggettiva e quello soggettivo della psicologia. Nessuno di questi due contiene la realtà completa; e però quel principio del parallelismo li lascia sussistere entrambi, senza assimilarli l'uno all'altro. Una tale assimilazione sarebbe solo possibile o per la intuizione pratica della vita, per la quale, come sopra s'è visto, l'unità d'anima e corpo è immediata e si ribella alle scissioni inevitabili delle astrazioni scientifiche e delle analisi; oppure anche potrebbe aver luogo nella considerazione metafisica che alla unità data nella esperienza immediata del fatto corporeo e spirituale, fa corrispondere una unità metafisica che non è più immediata, ma ripresa e sorgente dalla sin-

¹⁾ Cfr. Wundt, *System*, etc., cit., II, S. 175; — Edm. König, *Aufsätzen z. Parallelismusfrage u. über psychophys. Kausalität*, Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik, Bd. 115, H. 2; u. Bd. 119, H. 1.

tesi che segue necessariamente alla analisi scientifica: sintesi che però esce dal campo della psicologia, per cui non costituisce più un problema.

Dice qui Wundt che però lo scendere al parallelismo tra moto atomico e sensazione, come fanno alcuni moderni biologi, ha quasi altrettanto senso quanto la fantastica idea di Paracelso che i minerali possedessero la proprietà di nutrirsi occultamente e di eliminare secrezione. Ciò che importa è che i processi psichici esistono tanto quanto i fenomeni della natura ove esistono nella esperienza; onde la stessa questione della correlazione del processo fisico a ciascun processo psichico nell'organismo vivente, non è una questione « a priori » appunto perchè è una questione di fatto, che può solo decidersi per via empirica.

Ciò che importa è che la psicologia fisiologica trova con la quasi certezza che non si dà alcun processo psichico elementare a cui non vada parallelo un processo fisiologico o un complesso di fenomeni fisiologici. Dal punto di vista dei contenuti di coscienza oggettivi o fisici però non sempre si trovano processi che abbiano un lato psichico. — Rispetto al rapporto non solo di tutti gli elementi psichici coi processi vitali fisici accompagnatori, ma ancora dei nessi di tali elementi psichici con quelli fisiologici, e rispetto alla corrispondenza dei due rapporti fra di loro, v'è a fare qualche distinzione. Non è detto che anche i processi fisici paralleli siano suscettibili di una qualsiasi risultante unitaria, che corrisponda a ciascuna risultante psichica. Il dire, p. es., che posson darsi nel cervello fibre di associazione destinate a procacciare l'associazione delle idee, o la missione di un collegamento di pensiero, è poco men che fantastico, non avendo ciò una base nella esperienza. Difatti quanto più tali collegamenti funzionali in entrambi i lati si rendono accessibili alla nostra analisi, tanto più chiaramente gli effetti risultanti da entrambe le parti sono tra di loro incomparabili. Non è dato scoprire come un qualsiasi ordinamento regolare di eccitamenti sensoriali e di movi-

menti riflessi si sviluppino in modo tale, che possano nascere sensazioni localizzate in guisa determinata, e come da un gran numero di siffatti collegamenti riflessi scaturisca alla fine l'intero mondo ben ordinato delle nostre rappresentazioni visive: ma soltanto ci è dato di tracciare le linee di relazione che vanno dal lato fisico a quello psichico, non appena si affacciano gli stessi effetti psichici risultanti, mentre in sè stessi i nessi in questione non sono paragonabili. È ben vero che anche in questo caso di formazioni più complesse si ripete ancora il medesimo rapporto che si stabilisce già tra gli elementi, e che quindi si tratta ancora di parallelismo e non di identità; ma ciò che importa stabilire è che nei nessi, nelle formazioni psichiche complesse, il rapporto si ripete in misura accresciuta, cioè in quanto sono disparati non solo i processi fisiologici corrispondenti agli elementi psichici, ma anche quelli che corrispondono ai loro nessi ¹⁾. Quindi le formazioni psichiche complesse si allontanano almeno di un grado di più dai loro processi fisiologici correlativi, e questo allontanamento o distanza aumenta man mano che le formazioni psichiche si fan più complesse. Ma appunto in questo senso si delinea il vero e proprio compito della psicologia come scienza speciale. La fisiologia di per sè, di fronte alla connessione dei processi psichici rimarrebbe incomprensibile, quand'anche il complesso dei processi cerebrali apparisse chiaro come il meccanismo di un orologio.

Ora la psicologia ha appunto a fare continuamente con processi psichici di connessione; quindi tanto più evidente è il suo ufficio, più che di dimostrare gli elementi psichici, di ricercare i loro collegamenti. Tale ufficio si compendia così nel ricercare le proprietà che contraddistinguono i nessi e i rapporti di quei contenuti di coscienza immediati, che noi chiamiamo processi spirituali: quindi le spetta indagare se esiste una causalità psichica con leggi proprie,

¹⁾ Cfr. anche VILLA, *L'idealismo moderno*, cit., pag. 306, e altrove.

in cui sia espresso il valore e il significato della vita dell'anima e dello sviluppo spirituale che vi si connette.

Ecco quindi presentarsi il problema della causalità psichica. Al quale premetteremo qualche considerazione, che il Wundt ¹⁾ fa, parlando dei fondamenti della filosofia dello spirito, e in generale di spirito e natura, e di quest'ultima considerata come il primo grado dello spirito. In quanto nel suo proprio campo il concetto della coscienza si mostra come la espressione formale per il collegamento empirico dei processi spirituali, esso è costretto ad annettere ai singoli substrati materiali derivanti dallo sviluppo biologico, certe unità di coscienza: ma in quanto dalla serie dei gradi di coscienza deriva la necessità di seguire a ritroso questa serie al di là dei membri empiricamente dati sino ai primi gradi e alle prime condizioni non date, si giustifica il pensiero da prima inaccettabile di un nesso limitato del fatto spirituale con certi complessi materiali. E se il regresso psicologico conduce al primo grado iniziale dello sviluppo di coscienza in cui il fatto spirituale vien solo pensato come un punto temporale, in opposizione al regresso relativo al concetto della materia corporea che termina ad un altro punto ideale, al punto spaziale, il continuo sviluppo della vita spirituale, come empiricamente si manifesta nelle differenze dei gradi di coscienza, fa sì che già nelle ultime unità concepibili della materia sian date le disposizioni dello sviluppo spirituale stesso. Onde si presuppone lo sviluppo dello spirito dalla natura, nel senso che la natura è un primo grado dello spirito, ossia è nel suo proprio essere un auto-sviluppo, una esplicazione dello spirito. Difatti dal punto di vista della conoscenza, nel concetto della sostanza materiale si considerano solo le relazioni esterne temporali-spaziali degli oggetti della esperienza, astraendosi dall'essere proprio delle cose; ma se il complesso dei fatti cosmici si deduce

¹⁾ Cfr. *System*, etc., II, S. 145, 174, 178, 179, etc.

dalle condizioni della causalità naturale, si deve però ricorrere, per il decorso totale di quei fatti, all'altra idea dello sviluppo, la quale trova la sua giustificazione vera e propria solo nell'applicazione del concetto di finalità, derivante dallo sviluppo spirituale, alle condizioni cosmiche in questione. Le formazioni della vita nei suoi diversi gradi, si comprendono nel loro ambito generale solo a patto di premettere che le forme superiori di causalità naturale che si dispiegano in esse sono nello stesso tempo effetti di energie spirituali. Insomma il fatto spirituale sarebbe la forma più alta dello sviluppo e lo scopo da presupporci alla vita organica, mentre il corpo vivente sarebbe lo strumento per la realizzazione di ogni creazione spirituale, e il mezzo, acquisito in conseguenza della forza organizzante dell'esercizio funzionale, per meccanizzare le attività inferiori spirituali e anche per perfezionare le attività spirituali stesse. È evidente adunque un rapporto scambievole dello spirito col suo immediato substrato naturale; in questo rapporto lo spirito è l'anima individuale, la quale entro quella serie di gradi, che adduce dal regno della natura in quello dello spirito, appare come il primo membro dello sviluppo dal lato dello spirito, precedendo le forme di sviluppo dello spirito totale e dello sviluppo storico. È adunque all'anima individuale che si riferisce immediatamente il problema della causalità psichica ¹⁾).

Nel « System » il Wundt fa osservare che, mentre il fisiologo e lo psicologo devono innanzi tutto essere ricercatori empirici e come tali studiare da due punti di vista differenti per necessità di analisi un medesimo contenuto generale di esperienza, la questione come debba pensarsi in fondo quella unità della natura umana, che è condizione di

¹⁾ Cfr. *System*, II, S. 148 ff., 168 ff.; — cfr. ancora del WUNDT, *Ueb. psych. Kausalität*, cit., Phil. Stud., X, S. 26, 75 ff.; — « Üb. d. Anwendungen d. Prinzipien in d. Geisteswissenschaften », *Logik*, II*, 2, S. 241, 382, 614 ff.; — *Ueb. d. Definition d. Psych.*, Phil. Stud., XII, S. 29 ff.; etc.

così diverse e però completantisi concezioni del reale, non è affatto più una questione empirica, ma è del tutto metafisica, che deve risolversi da un lato su basi teoretiche-conoscitive e dall'altro coi risultati delle scienze empiriche. La considerazione causale psicologica, per le proprietà stesse del suo oggetto, trapassa nella considerazione finale, onde anche i principi della causalità spirituale acquistano un carattere teleologico. Ma allora essi hanno la proprietà di essere subordinati a un principio generale di sviluppo, e hanno l'altra proprietà di applicare una misura di grandezza, che è diversa da quella della causalità naturale, (delle forze, delle masse e delle energie), ossia posseggono il principio di misura proprio della causalità spirituale nel senso della causalità finale in senso stretto, ossia la grandezza qualitativa del valore. Difatti si tratta lì della qualità dei contenuti spirituali di coscienza: ed i giudizi di valore devono intendersi nel senso che ai diversi oggetti del giudizio si attribuiscono diversi gradi di valore in confronto fra di loro; quindi lì il confronto di grandezze si stabilisce in quanto esso è necessario per trovare determinati principi sopra il rapporto in cui stanno i processi parziali che si succedono nello sviluppo.

Ciò posto, occorre fissare questi principi della causalità psichica, tenendo presente che il problema si riferisce all'anima individuale, come a quella che è all'inizio della serie di sviluppo spirituale, e osservando che però in essa ogni reale processo spirituale è già in realtà, non nella analisi, un composto, un complesso, un nesso.¹⁾

Ora qui sono a notarsi fatti di una importanza grandissima. — Anzitutto in questo campo spirituale il prodotto derivante da un numero qualsiasi di elementi è più che la semplice somma degli elementi, ed è anche qualcosa di più di un prodotto affine a codesti elementi e soltanto

¹⁾ *Grundz. d. physiol. Psych.*, cit., III, S. 778 ff.; — cfr. anche VILLA, *Psicol. contemporanea*. cit., ultima parte.

per la proprietà sua un po' diverso qualitativamente e quantitativamente. Questo prodotto è invece qualchecosa di nuovo, di incomparabile, per le sue proprietà intrinseche, coi fattori che hanno cooperato a formarlo; quindi è una risultante inattesa, che crea del nuovo, una risultante creatrice, non preformata, il cui carattere di valore è un grado nuovo e più alto. In queste risultanti, come per esempio in una rappresentazione spaziale, è a vedersi così un prodotto, in cui certi elementi hanno perduto la loro indipendenza, e la rappresentazione acquistò invece la nuova proprietà dell'ordinamento spaziale delle sensazioni. La stessa cosa avviene nei processi assimilativi che si connettono a ciascun processo percettivo¹⁾, nei sentimenti estetici elementari, e insomma in tutti i nessi psichici. D'altra parte ogni elemento costitutivo viene così a impostarsi nel tutto, perdendo o diminuendo la sua importanza di elemento isolato: così si danno in tutti i nessi psichici elementi dominanti e modificantisi, che trapassano del resto gli uni negli altri, cosicchè in certo grado ciascun elemento perde del proprio valore, ma il tutto è continuamente più ricco che non la somma delle sue parti. Ciò però non vuol dire — avverte il Wundt — che, se ciascun nesso o complesso spirituale crea nuovi valori, tutto l'universale mondo dello spirito sia soltanto un unico nesso o complesso, come avviene del principio della conservazione dell'energia, anzi della somma totale dell'energia, che ha valore per ciascun sistema dell'universo soltanto finchè ciascun singolo sistema siffatto rimane un sistema in sè chiuso. Le risultanti psichiche sono valori spirituali, le energie fisiche sono processi naturali misurabili in grandezze di lavoro meccanico. Principio delle prime è l'accrescimento, l'ascensione della energia spirituale del valore; principio dei processi naturali è la conservazione della energia meccanica del lavoro.

¹⁾ Cfr., per certe illusioni ottiche, la mia già citata memoria: *Ricerche speriment. sulle illusioni ottico-geom.*, ecc., 1909.

Siccome però entrambi si riferiscono ad un medesimo tutto di esperienza, così essi stanno tra di loro in rapporto scambievole, in quanto l'accrescimento della energia spirituale è connesso alle condizioni della conservazione dell'energia fisica, e in quanto l'apprezzamento di valore della energia meccanica e delle sue trasformazioni viene preso dal punto di vista delle energia spirituale di valore. L'accrescimento dei valori psichici trova così i suoi confini nel substrato della energia fisica, a cui è connesso; e d'altra parte la utilizzazione finale delle fonti fisiche di energia trova la sua regolativa nei fondamenti del giudizio di valore spirituale.

Dicemmo che ciascun nesso psichico offre un insieme unitario con nuove proprietà rispetto agli elementi che lo costituiscono. Ma ciò dimostra che le parti di questo insieme complesso stanno costantemente fra loro in relazioni determinate, da cui dipende la proprietà dell'effetto risultante, come reciprocamente il nuovo specifico carattere delle risultanti reagisce a sua volta sulle relazioni delle componenti; così in un complesso ritmico la singola battuta agisce, determinandolo, sul complesso totale, e viceversa la impressione totale che si connette a quest'ultimo reagisce su ciascun elemento (battuta) e sui rapporti di questi fra di loro, ecc. Quanto più complessi i nessi psichici, tanto più chiaramente le singole parti di un tutto spiccano come distinguibili fra di loro. Apparentemente, per esempio, in un singolo suono la intima fusione delle componenti elementari rende poco osservabili quelle differenze, perchè esse quasi scompaiono in una forma semplice; ma in un suono composto o in un complesso ritmico che decorre nel tempo, quel fatto della discernibilità delle parti si manifesta più facilmente; e ancor meglio si rivela nei complicati processi appercettivi associativi. In quest'ultimo caso, come già nell'esempio più semplice del ritmo, compare un tutto suddiviso nel tempo, onde si rende possibile una appercezione temporalmente separata dei singoli membri costitutivi. — Noi possiamo separare due dati contenuti semplici di

coscienza, per esempio due sensazioni, e paragonarle fra di loro. Ma questo è possibile solo a patto che quei due contenuti separati siano compresi in un tutto e siano in questo senso riuniti in una risultante, e però come tali essi siano non solo messi insieme, ma posti in relazione reciproca. È questo il caso della legge di Weber. Lo stesso principio della relatività è nient'altro che l'applicazione del principio generale delle relazioni psichiche al processo di confronto su accennato; anzi il carattere specifico della relatività psicologica consiste in ciò, che i contenuti parziali comparati fra di loro vengono solamente riferiti gli uni agli altri fra di loro, di modo che, non appena il confronto diviene quantitativo, non si ha più un'unità di misura per determinarlo. Il che è ben diverso da quanto si osserva nei confronti non più soggettivi ma oggettivi. In quest'ultimo caso, come del resto nelle proporzioni matematiche, ci si riferisce sempre, per il confronto, ad una unità di misura più generale e che perciò si trova all'infuori delle grandezze confrontate, mentre nelle relazioni psichiche ciò non si ripete. In queste, ossia nei confronti psichici immediati, in ciascun singolo caso manca quella unità di misura, appunto perchè i valori misurati gli uni con gli altri vengono posti in relazione soltanto fra loro stessi. La sola cosa che è subito data con essi, è il loro nesso per una rappresentazione risultante. E' ben vero che, in quanto quella rappresentazione rende possibile il confronto delle parti componenti, si dà luogo, per così dire, a un elemento giacente all'infuori del tutto richiesto pel confronto: ma ciascun confronto si compie in un unico atto appercettivo simultaneo, dimodochè ciascuna relazione psichica è un nesso o una congiunzione binaria: e, per quanto si possa procedere a porre in rapporto fra di loro diversi ulteriori confronti, rimane fermo quel principio di relazione psichica, secondo cui nei confronti i più diversi ha sempre luogo la relazione medesima.

Ciò che qui merita però speciale attenzione è che non si tratta puramente di relazioni nude e semplici, ma

di tali in cui entrambi i membri riuniti in una relazione stanno di fronte: cioè, se il tutto è in rapporto con le sue parti costituenti, queste parti, ottenute con la suddivisione dell'insieme, stanno in rapporto fra di loro; sicchè questa composizione di parti è semplice in rapporto al tutto, ma binaria in rapporto alle parti. Se questo è il caso del paragone o del confronto, vi è pure quello della scomposizione o scissione, in cui si dà il rapporto del tutto alle parti e poi di queste fra di loro. Qui il tutto, la rappresentazione d'insieme, è in generale risultante da una quantità di processi associativi e appercettivi: il tutto appercepito unitariamente si divide in parti, le quali nello stesso tempo son riferite le une alle altre fra di loro e son anche percepite come elementi del tutto. In questo caso si ha pure la composizione binaria, ma il medesimo processo si ripete anche negli elementi derivati, in modo che il tutto si può mutare in una formazione più o meno complessa, per quanto costrutta ancora secondo il principio su riferito. Questo processo si manifesta esteriormente nella struttura di una proposizione che espone un contenuto di pensiero, e interiormente nei rapporti logici che ne collegano le parti costitutive: meno apertamente invece si rivela nella fantasia artistica, perchè qui tanto le risultanti quanto le relazioni entrano immediatamente nella coscienza in forma intuitiva e sentimentale, mentre solo nel pensiero dell'osservatore riflessivo assumono anche esternamente la forma dell'analisi. Quel che v'è di comune in tutti questi fenomeni complessi della vita dell'anima, è che si manifesta in tutti l'intimo collegamento dell'effetto risultante relativo all'insieme, colle rispettive relazioni dei membri costitutivi, e che la più completa concezione delle relazioni singole accresce di continuo anche l'azione del tutto, di modo che il valore psichico di esso si eleva.

Risultanti e relazioni sono adunque due principi necessari, due momenti che non soltanto si completano, ma che rendono inconcepibile un terzo momento. Le risultanti

considerano l'insieme di un complesso spirituale, le relazioni considerano il rapporto dei membri che lo compongono.

Il principio delle relazioni può però assumere — dice il Wundt — una forma speciale, in quanto i membri costitutivi del tutto appartengono al lato sentimentale della vita dello spirito. Quel principio viene così ad essere un principio di relazione del lato sentimentale anziché di quello rappresentativo; perciò perde quel suo specifico carattere di oggettivazione, che per esempio si rivela nell'analisi rispettiva del pensiero logico, ove vengono in luce le relazioni tra gli oggetti di codesto pensiero. Nel campo sentimentale quelle relazioni passano negli affetti, che stanno a quei rapporti oggettivi come i loro correlati soggettivi, e diventano relazioni di sentimenti, muovendosi, alla stessa guisa di questi, tra contrari. Il principio generale del contrasto dei sentimenti viene per tal modo ad imporsi, e con esso l'accrescimento per contrari. In fondo è questo niente altro che lo stesso principio delle relazioni, diversificato da esso solo perchè è un lato diverso della natura soggettivo-oggettiva di ogni contenuto psichico, cioè ne è il lato soggettivo. Quello delle relazioni è piuttosto il lato oggettivo, e prevale quindi quando si tratta di confronto di sensazioni o di funzioni logiche di pensiero, espresse in forme del linguaggio, dove invece il principio del contrasto ha il suo dominio allorchè subentrano sentimenti accompagnatori delle sensazioni, o nella distinzione per contrasti, o nei cosiddetti moti dell'animo. Dicemmo « contrasto »; ma ciò che va più messo in rilievo è l'azione saliente, crescente, che i membri contrari esercitano l'uno sull'altro, e nello stesso tempo si comunica alle risultanti che provengono da quei membri, come si vede nei sentimenti estetici elementari. Per tal modo l'azione delle componenti in contrasto viene accresciuta. Il che ha rapporto strettissimo col fatto che i sentimenti in una assai lunga durata si accostano sempre più al valore di indifferenza, se non interviene un sentimento di contrasto che nuovamente porti all'aumento. Quello stesso stato di

quasi esaurimento è per un certo rispetto una disposizione favorevole ad uno stato di contrasti, tanto che in generale è appena sufficiente un urto diretto debole per produrre il risveglio e condurre al contrasto con lo stato precedente. Il Wundt crede che anche al di là della coscienza individuale, in correnti spirituali più ampie, probabilmente una permanenza intensiva o lungamente durevole di sentimento, affetto e volere, sia in sè e per sè già un momento causale del prodursi del suo contrario. L'effetto è però ad ogni modo soltanto negativo e indiretto, perchè sono le condizioni agenti dal lato contrario, ossia non da quello che si avvia all'esaurimento, le quali in sè e per sè non vengono mai del tutto meno, e perciò possono prevalere non appena trovano occasione favorevole, sotto l'influsso di cause appena sufficienti; nel qual caso poi la loro energia s'accresce di bel nuovo mediante il contrasto con la fase trascorsa e diretta in senso contrario.

S'è visto adunque che si danno per la causalità psichica tre principî, delle risultanti, delle relazioni, e dei contrasti, che tutti e tre posson ridursi ai due primi, i quali alla lor volta non sono che le generalizzazioni di un medesimo contenuto coerente, il quale viene soltanto ciascuna volta considerato da un punto di vista differente. Lo scambio di questi punti di vista dipende dal carattere più complesso dei processi dell'anima, per cui i loro singoli fattori sono vicendevolmente condizionati, ma però non spiccano tutti in modo uniforme nei disparati campi di fenomeni, bensì danno ragione ora più della astrazione di uno di quei tre principî, ora più di quella di un altro.

Ma, come si è già visto parlando in genere dei fenomeni vitali, accanto, anzi insieme alla considerazione causale del fatto psichico, è possibile quella teleologica. Anzi ciò è inevitabile ovunque, accanto all'esistenza di un nesso causale, è pensabile la sua trasformazione nella forma teleologica. Però la formulazione teleologica conviene più in certi casi che in altri, cosicchè ora prevale la espressione

finale, ora quella causale, senza la esclusione di nessuna di esse; giacchè in fondo tanto nel campo psichico che in quello fisico, fine e causa sono concetti correlati, che appartengono ai due termini ultimi opposti di una data serie di fenomeni.

I fenomeni a cui più conviene la considerazione teleologica, sono quelli che in fondo costituiscono proprio le radici psicologiche dei concetti di causa e di fine, cioè gli atti volitivi. Ma qui è a osservarsi che, come i motivi motori pongono in precedenza il successo degli atti volitivi nella coscienza, può naturalmente, giusta quanto fu più sopra osservato, sussistere una maggiore o minore discrepanza tra le precedenti rappresentazioni finali e gli scopi consecutivi realmente raggiunti, i quali possono restar inferiori alla tendenza per raggiungerli, o anche sorpassarla. Allora da tali successi o conseguenze finali, non adeguati ai motivi impellenti precedenti, si sviluppano nuove rappresentazioni finali e quindi anche nuovi motivi. E allora il nuovo motivo condurrà o ad una rinuncia allo scopo atteso o ad una ripetizione qualsiasi modificata dell'atto. In realtà si danno generalmente dei successi che sono come effetti laterali non voluti dell'atto, ma che entrano come fattori nei motivi nuovi che si aggiungono, e costituiscono i motivi impellenti del prossimo atto rafforzato: e ciò si verifica in più alta misura dove la precedente rappresentazione finale e lo scopo effettivamente raggiunto si corrispondono. Ora il fondamento della nuova serie di motivi è non già il successo voluto in precedenza, ma quello realmente conseguito. Gli scopi, che spiccano insieme con gli atti volitivi successivamente come motivi impellenti, si possono pensare ordinati in serie, in modo che la serie finale appaia in generale più ricca, perchè ai motivi si aggiungono ogni volta nuovi momenti derivanti dai successi ottenuti. Insomma ne viene uno sviluppo di motivi, e una eterogeneità dei fini, in quanto i fini raggiunti vanno al di là dei motivi impellenti o propulsori e delle rappresentazioni fi-

nali, da cui originariamente provengono; quanto più nuovi motivi si immettono sulla via tra il principio e il termine di una serie finale in causa delle conseguenze laterali non volute, tanto più ampia è quella serie. Naturalmente ciò vale per i nessi psichici, e non avrebbe più senso ove i fenomeni considerati non potessero più esser posti nel rapporto di motivo e conseguenza.

Codesta eterogenesi o eterogonia di fini è in fondo una trasformazione teleologica del principio delle risultanti creatrici, richiesta là dove i processi psichici son diretti a realizzare rappresentazioni finali soggettive, ossia nei processi di volere. Ma essa eterogenesi può trovare applicazione anche per tutti gli altri nessi psichici. Se una immagine rappresentativa spaziale la si considera come il fine, a cui gli elementi sensoriali produttori appartengono in qualità di motivi, o una forma ritmica la si considera come lo scopo, a cui convergono le singole battute costitutive, si hanno anche in questi casi altrettante esemplificazioni di quella eterogenesi. La quale non è propriamente un nuovo principio, ma è ancora il principio causale del divenire psichico, rivestito di una forma teleologica; e, come tale, include anche i principî delle relazioni e dei contrasti, così come il principio delle risultanti ha rapporto con essi.

Questi sono adunque, per il Wundt, i principî della causalità psichica. Ma, se per principio può intendersi una proposizione semplice presupposta a fondamento (non ulteriormente derivabile) del collegamento di fatti di un determinato campo, la legge è altra cosa dal principio. La legge si può piuttosto definire una proposizione, che comprende in una espressione coincidente un numero maggiore di fatti complessi. Essa, a differenza del principio, è data e dimostrabile costantemente e in modo immediato in una quantità di fatti, di cui è una espressione, mentre il principio può soltanto conseguirsi da e dopo un gran numero di fatti o postularsi rispetto a quelli e dopo di essi. Il principio è astratto, la legge è generale: se il primo può es-

sere ipotetico, la legge può soltanto esser problematica. La legge non ha la semplicità del principio, ma è sempre un fatto complesso, tanto che si richiedono sempre più principî per interpretare una legge. Sarà quindi un principio la conservazione della energia, mentre sono leggi fisiche quelle della equivalenza e della trasformazione. Nel campo psicologico si impone la medesima distinzione. Ivi sono principî quelli di cui fu qui sopra tenuto parola, mentre si diranno leggi quella di Weber della misura della sensazione, o l'altra della composizione binaria appercettiva delle rappresentazioni d'insieme, o dei mutamenti periodici delle rappresentazioni riproduttive di tempo, ecc. ecc. Fra tutte queste leggi imperanti nel campo psicologico, si dà una classe che sta in più diretto rapporto coi principî astratti suaccennati; ed è quella delle cosiddette leggi dello sviluppo.

Queste leggi ci si presentano entro le teorie scientifiche ora come proposizioni comprendenti un complesso più limitato di fatti spirituali, ora invece come proposizioni riferentisi all'intero sviluppo spirituale della umanità. Quanto più tali leggi sono generali, tanto più è attendibile che in esse si trovino i principî generali del divenire psichico. E anche qui si ripete il fatto che i principî come tali nulla esprimono circa gli sviluppi psicologici; anzi che ciascuno di quei tre principî causali non è che un lato del fatto psichico e perciò ha bisogno di completarsi con gli altri, e ancora che essi non si estendono al di là di quei dati nessi psichici e dei singoli processi rispettivi. Invece le leggi di sviluppo subordinano i singoli campi psichici ad un insieme più comprensivo. Ma, siccome i singoli nessi psichici non sono mai isolati, ma si connettono direttamente ad un insieme più ampio, così i medesimi principî che furon stabiliti per i nessi meno ampî divengono a loro volta applicabili a quell'insieme; e quindi v'è da attendersi che già in quei nessi più semplici siano contenuti accenni a quelle leggi di sviluppo che si dedurranno poi. Per tal modo viene

a verificarsi un fatto che non ha luogo per i principî della causalità naturale: in uno sviluppo spirituale si trova inserito quel momento, che è già intimamente presente nel singolo processo spirituale e ne' suoi prodotti, senza che con ciò la direzione dello sviluppo del processo singolo permetta di concludere per una legge generale di sviluppo, che trascenda i nessi immediati. — Fra i principî psichici e le leggi di sviluppo in questo campo va fatta un'altra distinzione. Nei principî si astraie da ciò che è all'infuori dell'ambito psicologico; cioè essi sono di natura puramente psicologica, aiutati in ciò dal carattere di astrazione inerente al principio. Questi principî, adunque, astraggono completamente dalle condizioni fisiche concomitanti. Invece le leggi psicologiche, e in special modo quelle dello sviluppo, non possono astrarre dal lato fisico dei fenomeni, come del resto non posson comprendere questi togliendoli a considerare solo nel loro insieme fisico. Si comprende perciò come non si diano, nel più stretto senso della parola, leggi di sviluppo puramente psichiche, ma soltanto leggi di sviluppo psico-fisiche. Difatti, anche se limitiamo il concetto dello sviluppo al suo campo specifico, alle forme organiche della vita, troviamo almeno come probabile che persino quelle condizioni che appaiono puramente fisiologiche si riconducano alla fine a condizioni psico-fisiche di sviluppo. Solo che in questo caso i momenti psichici originari possono scomparir presto, perchè la costituzione fisica della forma organica possiede in alta misura la proprietà di trattenere, di conservare quelle tendenze alle trasformazioni di materia e di forma, che le fu comunicata dall'azione consecutiva di cause da principio psico-fisiche. — Stabilito il carattere psico-fisico di queste leggi di sviluppo, diremo col Wundt che esse si suddividono in due gruppi, degli sviluppi biologici e degli sviluppi storici. Il primo gruppo comprenderebbe, a dir vero, entrambi: e ciò appare specialmente nello sviluppo della singola personalità umana, che come sviluppo organico appartiene alla serie biologica,

e nello stesso tempo è anche la forma più semplice dello sviluppo storico. La scissione dei due sviluppi biologico e storico avviene esteriormente, solo in quanto nel primo (biologico) preponderano i momenti fisici, nel secondo quelli psichici, cioè in quanto nel primo scompaiono le originarie condizioni psichiche; e nel secondo i momenti fisici, se non scompaiono del tutto, vengono in seconda linea dopo i motivi spirituali prevalenti. In queste proprietà si rispecchia ancora il rapporto effettivo della vita naturale e di quella spirituale, che non sono fenomeni disparati contrapposti, ma bensì parti di un tutto, che ci si dà a riconoscere nella gradazione inferiore del suo lato oggettivo naturale e in quella superiore della parte spirituale soggettiva, che intimamente si rivela nella nostra stessa vita vissuta.

Codesto rapporto ci richiama a quel parallelismo psico-fisico, di cui dicemmo più sopra. Da esso si deduce che il lato fisico della vita (il concetto di vita e quello di animazione son concetti scambievoli) si completa in quanto è adoperato come substrato di una volontà finale conscia, e che il lato spirituale della vita divien più ricco e più vario in quanto i suoi strumenti fisici si convengono e adattano ai fini proposti ¹⁾. Ma deve osservarsi qui, come del resto in genere pel rapporto di spirito e natura, che non si danno processi psichici inconsci in senso assoluto, ma solo in senso relativo, cioè nel senso in cui noi distinguiamo dai processi di coscienza immediatamente dati nella osservazione, quei gradi di coscienza che sfuggono alla diretta dimostrazione. Perciò quelle parti costitutive della vita che empiricamente ci si danno a conoscere soltanto come mezzi fisici e non psichici, metafisicamente devon presupporci come unità inferiori di coscienza subordinate ad una coscienza centrale, che dipendono e influiscono su di essa senza con ciò partecipare alla sua totalità. Psicologicamente, però,

¹⁾ Cfr. *System*, etc. cit., II, S. 182-3 ff.

si parte da un punto di vista empirico immediato, meno astratto: secondo questo, quei processi che la metafisica considera come atti impulsivi di unità inferiori di coscienza, conservano il valore di riflessi collegati con auto-regolazioni più o meno perfette: giacchè non va dimenticato che la psicologia ha a fare soltanto con l'analisi di quella coscienza centrale accessibile alla percezione interna, e quindi le è estraneo tutto ciò che è annesso al meccanismo fisiologico e non è fatto immediato di coscienza.

Tutto questo riguarda la causalità psichica, i suoi principi, le sue leggi; e propriamente ha valore per l'anima individuale. Codesta causalità spirituale è, come abbiamo visto, diversa da quella naturale, perchè è attuale. Ma appunto perchè è attuale, essa dà luogo ancora al concetto ulteriore dello spirito totale. L'ipotesi che pone la sostanzialità dell'anima, non può condurre più in là di un individualismo etico, secondo cui, p. es., una volontà totale consisterebbe solamente o nella coincidenza causale di una quantità di unità volontarie individuali, o sarebbe in realtà una volontà individuale che proponderà per la rinuncia volontaria o forzata di una somma di singole volontà all'uso del loro volere. Ora ciò deriva dal trasformare in punti di partenza reali, degli elementi fenomenici assunti da un punto di vista metafisico. In realtà questa astrazione dell'individuo isolato, posta all'inizio di ogni sviluppo spirituale totale, non si ritrova in nessuna esperienza. Questa ci rivela la comunità dei singoli, che è già una condizione nello sviluppo fisico, e in ancor più alta misura è un fattore della vita dello spirito. Difatti è impossibile concepire il linguaggio, il costume, la intuizione religiosa, anche risalendo alle loro origini, come ritrovati di singoli. Anzi implicano, oltre che la partecipazione di molti, la totalità che comprende insieme tutte le vite individuali. Non che vi sia uno spirito totale all'infuori e indipendente dai singoli: ma neppure è possibile il singolo prima dell'insieme, perchè esso come personalità spirituale autocosciente si dà solo con ed entro

quella totalità (v. il principio psichico delle risultanti). Tutte le creazioni, su cui poggia lo sviluppo della vita spirituale, abbisognano tanto dell'attività dei singoli quanto della comunità spirituale; e la realtà della vita della totalità è tanto sicura e fondata quanto quella della vita singola. Non si tratta già di un valore oggettivo generale, ma di quello che è piuttosto, come alcuni più moderni vorrebbero, onnisoggettivo e ancor più che tale, come del resto lo dimostra il fatto che il sentimento morale naturale ha sempre suggerito anche ai filosofi che i doveri verso la comunità son da porsi più in alto che non i doveri verso i singoli. In questi concetti conviene la concezione attuale dell'anima, la quale poi, come fu già detto, non adotta altra misura della realtà spirituale all'infuori della realtà effettiva, anzicchè attaccarsi ad una premessa metafisica e quindi al concetto pure metafisico dell'anima sostanziale. Per codesta realtà effettiva ogni specie di vita totale o d'insieme, non corrisponde già ad un semplice aggregato di unità reali; ma invece, quanto più ricco è lo sviluppo della vita spirituale, tanto più vari e complessi divengono i nessi che si formano, fino a che nelle formazioni costituite mediante la coltura superiore dello spirito, danno luogo a una serie di gradazioni, che vanno dalle più transitorie associazioni interessate sino alle più durature e importanti forme della vita in comune.

Ed il continuo flusso del divenire spirituale fa sì che la vita spirituale, in rapporto alle più alte forme della comunità presupponenti già di per sè un ulteriore sviluppo e una creazione del nuovo, sia uno sviluppo inesauribile, non suscettibile di essere trattenuto in limiti ben fissi. Non che una creazione nuova sia qualcosa di improvviso e di im-preparato; chè anzi le formazioni del presente e del futuro sono state preparate nel passato e derivano da forme che spesso non sono loro equivalenti, o sono equiparabili ad esse solo nel senso che i principî della causalità psichica sono condizioni sufficienti per tutte. — Lo spirito comune,

totale, può considerarsi sotto i due punti di vista storico e psicologico-etico: quest'ultimo, poi, ha bisogno di due concetti ausiliari, di cui l'uno viene trasferito dal campo fisiologico in quello spirituale, e l'altro possiede sin dall'origine un significato psicologico; vogliamo dire i due concetti di organismo e di personalità, relativi ad una unità di modi diversi. — Se organismo in genere è un essere vivente, composto di unità o parti che sono organi del tutto, e che anche quando è costituito da un corpo privo di vita è fatto per la realizzazione di fini determinati ed è insomma un tutto indipendente in un certo relativo senso, nei più alti gradi di organizzazione l'unità del tutto organico è espressa in una volontà unitaria. La dipendenza di questa da altri esseri affini, siccome si manifesta pel mezzo della volontà, è una indipendenza entro la dipendenza, e s'accresce quanto più la volontà aumenta sino a divenir capacità elettiva, di scelta. Ciò si manifesta già nell'organismo singolo, che è un grado più basso dell'organismo collettivo, ed è composto di elementi ed organi, che come unità individuali conducono una vita indipendente, ma per il collegamento fisico immediato delle parti e l'assunzione delle unità psichiche inferiori in una coscienza centrale, costituiscono una indipendenza associata, connessa. Nell'organismo collettivo avviene l'isolamento fisico, e la funzione autocosciente delle unità subordinate al tutto è libera. Quindi per esso permane nuovamente questa differenza, che i membri individuali dell'organismo collettivo sono penetrati sino alla auto-concezione della loro natura spirituale, mentre vi si sottraggono nell'organismo individuale; e, mentre gli individui hanno ancora una realtà quando han cessato di appartenere ad un tutto organico, ogni comunità non ha più senso se sciolta dagli individui stessi. Perciò in essa sono quei motivi dell'azione che già erano preformati nei singoli suoi membri, e così pure si sviluppano in essa fini che sono a un tempo stesso fini suoi e dei singoli.

Naturalmente va ripetuta qui l'osservazione riferita più

sopra, che non si tratta di fini individuali, isolati con una specie d'astrazione da ogni collegamento con gli altri: chè anzi in verità i fini collettivi sono fini individuali solo in quanto il singolo con tutte le sue energie spirituali non si sottrae a quel complesso di effetti che la comunità, nelle sue diverse composizioni, esercita su di lui. Onde da una parte le tendenze dapprima egoistiche si elevano nella sfera dell'attività altruistica, e dall'altra i fini, che originariamente erano estranei alla disposizione individuale, si accostano agli interessi propri della vita del singolo. Così nell'organismo collettivo entrano unità libere con volontà auto-cosciente; ma nello stesso tempo in esso gli interessi vitali più importanti riposano in origine su una coincidenza di rappresentazioni, sentimenti e direttive di volere. Le unità volitive costitutive della comunità conferiscono a questa la indipendenza; e quanto più i loro fini sono illimitati, generali e durevoli, tanto più si accostano all'organismo totale; onde si dà una serie di gradazioni, che va dal semplice aggregato di individui organici fino all'organismo totale, e dall'organo di congiunzione sino al corpo indipendente. Ma nessun individuo può nello stesso tempo appartenere a più comunità, a cui sia applicabile il concetto di organismo come di coincidenza di tutti i fini vitali comuni. Come l'organismo individuale può soltanto essere un tutto associato in unità, così anche l'organismo della comunità non può esser che uno solo per una determinata riunione di individui: potrà subentrare un nuovo organismo al suo posto, ma anche per questa nuova forma di comunità vale ancora la medesima legge di unità sociale. La ragione sta nella duplice unità della natura umana. L'uomo è un essere singolo, ma è anche sin da principio membro di una comunità, di una totalità. A poco a poco in seno alle comunità primitive hanno luogo delle associazioni subordinate più ristrette, o anche hanno origine accanto ad esse ulteriori collegamenti che vanno da una comunità all'altra. Per tal modo hanno origine nuove forme di unità organica, a cui

il singolo conferisce sensi sociali analogi a quelli che lo univano all'associazione primitiva; e si trasformano quindi le forme di unità, creandosi comunità più limitate e collegamenti più unilaterali di interessi, ma cosiffatte che esercitano un'azione trasformatrice su tutto l'organismo d'insieme. Insomma l'organismo totale possiede, in confronto del corpo vivente singolo, una capacità illimitata di organizzazione e di trasformazione, che si fonda su una libera auto-determinazione, la quale è propria di individui appartenenti a una comunità, e che si manifesta nelle libere organizzazioni che hanno continuamente origine in seno a quella comunità sociale.

Al concetto di organismo, nel nostro caso di organismo totale, comune, generale, va aggiunto quello integrativo di personalità, che si riferisce non più alle parti od organi, ma alle proprietà interne e all'autocoscienza. La personalità, come quella che ha il significato etico di libertà e responsabilità del volere, è propria dell'uomo evoluto, non degli altri animali, nè del bambino, nè degli ammalati della volontà. Il concetto di organismo in realtà si estende di più, tanto in basso che in alto, che non quello della personalità, perchè presuppone una volontà comune, che ha la proprietà della libera scelta e una autocoscienza superiore alla capacità individuale di riflettere e prevedere. Quanto più completamente organizzata è la comunità, tanto più si osserva che quella totalità di funzioni, che nel singolo è compresa nell'unità del volere, si suddivide in una pluralità di personalità libere composte in ristrette associazioni (come vedemmo per l'organismo), entro cui la loro volontà può indirettamente influire sul tutto. L'organismo totale è impersonale, ma in un senso individuale. Nella personalità collettiva l'autocoscienza e il volere non sono associati in una unità immediata, ma essa si distribuisce su molti individui in modo che la risoluzione presuppone uno scambio fra molte persone e si avvera per naturale comunanza di rappresentazioni o per norme collettive.

Queste norme sono poi esse pure soggette a sviluppo, in modo che è possibile distinguere una comunità colta o di coltura da una precedente comunità o società naturale sussistente per la naturale unione dei singoli. Questa seconda comunità, come più semplice e inferiore, ha una personalità complessiva che ha più analogia con la persona singola; invece la prima ha più spiccato il carattere di personalità totale e congiunge gli individui con legami tanto più saldi. In essa prevalgono come criteri essenziali la indipendenza all'esterno e la subordinazione di tutti i fini parziali ai fini comuni attesi: ma il criterio generale che la informa non va confuso con quelle forme di organizzazione sociale a cui non è più applicabile la caratteristica della auto-determinazione autonoma incondizionata. Per esempio, il concetto della personalità comune nel suo reale significato etico non ha nulla a vedere con il concetto della persona giuridica, che ha un senso non reale ma soltanto formale. Quest'ultimo significa quel soggetto giuridico che per ragioni politiche, morali o finali esteriori viene dalla legislazione equiparato, in rapporto al diritto dell'ambito economico privato, alla personalità individuale; e, quand'anche venga riconosciuta la personalità giuridica ad una associazione o lega, resta il fatto che questa, in rapporto al diritto privato, si considera come persona individuale. Ma corporazioni aventi determinati diritti e doveri oltre la proprietà generale della persona giuridica, sono ancora, più che vere persone nel senso reale suaccennato, organi della personalità comune che le sovrasta, cioè dello stato. E quest'ultima personalità consta però di libere persone singole autocoscienti, organi di una ampia autonomia, limitata sempre dalla più alta volontà collettiva. La libertà collettiva è difatti un concetto più ampio che non quello della personalità collettiva o totale: essa ha bisogno della autonomia incondizionata delle manifestazioni volitive, collegata con la libera scelta dei fini, e limitata solo dagli effetti dell'ordinamento giuridico imposto dalla

volontà collettiva. L'autodeterminazione dei singoli mediante libere risoluzioni volontarie si riflette nell'autonomia incondizionata della personalità generale. Si ripete qui per il concetto di personalità la stessa cosa che per quello dell'organismo. Organismo individuale e totale stanno l'uno di fronte all'altro, e così pure si comportano la personalità individuale e quella collettiva: cioè ciascuna personalità è possibile per i singoli solo in quanto è unica. E anche qui vale quello che può considerarsi il motivo fondamentale della natura umana, per cui il singolo afferma sè stesso di fronte all'ambiente, ma nello stesso tempo si sente dipendente da quella collettività a cui è connesso in un solo tutto.

Naturalmente collo sviluppo delle forme collettive, con cui si sviluppa in continua reazione anche il singolo, si muta il carattere dell'organismo comune e il suo rapporto coi membri: rapporto, con cui sta in intima connessione il mutamento delle forme di organizzazione della società con le relative formazioni dovute ad una più limitata volontà collettiva. Tale sviluppo, che, malgrado le differenze dipendenti dalle condizioni naturali o da quelle di coltura, soggiace in fondo a leggi coincidenti, è delineato dalla storia. Se si guarda al punto iniziale ed a quello finale della storia, si vede che in essi la natura unitaria dello spirito collettivo ha assunto le forme più diverse, e che però entrambi, in opposizione ad alcune forme dello sviluppo intermedio, danno a conoscere chiaramente la unità dell'organismo collettivo. Dalle tribù agli stati dell'epoca moderna si dimostrano lo sviluppo e i mutamenti dell'organismo collettivo. Oggi in tutte le attività dello spirito collettivo si danno rapporti tra stato e società, che sono il primo una unità costituita con le vere proprietà di una personalità collettiva organizzata, e la seconda la somma di tutte le associazioni, federazioni e leghe fondate sulla libera unione dei singoli e però sottoposte alla protezione e sorveglianza dello stato. Nella società si formano numerose volontà collettive

di contenuto e fine più limitato, che si incrociano in modo che non si dà individuo il quale non appartenga in uno stesso tempo a diverse di tali associazioni. Ciascuna formazione di una volontà collettiva tende poi a organizzarsi, e dove questo più riesce con norme durature per la congiunzione delle volontà singole mediante quella collettiva, ivi si sviluppa meglio il collegamento organico. Tutte queste unità organiche (famiglia, comune, chiesa, ecc.) potranno, almeno alcune di esse (p. es. la chiesa), per condizioni storiche del loro sviluppo accostarsi al tipo di organismo indipendente; ma, poichè in fondo nella medesima società sono impossibili due unità organiche egualmente indipendenti, esse non possono sottrarsi necessariamente alla legge della subordinazione ad una sola unità, che è lo stato¹⁾. Sicchè il rapporto fra società e stato è così fatto che le leghe sociali, anche le più prossime e inevitabili, si trasformano subito in organi dell'organismo statale. Però il sicuro compimento delle azioni scambievoli tra ordinamento statale e sociale, riposa sulla influenza che i circoli collettivi e le associazioni finaliste della società esercitano sulla volontà collettiva sociale organizzata entro lo stato. Il quale, con la costituzione sua e l'amministrazione, forma un sistema di regolazioni autonome, ma tali però che nello stato giuridico esse si presentano non più come una volontà singola rappresentativa, ma come una volontà collettiva organizzata, che cerca di giungere ad una continua regolazione a norma dei mutamenti dei fini sociali. La collettività statale, insomma, è quella unità organica che realizza nel vero senso le proprietà dell'organismo e della personalità collettiva. Ma dai rapporti tra popoli e stati si sviluppa a poco a poco una società organizzata di un grado più alto, che cerca di comprendere in ambito sempre più vasto la totalità dei popoli civili. Dalla

¹⁾ Cfr. anche del WUNDT: *Logik*, II 2, 2, S. 589 ff.; *Ethik* 2, II, S. 260 ff.

collettività colta, evoluta, civile, si passa man mano alla società civile, che produce lo sviluppo storico e, come suo generale risultato, le singolarmente diverse e però fondamentalmente coincidenti idee e ideali morali, religiosi, estetici. — Dal lato morale assume importanza l'idea di una completa collettività volontaria della umanità, la quale è in fondo quella che segna la direzione ad ogni azione morale singola. Ed allora la associazione organica della umanità per raggiungere una personalità collettiva morale unica appare come un ideale ultimo, forse non mai realmente conseguibile, però sempre desiderato. — Se guardiamo alla storia della umanità ed al suo significato generale, noteremo che si può dare una duplice determinazione di valore, secondo che si misuran le cose secondo il puro loro contenuto proprio, o nelle loro azioni consecutive. Per far ciò, occorre riferirsi all'attualità e alla realtà, e giudicare non da punti di vista esterni, ma il fatto reale nelle sue immanenti energie. E queste energie immanenti della storia sono i motivi spirituali, che la filosofia della storia deve studiare facendosi psicologia applicata, giacchè la storia è il più ampio campo di applicazione per le leggi dello sviluppo psichico, cioè per le risultanti, le relazioni, i contrasti e la eterogenesi dei fini. L'idea del progresso si richiama tanto alla esperienza storica che alle leggi psicologiche dello sviluppo della volontà. Ma anche questa idea è nel suo contenuto soltanto derivata dal contenuto della storia, la quale nel suo progresso è complessità aumentata della vita storica, di cui le parti costitutive sono ad ogni passo tenute insieme dal carattere unitario dello spirito umano. Per giudicare il valore dei singoli contenuti storici, bisogna ricordare che essi hanno bensì valore di parti costitutive dell'ambito di vita cui appartengono, ma che con l'insieme di quest'ultimo il valore di ciascuno di quei singoli elementi aumenta per sè come pe' suoi membri: il che si estende alle singole fasi costitutive dello sviluppo storico.

In questo sviluppo il principio di valore si esprime specialmente nella vita morale, in cui si svolgono le norme con cui è a determinarsi il concetto del valore oggettivo per la concezione dei contenuti storici. Da questo lato morale¹⁾ è da osservarsi che storicamente si venne dall'etica antica, che è per la massima parte dottrina individuale della virtù, a quella cristiana del dovere e della felicità conseguente, che considera nuovamente nella moralità la personalità individuale. L'etica moderna pone la felicità non come conseguenza della virtù e perciò come motivo precipuo dell'agire morale (come faceva l'etica antica), ma come il successo attendibile ossia come lo scopo della moralità, e perciò divenne dottrina dei beni. La moderna filosofia morale pose il suo principio nella felicità di tutti i singoli e nella maggior possibile felicità del maggior numero possibile. Ma si opposero poi due diverse direzioni, l'una volta a considerare la legge morale come un puro comando del dovere, che, in rapporto alle credenze religiose, appariva come un comando divino; e in questo senso Kant, di contro ai principi utilitari del XVIII secolo, rinnovò la serietà della dottrina cristiana del dovere. L'altra, a somiglianza dell'etica antica, cercò i fini morali nel campo della collettività, ma non, come quella, nella virtù e conseguente felicità individuale, bensì stabilendo fini oggettivi e generali, che però, per esser soggetti a sviluppo storico, perdono il loro significato assoluto e cadono non sotto il giudizio morale ma sotto il giudizio storico. — Ciò che importa è che bisogna sempre tener conto dei sentimenti e impulsi della coscienza individuale, onde il sentimento morale diviene molla importante delle azioni individuali, che negli spiriti singoli mantengono attivi i rapporti reali con la collettività. — Se però acquistano speciale significato i motivi soggettivi e la personalità individuale come contenuto e oggetto dell'etica, si deve osservare che ciò poteva aver senso sopra-

¹⁾ *System*, etc., cit., II, S. 223-239; *Ethik* *, I, I, etc.

tutto nell'etica antica o in quella cristiana, e fin tanto che occupò il primo posto la questione dei fini morali posti sotto il punto di vista individuale, e che, pure essendosi trasformato il concetto del piacere da quello di conseguenza collaterale in quello di scopo della virtù, si ebbe una inversione di mezzo e di fine, in quanto che la tendenza a raggiungere i fini proposti al volere umano secondo la sua propria legge di sviluppo, divenne puro mezzo, e invece i motivi e le conseguenze piacevoli furono elevati a contenuto proprio dell'attività e della tendenza morale umana, come avvenne nell'utilitarismo. — Quello che importa stabilire è che motivi dell'agire sono soltanto fatti della coscienza soggettiva, mentre i fini sono le conseguenze direttamente o indirettamente attingibili delle azioni volitive. — Accanto a motivo e scopo, e però diversa, è la norma morale. Questa richiede la trasformazione degli elementi motivi, indifferenti o immorali, di fini realmente morali, in motivi puramente morali; ed essa norma, o comandamento morale, ha d'uopo di una congruenza completa dei motivi coi fini morali. La conseguenza finale, il fine, deve considerarsi oggettivamente, e deve coincidere coi fini generali della collettività umana. Ma a ciascun fine, che oggettivamente riconosciamo come morale, noi assegnamo il carattere di un bene, o almeno di un mezzo per procacciare, direttamente o meno, dei beni. Questi, con la loro azione sollevatrice dell'animo, concedono la misura più facile del valore o del grado dei beni, e sono quindi una molla per conseguirli. Ma il bene non è tale perchè solleva e rende felice; bensì opera in tal modo perchè è un bene, e dev'essere quindi apprezzato di per sè e non pei sentimenti che sono conseguenze laterali soggettive. Dato ciò, il giudizio delle azioni umane importa che abbian valore di atti morali in senso oggettivo quelli che immediatamente o no sono necessari alla libera attività delle energie spirituali, e immorali quelli che si oppongono a questo scopo. — Nè il singolo nè la comunità, come somma di individui separati, sono l'unico oggetto esterno dell'attività

morale. Come i ristretti ed ampi circoli di collettività spirituale posseggono una realtà indipendente (cfr. sempre i principî psichici delle risultanze, ecc.), così anche queste collettività, misurate alla stregua della loro realtà e capacità di produrre beni spirituali, sono immediati oggetti finali morali. Non altrimenti lo stato ha, oltre che la libera esplicazione della vita dei singoli, un contenuto di vita spirituale di per sé per la cooperazione dei suoi organi. L'ultimo scopo dello sviluppo morale, consiste nello stabilire una generale collettività volontaria dell'umanità, come fondamento per la maggiore possibile esplicazione delle energie spirituali umane per la produzione di beni dello spirito. — Ora la giudicazione morale oggettiva si determina in due sensi, col riconoscimento del valore indipendente di ciascuna prestazione, e mediante il rapporto di ciascun singolo prodotto spirituale con l'ideale ultimo della umanità, comprendente tutto il lavoro spirituale umano in unità volontaria. Naturalmente per l'uomo, in quanto essere spirituale, possono valere come immediati beni morali soltanto dei beni spirituali, o atti e creazioni dirette a raggiungere fini spirituali, pure presupponendosi anche nei fatti spirituali condizioni e mezzi fisici, che quindi cadono anch'essi sotto il punto di vista della giudicazione morale. Ciascuna azione, che contribuisce alla esplicazione di energie spirituali e alla spiritualizzazione della natura mediante la sua trasformazione in un substrato di fini spirituali, è morale in senso oggettivo; e la nuova etica considera appunto il fine oggettivo. Ma nello stesso tempo il concetto della moralità dovette, perchè non si desse il caso che un atto fosse giudicato morale nel fine oggettivo e immorale secondo i motivi soggettivi, limitarsi a quelle azioni, in cui la natura del fine proposto rende improbabile l'efficacia di motivi immorali, come è il caso degli atti d'amore personale pel prossimo, sebbene questi, oggettivamente considerati, appartengano ad una sfera più bassa di fini morali. Quello che si cerca in ogni caso è che l'apprezzamento soggettivo di valore dell'azione umana

sia sempre determinato nello stesso tempo dal fine e dal motivo.

Quanto al motivo, poi, esso è morale quando il bene attendibile è voluto di per sè, non per fini collaterali. Quindi il valore morale di un uomo importa il sentimento con cui egli opera; e questo importa l'accento al dovere e la inclinazione al dovere. Così Kant creò una esigenza esagerata quando disse che il dovere debba adempirsi senza inclinazione, e pose la negazione del valore del piacere nei motivi anzichè nei fini morali. — Difatti, come già si disse, i beni morali dovon volersi non perchè chi agisce ne attende piacere per sè o per gli altri; ma al contrario il bene morale ha appunto carattere indipendente da tutti i sentimenti di felicità; e il fine morale è un bene in sè e non per i sentimenti di piacere che provoca. Noi possiamo pensare come uno stato di felicità perfetta l'ideale della completa comunità volontaria umana, a cui come a scopo ultimo va ogni azione morale, per il motivo che è stato di perfetta pace e della più libera esplicazione delle energie spirituali. Ma la sua realizzazione è alla fine di una serie infinita, è atteso, mai raggiunto, e quindi non si sottrae allo sviluppo, mentre al tempo dell'illuminismo si ammaginava uno stato eterno sottratto alle condizioni dello sviluppo spirituale, e si giungeva fino a garantire il trattato di pace con lo stato permanente di guerra. — La questione dello scopo della vita il Wundt paragona a quella intorno al perchè delle cose. Il mondo è perchè è: l'uomo vive perchè è determinato a vivere. E questa determinazione sta in quello che la vita produce conformemente alla sua propria natura, la quale è vita spirituale, che adduce a creazioni spirituali. Ogni creazione siffatta e ciascun mezzo per essa è, siccome lo scopo della vita è il suo raggiungimento, un bene. E perciò vita morale è il tendere a volere i beni puramente per sè stessi, non per fini estranei. Siccome poi il più alto bene morale è il libero svolgimento delle energie dello spirito e l'ideale atteso della società vo-

lontana umana, così in esso si ha la coincidenza delle condizioni della vita individuale e di quella storica e la conferma mediante le norme morali generali. Ma nel campo morale, pure dati questi accenni ai fatti ultimi, non si ha la rispondenza a quella unità definitiva della conoscenza del mondo che è un bisogno metafisico. L'ideale della società volontaria partecipa alla transitorietà di ogni conato umano; può quindi considerarsi come l'ultimo fine del complesso dato dall'ordinamento del mondo, ma non come il suo fine assolutamente ultimo. Piuttosto l'ideale morale che a noi si manifesta, può pensarsi come parte costitutiva di un infinito ordinamento morale del mondo; e può definirsi l'ideale dell'umanità come una conseguenza limitata di un motivo universale assoluto a lui adeguato, ma però illimitato.

Di qui la trasformazione del problema morale in problema religioso ¹⁾. — Senza qui entrare addentro nel problema, metteremo in vista solo alcuni punti di esso, per rilevare anche qui il concetto dello sviluppo spirituale perseguito sempre nelle formazioni superiori e più generali dello spirito. Fu detto ancor oggi essere la filosofia una religione razionale, intendendosi per ragione non ciò che ne pensavano gli illuministi o gli intellettualisti della religione, ma in quello di tendenza esplicita nel pensiero a completare le conoscenze date nella esperienza in una unità, di cui gli ultimi principî e conseguenze non possono essere dati, ma possono pensarsi come ultime premesse al dato. Ma ciò riconduce a concetti che posseggono pur sempre il carattere di concetti intellettivi, che non possono utilizzarsi se non per raggiungere idee, che vanno al di là di quel decorso del mondo che essi vogliono spiegare. Così il materialismo ateistico e la dottrina panteistica della sostanza contengono il fondamentale errore di concepire l'essere naturalisticamente, nella sua natura esterna o interna. Le idee religiose sono un necessario com-

¹⁾ Cfr. del WUNDT la *Völkerpsychologie*, Bd. 2 (Mythus u. Religion); — *Ethik*, cit., etc.

pletamento degli universali sviluppi delle idee psicologiche e ontologiche, e un completamento dell'ideale morale da porsi a base di ogni spiegazione della moralità empirica; e gli ideali religiosi sono tali in quanto oltrepassano gli ultimi fini, e in parte sono pensati come l'ultimo assoluto fine dell'ideale morale umano, e in parte come l'ultimo assoluto fondamento di quel fine. Ideali e idee insomma, che devon pensarsi adeguati necessariamente all'ideale morale, ma che si sottraggono a ciascun contenuto determinato, in forza della loro propria esigenza di una infinità assoluta. Naturalmente le religioni positive non si accontentano di questa indeterminatezza, non sorpassabile dal pensiero filosofico, e intervengono con intuizioni e contenuto rappresentabile. Così avvengono le incorporazioni, le rappresentazioni concrete. — Nelle religioni naturali il senso morale delle idee religiose passa in seconda linea, e gli Dei, in quanto appaiono di natura sovrumana, non possono pensarsi come ideali morali; anzi nella idea di Dio sensibilmente corporeo è veduta una svalutazione della medesima. Nelle religioni morali, come nel cristianesimo, Dio non è rappresentabile nè raggiungibile; onde subentra la personalità umana come ideale morale. — Quando Dio è considerato espressamente come non rappresentabile, e il fondamento del mondo come assolutamente trascendente, mentre l'ideale morale della vita è umano ossia immaginato come dato in una data personalità storica, allora le idee trascendenti della ragione e le altre parti della conoscenza filosofico-scientifica non contraddicono al contenuto della intuizione religiosa. In caso contrario, l'idea dell'uomo-Dio perde il carattere della credibilità storica connessa con l'ideale umano, e ingrandendo quest'ultimo perde il suo valore pratico, e poi abbassa la idea di Dio ponendola a fondamento dell'ordine morale del mondo. — Il modo in cui le idee religiose e il rapporto del singolo con la sua fede in esse si esprime in rappresentazioni speciali e in forme di culto, cade sotto il concetto di simbolo. — Se la idea trascendente del fondamento

del mondo si esprime nella credenza in Dio, la fede nella immortalità è connessa con la idea del fine o scopo del mondo, e nelle religioni morali evolute cade sotto il dominio delle idee di un ordine morale del medesimo, che dipende da quella del fine morale. Man mano che questa ultima dipendenza si impone alla conoscenza, avviene che i beni morali attesi ed attinti non trapassano, ma che ogni fine, transitorio per la nostra considerazione empirica, deve servire ad un fine imperituro. E in quest'ultimo senso, analogamente a quanto vedemmo più sopra, la idea religiosa è in accordo con quella idea trascendente dalla ragione, la quale esige, accanto all'ideale morale della umanità, come soltanto relativamente infinito, un fine adeguato ma assolutamente infinito del mondo. — Il concetto dell'anima come sostanza è stato d'ostacolo alla immortalità: un'anima semplice staccata da tutti i suoi nessi, si sottrae alle condizioni, su cui riposa la conservazione dell'autocoscienza e la essenza di una vita personale e dei beni personali prodotti mediante la vita presente. — Notevole è il fatto che il carattere imperituro dello spirito vien pensato come una continuazione personale, non tanto perchè sia solo pensabile nella forma dell'azione personale di un essere e di un divenire spirituale, quanto perchè si è d'opinione che l'immortalità dello spirito non corrisponda al valore imperituro oggettivo dei beni spirituali, ma alla esigenza che ciascun soggetto possa godere di questa immortalità. Ma la vera idea del valore imperituro dei beni morali racchiude in sè la convinzione che, essendo lo spirito da pensarsi come solo un incessante divenire e creare, ciascuna energia spirituale afferma il suo valore in un processo di divenire non mai terminato dello spirito: perciò le parti costituite dello sviluppo spirituale, la vita individuale personale e le forme storiche dello spirito collettivo, partecipano a quel fine imperituro. Quindi anche per la religione si giunge ad un valore spirituale oggettivo. Come per la vita morale i beni spirituali vengono attesi e apprezzati per sè

stessi e non pei sentimenti concomitanti, la considerazione religiosa esige che tutte le creazioni spirituali posseggano un valore assoluto, indistruttibile. Ed è questa esigenza una idea trascendente, non dimostrabile empiricamente, a meno che non assuma la forma della concezione estetica.

Quest'ultima concezione astraе dalla riflessione come dalla reazione, ma considera e contempla. Kant già aveva ricondotto il sentimento estetico al compiacimento disinteressato. — Due questioni principali vi si connettono, quella psicologica dello sviluppo della intuizione estetica, e quella metafisica del significato morale a cui assurge quello sviluppo, e del rapporto in cui l'ideale estetico sta con quello etico e religioso. La prima rientra nella psicologia dei popoli e nella storia psicologica dello sviluppo dell'arte. La seconda si riferisce non alle proprietà soggettive presenti in noi, per le quali in noi si genera piacere estetico, ma alle proprietà oggettive o che devon possedere gli oggetti per produrre in noi effetti estetici. Vi è differenza tra ciò che è sensorialmente piacevole e il bello estetico; e questo sarebbe un sensibilmente piacevole pei sensi più alti, secondo la vecchia teoria sensualistica. La nuova formalistica, invece, considera condizioni formali, come armonia e ritmo, simmetria e composizione proporzionale, e, astraendo dai sentimenti di piacere provenienti da semplici impressioni, mette in luce quelli che si fondano sui rapporti piacevoli e sono per tal modo, in quanto estetici, collegati con quelli intellettuali, religiosi, morali. Nella teoria formalistica non si tien però il giusto conto delle parti costitutive interne di tutto il contenuto materiale della intuizione estetica; parti che provengono dalla nostra propria anima e si aggiungono alla impressione esterna, come gli affetti, gli stati d'animo. Non è la forma di per sè, la quale nelle specie superiori della impressione estetica piace, ma ciò che soddisfa è il perfetto adattamento della forma al contenuto. — Un'altra teoria è quella logica, secondo cui ciò che è estetico è razionale, in sè non diverso dagli altri contenuti spirituali

più alti, solo differente dal pensiero concettuale in quanto il contenuto logico di pensiero assume veste sensibile e si accosta non all'intelletto ma alla intuizione; ma la forma logica è il grado più alto a cui può giungere un contenuto spirituale, e l'opera d'arte è un nesso che ha raggiunto il suo scopo quando è trovata la espressione logica e la forma concettuale del contenuto di pensiero. Ma anche qui la logica è una fase della riflessione, un mezzo per la spiegazione di fatti della cui ricerca appunto si tratta; inoltre, più che alla realtà vivente, si giunge sempre all'idea, oggetto dell'azione del bello. — Anche quelle concezioni che pongono scopo dell'arte la esposizione di idee morali o religiose, tradiscono ancora la dottrina platonica delle idee e della congiunzione del vero, bello, e buono, come lo tradisce la posizione intermedia del bello tra la natura eterna ed infinita dell'assoluto e la transitorietà del fenomeno sensibile. Queste concezioni trascendenti hanno il difetto che in esse il bello non ha valore indipendente, ma lo acquista passando all'idea pura. Ciò che v'ha in esse di vero è che la intuizione estetica si allontana dal pensiero logico astratto, ma realizza quel pensiero concreto che cerca di comprendere nel suo insieme la realtà vivente quale essa è, ed è complemento della scienza; mentre questa vuole dapprima afferrare (concepire) la vita e finalmente come metafisica poggiarla sulle sue condizioni ultime, l'arte vuole esporla; la prima lavora con concetti e idee astratte, la seconda con intuizioni, e si vale di fantasia e anche di pensiero (come del resto, in diversa proporzione, se ne vale lo scienziato). È vero che il genio artistico opera secondo le sue idee, ma non si sottrae alla piena vivacità della vita reale. Chè, sebbene questa realtà, come essa è esposta, viva solo nello spirito del contemplatore e del creatore esteta, essa non contraddice alle leggi del reale essere e divenire. Quindi anche una concezione idealistica deve tener conto della « realtà » ideale. Però si tratta non di formazione e illustrazione, ma di esposizione e rappresentazione, e perciò

è in rapporto con la idea svegliata nel genio artistico mediante la intuizione. Non che le idee debbano spiritualizzare la materia della intuizione a tal punto che esse non giacciano affatto originariamente in quella materia: chè anzi l'oggetto estetico è solamente il contenuto significativo della vita, e compito dell'arte è di elevare la realtà, nella pienezza delle sue forme, nella sfera di quella pura considerazione che dà, fra tutti i godimenti pensabili nella realtà sensibile, la soddisfazione più duratura.

Nelle arti liberamente creanti, musica e architettura, l'impressione esterna è solo la causa promotrice di emozioni, con cui si collegano idee di genere soggettivo e di varia e individuale esperienza della vita: invece nelle altre arti vi è dipendenza da oggetti determinati dati nella intuizione, che producono immediatamente non effetti ma rappresentazioni, e ciò o colla formazione plastica o con la espressione poetica, che nelle arti creanti si tradiscono in certo modo l'una nella architettura, l'altra nella musica. L'architettura nelle sue forme complete chiama in aiuto le arti plastiche, le quali a loro volta nell'ordinamento delle parti del tutto dimostrano le leggi, trovate dalla libera creazione architettonica, della composizione armonica. Ma musica e poesia originariamente non sono divise. La musica strumentale pura divenne più tardi arte indipendente, e le forme poetiche nel loro sviluppo trattennero solo, del primitivo accompagnamento musicale, l'azione armonica dell'accento o tono e la libera composizione ritmica del discorso, determinati mediante il loro adattamento al pensiero. Così l'arte divide ciò che la vita offre in unità indivisa, e presenta, dapprima nelle arti creatrici e poi nella loro reazione sulla natura e nella signoria artistica del linguaggio, leggi formali in via di sviluppo accennate solo incompiutamente nella vita comune. Cionondimeno oggetto dell'arte è la vita vissuta, su cui essa reagisce con le idee. Il più alto fine della creazione artistica è che si produca nel contemplatore una duratura disposizione estetica, che accompa-

gni ogni sua attività, e faccia sì che la sua propria vita egli converta in un'opera d'arte soddisfacente per lui e per gli altri. Le idee morali e religiose, in quanto dominano la vita, ritornano dominanti anche nella riproduzione ideale della vita reale, mediante l'arte. Però la intuizione estetica non solo partecipa allo sviluppo delle idee morali e religiose; essa è propriamente un segno vivente, un documento per il valore oggettivo di tutti i contenuti spirituali della vita. Questo valore, nella sua applicazione alla realtà empirica, è sorgente del giudizio morale; nelle premesse fondate su questo giudizio, sul motivo e fine del mondo, è l'ultima origine delle idee religiose. La intuizione estetica coincide con entrambe le precedenti nel fatto che ciascun contenuto spirituale di vita ha un valore fondato su sè stesso, da valutarsi secondo il suo proprio significato, pel quale afferma il suo posto nella serie infinita e quindi imperitura delle autocreazioni dello spirito: e la intuizione estetica vi giunge non col pensiero, ma con la potenza irresistibile della vita reale.

Abbiamo così veduto, conformemente al nostro proposito di voler dare una spiegazione voluntaristica dell'infinito, quali siano i principî e le leggi psichiche più importanti. Anzitutto vedemmo essere necessario entrare nel vero concetto dell'anima, accostandosi alla esperienza psichica immediata, abbandonando sempre più il campo delle astrazioni concettuali e della metafisica. Per tal modo si trova che gli atti di volere sono le forme tipiche dei processi psicofisici, e che ad essi è inerente il concetto della causa finale; indi si rende necessario passare dalla considerazione psicofisica di quegli atti volitivi ad una interpretazione psicologica dei processi vitali psicofisici, e quindi assurgere ad un punto di vista puramente psicologico. Così si impone la questione dei principî della psicologia, e dapprima il problema dell'anima, poi quello della causalità psichica. Abbandonato il concetto dell'anima sostanziale, sostituito da quello dell'anima attuale, si rende necessario, per bisogno di ana-

lisi, di adottare due punti di vista, però integrantisi per lo studio dei rapporti di anima e corpo che immediatamente ci si presentano in unità; onde si viene al principio provvisorio del parallelismo psico-fisico, che in fondo non sdoppia l'originario contenuto unico della esperienza, ma soltanto lo considera sotto due aspetti necessari scientificamente. Questo principio rende inevitabile anche una distinzione della causalità psichica da quella fisica, determinando i principî e leggi che spettano alla prima e che la differenziano da quella naturale. Tali principî sono quello delle risultanti creatrici, delle relazioni rispettive, che si connette a quello dei contrasti crescenti, il quale è una forma speciale di quello delle relazioni, e della eterogenesi dei fini. Dalla considerazione di questi principî risultano concetti diversi da quelli della causalità naturale, in quanto ogni risultante introduce un elemento nuovo, un fatto che non è la semplice somma degli elementi costitutivi, ma una creazione superiore, un accrescimento spirituale. Onde la legge psicofisica generale che ne emerge per la interpretazione dei fatti psichici è la legge dello sviluppo spirituale di autocreazioni. Ed è appunto per questa legge di sviluppo che non solo si giunge al vero concetto dell'anima individuale, ma bensì ancora a quello dello spirito collettivo, in cui l'analisi rintraccia gli elementi dell'organismo e della personalità collettiva, che si accompagnano allo sviluppo generale delle forme sociali; sviluppo spirituale anch'esso sempre più complesso e sempre più risultante di liberi elementi costitutivi. La storia è quindi una grande psicologia applicata; sue energie immanenti sono ancora i motivi spirituali in sviluppo spirituale, con le relative leggi e principî psichici. Nella moralità è altamente espresso il valore dei contenuti storici spirituali; ed anche lì il più alto bene morale è pur sempre la libera esplicazione delle energie spirituali e la ideale collettività volontaria umana, cioè è ancora la legge dello sviluppo progressivo dello spirito. La suprema esigenza è che gli ideali morali da noi

conoscibili siano parti costitutive di un infinito ordinamento morale del mondo, e l'ideale dell'umanità sia ancora un effetto limitato, pensato come derivato da un principio o fondamento adeguato sì ma assoluto e illimitato del mondo, che appare come trascendente nella idea religiosa. Secondo questa, come già nella idea della moralità, si afferma il valore oggettivo spirituale non transitorio; ma appunto per questo lo spirito stesso è a pensarsi come un incessante divenire e creare. Ciascuna energia spirituale afferma il suo valore in un processo non mai finito del divenire dello spirito; sicchè il valore assoluto e indistruttibile è quello di tutte le creazioni spirituali, indimostrabile empiricamente, e però tale da far presupporre che necessariamente tutti gli elementi costitutivi dello sviluppo spirituale, la vita personale individuale e le formazioni storiche della collettività, partecipano ad un fine imperituro, non transitorio, infinito. Persino la espressione estetica, che attinge alla vita reale e però si converge anch'essa sul valore oggettivo di ogni contenuto spirituale, sta a confermare che ciascun contenuto siffatto ha un valore fondato in sè medesimo, e mediante il quale assume il suo posto nella serie infinita e imperitura delle creazioni autonome dello spirito.

Sicchè è evidente che il motivo, il valore, il fine di ogni contenuto spirituale è sempre lo stesso sviluppo interminabile autonomo dello spirito stesso, e che in ultima analisi è l'accrescimento volontario spirituale, che nel suo incessante divenire, costituisce lo spirito stesso.

In questo senso convengono le idee trascendenti della ragione (e i problemi cosmologico, psicologico, ontologico) con la concezione dell'anima attuale.

Ma ciò che a noi preme qui stabilire è un altro punto importante.

Codesta concezione, in cui noi vediamo una profonda interpretazione del fatto spirituale, e che perciò mettiamo in rapporto con la nostra concezione voluntaristica dell'infinito, in quanto quest'ultimo crediamo debba consi-

derarsi come lo sviluppo spirituale volontario in relazione alla determinazione quantitativa, ossia come il grado crescente di questa, ha bisogno di qualche dilucidazione complementare allo scopo di porla in relazione col sistema filosofico generale del Wundt, che abbiamo sinora considerato di rintracciare in questo la posizione occupata dalla idea dell'infinito, e di porre nuovamente in rapporto quest'ultima con la nostra idea dell'infinito.

Il Wundt ¹⁾, com'è noto, costruisce un sistema di filosofia, in cui ha parte centrale la metafisica: ma quest'ultima non è da lui intesa nel senso di una poesia concettuale (sono sue parole), nè di un sistema razionale da costruirsi mediante metodi specifici su premesse « a priori », bensì come un sistema che ha i suoi fondamenti nella esperienza, che anzi da questa deriva. Essa metafisica è per lui la totalità, la sintesi di ogni esperienza data, di tutti i fatti da essa provenienti; onde essa non precede, ma vien dopo e utilizza i risultati delle singole scienze per presentarli in una totalità filosofica definitiva. Suo metodo è quello già adoperato nelle singole scienze, cioè il collegamento dei fatti secondo il principio di motivo (fondamento) e conseguenza, e quindi essa deve logicamente cercare di porre in accordo fra di loro gli elementi ipotetici derivanti dalle singole scienze per giungere ad un tutto privo di contraddizione. Viene adunque in prima linea il punto di partenza empirico, il lavoro molteplice e diviso delle singole scienze, la esperienza differente; dopo di che la sintesi filosofica cerca di giustificare i diversi punti di vista che si impongono nelle singole discipline positive a cagione del modo ogni volta diverso di trattazione dei problemi, indi di riunirli in una visione coerente, omogenea,

¹⁾ *System*, etc., cit., Bd. I-II; — *Logik*; — *Ethik*, etc. Cfr. la prefaz. all'ultima ediz. del *System*, e la prima parte della cit. *Einleitung in d. Philos.* (*Aufgabe d. Philos.*, seguita dalla *Geschichte* e *Hauptrichtungen*). Così pure cfr. *Essays*, cit. (s. 1 ff.), e i vari lavori citati dallo stesso Wundt nella bibliografia posta alla fine di ciascun capitolo della *Einleitung in d. Philos.* (ultima ediz.).

non contraddittoria. Tra tutte queste diverse discipline si delineano i due campi della scienza della natura e della psicologia, la quale ultima è pure una scienza empirica che procede con la metodica delle scienze naturali, ed adotta però un proprio punto di vista, che è quello della esperienza immediata. — Ora, posta così anche la psicologia nel gruppo delle singole scienze indipendenti, le quali tutte si fondano su dati empirici, è evidente che per il Wundt i risultati di essa, come delle altre discipline empiriche, esercitano la loro piena influenza sulla finale visione filosofica. Egli non giunge alla psicologia o alla scienza della natura col sussidio di una metafisica preformata o di una filosofia, dalla quale si possa discendere nei singoli campi psicologico o naturale; ma al contrario giunge alla filosofia uscendo da quei campi speciali. Quindi si comprende come per lui siano giustificati i diversi punti di vista nelle scienze e nei campi speciali, e come d'altra parte sia giustificata la tendenza unificatrice che si manifesta nella sintesi generale dei risultati delle scienze, nella filosofia. Per lui l'azione scambievole che ha luogo tra anima e corpo non deve costituire, essa di per sè, un problema metafisico di cui si attenda la soluzione; ma è un problema che presuppone da un lato la ricerca dei puri fenomeni naturali e dall'altro quella dei rapporti spirituali.

La filosofia wundtiana è un processo che va dal singolo al generale, in cui la metafisica figura come la generalità comprensiva di tutti gli elementi singoli, giustificatrice delle divisioni delle discipline e dei loro punti di vista, e però includente la esperienza totale, dalla quale deriva: non è perciò un presupposto fondamento della totalità dei dati empirici elaborati e studiati in diversi modi nei singoli campi, e neppure è la applicazione di preconetti a problemi singoli, ma è quella totalità stessa che li unifica e riassume; non è una costruzione volontaria di pensieri, ma un lavoro scientifico, che si esprime allora che i compiti dei campi speciali trapassano in quelli scientifici più gene-

rali. Insomma la filosofia è la riunione delle nostre conoscenze singole in una visione del mondo e della vita, che soddisfi alle esigenze dell'intelletto e ai bisogni dell'animo; essa diviene scientifica in quanto le conoscenze generali procacciate dalle singole scienze si unificano in un sistema senza contraddizioni. — Nel campo scientifico generale si danno due grandi gruppi: quello delle scienze formali o matematiche, che si fondano sull'ordinamento di una varietà e poggiano sulla pura funzione intellettuale, non sul suo contenuto sensibile; e l'altro gruppo delle scienze reali, divise in scienze della natura e in scienze dello spirito. Dal punto di vista filosofico, il contenuto del sapere è considerato o rispetto alla sua origine, o rispetto alla connessione sistematica de' suoi principî, cioè o nel divenire o come divenuto; quindi due grandi campi, dottrina della conoscenza e dottrina dei principî; il primo ha la parte formale o logica e reale o conoscitiva. Il secondo è in fondo la metafisica, e contiene la filosofia del diritto, estetica, filosofia della religione. Ma i due grandi rami della filosofia, dottrina della conoscenza e metafisica, formano un medesimo contenuto di scienza, considerata sotto due punti di vista diversi. Se la parte più cospicua della ricerca dei principî, che determinano il contenuto reale della esperienza, cade dalla parte della teoria conoscitiva, l'esame critico e il proseguimento nel completare ipoteticamente la realtà (proseguimento già iniziato dalle singole scienze) è compito metafisico. Ciò spiega la disposizione del sistema wundtiano, che segue quest'opera di proseguimento e di completamento su accennata. Prima vengon considerate le condizioni formali della conoscenza, cioè le forme del pensiero e sue leggi, indi la ricerca della conoscenza nel suo significato reale; dal che si passa a quel completamento metafisico ipotetico della realtà (accennato già in ciascuna disciplina), che si suddivide nei campi della conoscenza reale e trascendente, cioè nei concetti intellettivi (fondamento delle scienze formali o matematiche e di quelle reali empiriche della natura

e dello spirito), e nei principî (già in applicazione entro la conoscenza singola) elaborati dalla metafisica nell'interesse della riunione unitaria, unica del sapere, vale a dire nelle idee trascendenti, le quali sono dei presupposti già pronti in diversa guisa nelle singole scienze e però non conducono ad alcuna conclusione neppure relativa.

A questo punto dovrebbe terminare il sistema wundtiano: ma invece seguono due altre grandi parti, che trattano di due grandi campi di scienze singole, i quali trovano posto qui anzichè nella precedente trattazione della conoscenza reale ossia mediante i concetti intellettivi, per la ragione che essi sono una applicazione dei principî generali metafisici. Quei due grandi campi sono i punti salienti della filosofia della natura e i fondamenti della filosofia dello spirito.

Come dicemmo, ha luogo dapprima l'analisi del pensiero e della attività soggettiva di esso, considerata come strumento necessario di ogni conoscenza. — Il pensiero non è un fenomeno speciale accanto a tutti gli altri fatti, ma la sua proprietà si fonda sul modo in cui si collegano in esso gli elementi generali della coscienza, tenuto conto che detti elementi formano già in sè un tutto inscindibile, e che soltanto la nostra astrazione opera la loro suddivisione, e trasporta la differenziazione negli oggetti, mentre questi realmente non sono separati. In realtà adunque i rapporti scambievoli trovati fra gli elementi accennano piuttosto al loro nesso insolubile, e solo concedono la possibilità di proprietà diverse di un medesimo contenuto unitario, unico, di coscienza. E questo è un punto capitale della filosofia wundtiana. Insomma non si dà in fondo che un solo contenuto di esperienza; rappresentazione, sentimento, volontà sono soltanto aspetti o proprietà diverse della nostra esperienza unitaria immediata. L'atto del pensiero stesso consiste di certe rappresentazioni, che pure contengono dei sentimenti, ed è ancora un fatto del nostro volere che aggiunge e connette elementi ad elementi; inoltre è (in rapporto all'« io » volente, e quindi al nesso dei ripetuti sentimenti

di attività, e relative sensazioni e rappresentazioni) attività autocosciente; se nel suo contenuto rappresentativo si distingue dalle affini attività volitive, si è per la relazione che si stabilisce tra le diverse parti costitutive di ogni processo; quindi il pensiero è attività soggettiva, autocosciente, e di relazione. Soggettiva in rapporto alla più generale distinzione dei contenuti dell'esperienza, in opposizione a quegli elementi della esperienza che concepiamo come oggetti. Autocosciente è in rapporto al lato volontario di questa nostra esperienza. Come attività di relazione, è in rapporto ai contenuti di quella medesima esperienza. Sicchè il concetto dominante è questo: che non si dà che una sola esperienza, da cui deriva il pensiero, ma che questo è in triplice rapporto con essa, nel senso di un triplice modo di contegno rispetto ad essa. Alla ricerca ampia è soltanto accessibile però l'ultimo rapporto, quello rispetto al contenuto dell'esperienza; perchè i momenti dell'autocoscienza e del volere dimostrano nei diversi atti del pensiero varie differenze di grado, mentre l'importanza speciale è quella della differenza qualitativa dei processi di pensiero, dei quali l'influenza esercitata sopra il processo conoscitivo è inclusa in quei rapporti di rappresentazione che ci appaiono tanto come atti quanto come effetti del pensiero.

È quindi questo aspetto rappresentativo, in rapporto al contenuto qualitativo empirico, del pensiero, che si presenta tosto all'analisi. Esso pensiero è così originariamente attività di suddivisione, in quanto scinde ciò, che era unito nella intuizione, in parti concettuali, in cui solo il rapporto stabilito fra di esse, lascia riconoscere la primitiva unità. Così in una primaria forma di pensiero avviene il nesso degli elementi rappresentativi della intuizione precedente il pensiero stesso; nesso che conduce all'unità fondamentale di ogni giudizio, cioè alla rappresentazione totale: in una forma secondaria quel nesso viene ristabilito dal pensiero medesimo, che giunge ad una doppia unità del soggetto e della relazione, cioè alla dualità riflessa in ogni giudizio.

Ma il contenuto di pensiero derivante dal contenuto rappresentativo della coscienza, è concetto, e lo sviluppo del concetto è parallelo a quello della funzione giudicatrice. Così si hanno i giudizi e i concetti. I primi hanno forme fondamentali, tra cui avvengono speciali nessi e trasformazioni, fin che si giunge al pensiero, o, meglio, alla forma conclusiva del pensiero (conclusioni di probabilità, analogia, deduzione, poi le conclusioni plurilaterali, induzione logica, ecc.). Se, poi, ogni forma di pensiero è una legge di pensiero, in quanto raccoglie sotto di sè una quantità di fatti singoli, essa rientra ancora sotto determinate leggi fondamentali. Due rapporti fondamentali, a cui van ricondotte quelle forme, sono quelli di identità e contraddizione: per il primo, un rapporto di eguaglianza è riconosciuto come tale per una attività comparativa capace di concepire la coincidenza e la distinzione; per il secondo, la distinzione oppone il diverso come ineguale al coincidente, e dà luogo alla contraddizione; inoltre la logica legge fondamentale della composizione dei concetti è la proposizione del terzo escluso. Sopra tutte le forme però impera la dipendenza logica, prodotta giusta le leggi del confronto logico, a cui son subordinati i rapporti reali di dipendenza che si manifestano già entro la intuizione.

I membri di questa dipendenza logica si designano come principio e conseguenza, e il principio rispettivo, che connette gli atti di pensiero e i concetti in conformità alla loro dipendenza, è detto in generale principio del fondamento, o del motivo, o del principio. Le condizioni intuitive per la formazione del concetto logico di dipendenza sono date nei rapporti dell'insieme spaziale e della successione temporale. Ma le condizioni per la applicazione di questa legge di dipendenza, se pure son date nella intuizione, esigono che essa legge sia soprattutto stabilita mediante un atto di pensiero, giacchè si presuppone la riunione di determinate parti della intuizione in un concetto comune, e l'astrazione da quegli elementi che non si considerano per la

correlazione. — Difatti gli atti di confronto che li son necessari, sono complessi, includendo un confronto non di singoli concetti fissi a due a due, ma di due serie di concetti poste in relazione. Inoltre la natura generale dell'atto di confronto, lo rende atto ad estendersi a interi giudizi: e siccome i giudizi collegati in un processo di conclusione possono venire riuniti nuovamente con altri atti di pensiero mediante alcun che di comune, così la posizione del principio o fondamento si trasforma in un principio del nesso generale dei nostri atti di pensiero, onde questi si pongono in rapporto di dipendenza con altri, e questi con altri ancora e così via illimitatamente. Per tal modo dalla proposizione del principio si giunge ad una legge conoscitiva, ossia si viene, mediante l'ultimo principio del pensiero comparativo, al primo principio del pensiero fondamentale, che giustifica secondo principio e conseguenza, ossia alla conoscenza.

La conoscenza è adunque pensiero, a cui però si congiunge la convinzione della realtà dei contenuti di pensiero: è esperienza in rapporto ad un reale. Sicchè si ha una esperienza (o aspetto della esperienza) precedente ogni azione delle funzioni del pensiero, e questa è quella conoscenza che noi diciamo esperienza immediata; e si ha quella esperienza mediata, acquisita mediante l'azione delle funzioni del pensiero e col soccorso dei concetti, cioè la conoscenza. Per questa, va notato che le nostre rappresentazioni sono originariamente gli oggetti stessi: la divisione di rappresentazione e oggetto viene poi fatta dal pensiero conoscitivo in una sua forma posteriore riflessa, e però il pensante e il pensato formano un contenuto di coscienza connesso. La conoscenza ha i suoi gradi: l'oggetto da cui parte è l'oggetto della rappresentazione che ha la proprietà di essere, come vedemmo, un oggetto reale; e si procede dalla conoscenza percettiva a quella intellettuale e a quella razionale; cioè da quella che ancora non ha il soccorso dei metodi scientifici di formazione concettuale, a quella completata con una analisi logica metodica, e finalmente alla

conoscenza che collega i nessi della conoscenza intellettuale in un tutto, in una generale visione del mondo; in altri termini essa procede dalla vita pratica alle scienze singole e in fine alla filosofia. La conoscenza percettiva presuppone la percezione, di cui la materia è data dalle sensazioni, e la forma dell'ordinamento delle sensazioni in tempo e spazio: onde quella conoscenza percettiva si scinde in sintesi delle sensazioni in un contenuto percettivo spaziale-temporale, e in analisi di questo contenuto nei singoli oggetti. Tempo e spazio, poi, psicologicamente, in genere son ritenuti rappresentazioni speciali, esistenti indipendentemente accanto al loro contenuto, e logicamente invece sarebbero forme che determinano i rapporti delle rappresentazioni fra di loro. Invece psicologicamente essi non sono rappresentazioni speciali, ma parti inseparabili della sensazione, parti costitutive della percezione, e non forme vuote e nemmeno distinzioni logiche; giacchè non è giusto concepire la percezione come un processo logico di pensiero, o i concetti, che noi introduciamo dopo nella percezione, come già contenuti originariamente in essa. Ciò che ha carattere logico è la scissione di tutte le percezioni in una parte formale e in una parte materiale, date le due condizioni della variazione indipendente di entrambe queste parti della percezione, e della costanza delle proprietà generali delle parti formali (tempo e spazio, come ordinamento spaziale e temporale delle sensazioni). Quest'ultima condizione si impone solo alla distinzione logica, che separa quelle proprietà formali dal contenuto di sensazione, e le fa divenire intuizione pura spaziale e temporale, intendendosi spiegare con la parola « intuizione » il fatto che noi ci rappresentiamo ancora un contenuto qualsiasi e omogeneo; mentre se il contenuto è del tutto indifferente, si tratta allora piuttosto di un concetto.

Operata questa scissione logica di elementi formali e materiali della conoscenza, si presentano atti di confronto più complessi, che si fondano sulla correlazione delle parti

di un tutto, e sul rapporto di principio e conseguenza che ne deriva. La applicazione delle leggi del pensiero alle forme della intuizione e alle varietà costruttibili concettualmente secondo analogia con quelle, subentra qui come oggetto di quella scienza speciale che è la matematica, la quale presuppone un qualsiasi contenuto intuitivo, ma ne considera solo quelle proprietà che sono di un significato puramente formale e però realizzate col soccorso di un qualsiasi substrato di sensazione. Le forme considerate son quelle dell'ordinamento degli elementi, di cui è indifferente la qualità, ma di cui importa l'origine dalle proprietà generali di tempo e spazio e dalle varietà costrutte concettualmente in modo analogo a queste proprietà. Se vi ha in tal caso considerazione di qualità, quest'ultima non è la qualità degli elementi stessi, ma del loro ordinamento. La matematica pura ha a fare solo con grandezze estensive; ed il concetto della grandezza intensiva implica un limitarsi, anzichè alla forma e all'astrazione dalla materia, alla materia della percezione e ad un'astrazione dalla sua forma. Quanto alle forme di tempo e spazio, va osservato che esiste un continuo rapporto fra di loro, tanto che tutto ciò che noi viviamo è in un mondo spaziale-temporale: solo che il tempo, come possibilità di mutamenti puramente intensivi, può pensarsi ancora come sussistente quando si astrae dal lato rappresentativo proprio, e quindi come una forma più generale per la concezione di processi reali, restando ad ogni modo stabilito il fatto che tanto lo spazio quanto il tempo sono forme immediatamente connesse al contenuto oggettivo della percezione.

In relazione con la distinzione delle due forme di tempo e spazio, sono i due concetti del mutamento qualitativo, che si concepisce formalmente come un processo puramente temporale, e del movimento come processo temporale-spaziale: il primo è poi connesso alla materia della percezione, e il secondo alla forma del suo ordinamento: in quest'ultimo caso si ha a fare con due grandezze estensive e conti-

nuamente variabili, e ogni misura di grandezze estensive è misurazione spaziale; inoltre si scinde il contenuto percettivo, dapprima unito, in diversi oggetti spaziali-temporali. Difatti è mediante i suoi propri movimenti che il soggetto si concepisce come uno degli oggetti, e d'altra parte divien conscio dell'arbitrarietà del movimento e della propria indipendenza. Considerando gli oggetti come soggetti, per analogia al suo essere interno, giunge a pensare come fondamento logico il movimento indipendente degli oggetti, operando così col pensiero una separazione nel mondo della rappresentazione. Naturalmente in stati di considerazione interamente oggettiva manca il ricordo del « sè stesso »; o tutt'al più il rapporto degli oggetti al soggetto corrisponde solo alla contiguità di oggetti diversi anzichè ad un vicendevole loro condizionarsi: invece la contrapposizione logica di soggetto e di oggetti, spicca solo per quegli eccitamenti sentimentali e volitivi trasferiti originariamente negli oggetti della rappresentazione, essendo già data nelle condizioni originarie di questa una determinazione di valore, la quale si fonda sul sentimento; e tra gli oggetti che si presentano divisi nella intuizione e connessi con sentimenti, uno eccelle per qualità e intensità di sentimenti, ed è lo stesso soggetto percipiente. Onde l'atto di volere appare come l'immediato provocatore dei movimenti propri: ma, per l'azione dei movimenti sugli oggetti esterni, si sviluppa la rappresentazione di un'azione vicendevole del soggetto con gli oggetti, nella quale l'attività e la passività sono immediatamente sentite dal soggetto, ma poi nuovamente trasportate negli oggetti, in quanto l'azione dell'attività propria diretta all'esterno vien concepita come un patir dell'oggetto, e l'azione dell'oggetto sul soggetto come un'attività del primo.

Ma ciò che importa soprattutto qui è la scissione del primitivo indiviso oggetto della rappresentazione in oggetto e in rappresentazione. Ad ogni atto di percezione i sentimenti concomitanti son presupposti una volta sola e in

noi, le rappresentazioni due volte, cioè in noi e fuori di noi: le percezioni immediate son dette anche soggettive, e le mediate oggettive. Ma va ben ritenuto che da principio, prima della distinzione logica, compete per prima cosa alla rappresentazione la proprietà di essere un oggetto, e che la separazione delle proprietà soggettive è autorizzata più tardi. Quindi ogni conoscenza percettiva è da principio immediata e oggettiva; e, mentre il soggetto conoscente può solamente percepire sè stesso, può invece soltanto concepire e comprendere il mondo oggettivo. Se però il soggetto percipiente è costretto ad assumere nel soggetto stesso tutto il contenuto qualitativo della sensazione, l'analisi scientifica dell'esperienza, che opera con principî e mezzi della conoscenza intellettuale, eleva la realtà oggettiva delle qualità della sensazione; e, poichè a ciascuna rappresentazione conviene la caratteristica dell'oggetto nella intuizione immediata, così in ogni percezione è parte costitutiva inseparabile la forma spaziale-temporale. Al soggetto conoscente sono così dati oggetti di forma spaziale-temporale, intuitiva.

Ma se ivi si astrae da quegli elementi che spettano alla qualità della sensazione, allora tempo e spazio son pensati non intuitivamente, ma concettualmente; e le intuizioni sensibili di tempo e spazio divengon simboli dell'ordinamento concettuale degli oggetti, e le rappresentazioni soltanto simboli soggettivi di significato oggettivo, cioè non più un oggetto reale, ma un simbolo soggettivo che indica un oggetto da determinarsi solo concettualmente secondo materia e forma.

Così alla conoscenza percettiva si sovrappone la conoscenza intellettuale, l'intelletto che pensa gli oggetti e i loro rapporti mediante concetti. La esperienza originariamente unica si scinde in interna e esterna, man mano che si separano il lato sentimentale e quello rappresentativo della percezione: si completa coll'assumere le sensazioni e la forma intuitiva del loro ordinamento spaziale-temporale

nel soggetto conoscente, onde l'oggetto pensato indipendentemente da quello rimane un compito da risolversi dal pensiero mediante concetti. Quindi l'esperienza interna è puramente intuitiva, quella esterna (separata logicamente dalla prima) è puramente concettuale. Ma si noti che non si tratta mai di campi diversi di esperienza, ma di punti di vista diversi, spettanti l'uno alla psicologia, l'altro alla scienza naturale. Risultando il nostro pensiero di una doppia natura intuitiva e concettuale, le leggi del pensiero sono non solo leggi della intuizione, ma leggi concettuali. — Da questo lato del pensiero simbolizzante, nella sua libera attività, si affaccia un compito infinito, quello di abbracciare la realtà possibile senza considerare se questa sia data o no; onde i due concetti limite del reale e del possibile. E così l'ipotesi è tanto necessaria, nella elaborazione dei fatti dati nella intuizione mediante l'intelletto, quanto l'astrazione e la determinazione o le diverse forme dell'attività simbolizzante.

Qui il Wundt passa al concetto della « cosa » in opposizione alla variabilità dei fenomeni reali, al concetto di un oggetto persistente, al trasformarsi della legge di nesso delle parti di un tutto secondo principio e conseguenza in un principio della conoscenza intellettuale, che può dirsi del nesso di tutte le parti del contenuto conoscitivo totale, e che negativamente si esprime come principio del collegamento non contraddittorio dei dati. Poi tratta della elaborazione della esperienza, che ha il triplice compito della ricerca delle forme possibili di conoscenza secondo le generali leggi del pensiero, della costruzione di un sistema coerente della conoscenza oggettiva mediata o concettuale, e di un nesso sistematico coerente di conoscenza soggettiva immediata o intuitiva, ossia un compito a cui devon corrispondere la matematica, poi la scienza della natura, poi la psicologia.

Ma vi è una esigenza ideale, che è risvegliata dalla conoscenza reale, eppure non ne vien soddisfatta. La pro-

posizione del principio o fondamento esige la riduzione di complessi sempre più ampi di conoscenze oggettive e soggettive, a un unico insieme concettuale e a un'unità intuitiva di coscienza. Così nella matematica si accennano sistemi di concetti che danno idee sulla direzione in cui quell'incessante impulso di progresso e di completamento di conoscenze è a cercarsi. La conoscenza intellettuale, alla fine del suo lavoro, deve completarsi in un sistema ideale che oltrepassi il nesso empirico delle rappresentazioni e dei concetti intellettivi, e sia la totalità delle conoscenze oggettive e soggettive, e l'unità dei due sistemi di conoscenze corrispondente alla nostra conoscenza reale del mondo. Perciò, come l'intelletto vuole concepire, afferrare, comprendere il mondo, la ragione vuole trovarne il fondamento: il primo si ferma al dato e lo raggiunge, la seconda va oltre il dato per raccogliere il tutto sotto punti di vista non dati di per sè ma da aggiungersi ai fatti della esperienza e ai concetti che ne derivano. In questo caso, dice il Wundt, si tratta non più di concetti ma di idee, che ricordano quelle di Kant. Sono queste le idee della conoscenza della ragione, con cui si passa al problema trascendente.

E qui la conoscenza razionale conduce il Wundt ai problemi kantiani della totalità della natura, dell'assoluta unità del soggetto pensante, e della condizione ultima del pensare e dell'essere, la cui soluzione non spetta alla conoscenza empirica. Ma il Wundt mette bene in chiaro questo suo concetto: che, se è possibile che il nostro pensiero sia condotto ad una continuazione ideale di pensieri oltrepassante ogni esperienza, non è però possibile che nello sviluppo delle idee in questione non siano applicate di nuovo le leggi generali del pensiero; e quindi i postulati kantiani dell'immortalità dell'anima, della libertà del volere e della esistenza di Dio sono indipendenti dalla tendenza unitaria del nostro pensiero, a cui non partecipano rappresentazioni religiose o esigenze morali, e solo concordano

esternamente col progresso della ragione oltre ogni limite di esperienza. Per il Wundt è ancora una delle leggi generali del pensiero, quella del nesso dei concetti secondo principio e conseguenza, che concede la possibilità di oltrepassare un dato contenuto di esperienza.

La matematica comincia nella esperienza, in quanto i concetti di numero, di forma spaziale, di rapporti di grandezza son prodotti da astrazioni formali originate mediante concetti empirici: ma la matematica conduce così oltre le formazioni concettuali cominciate tra gli oggetti empirici, che il pensiero matematico si concede la indipendenza della sua esattezza dalle convalidazioni esteriori. Così avviene pei concetti di numero, variabilità, funzione. Onde essa ha carattere formale.

E qui è un punto per noi importante, perchè fa rilevare il carattere trascendente della matematica, e la distinzione (che il Wundt più innanzi tratta a parte) del trascendente reale e immaginario. Il primo è l'infinito del progresso nel pensiero, in quanto i raggruppamenti da questo eseguito conservano sempre la stessa forma, che già si verificava entro il progresso empirico; mentre nella trascendenza immaginaria il progresso conduce a nuove formazioni di concetti, che sin da principio si distinguono per le loro proprietà qualitative dagli affini concetti reali, da cui derivarono. Il primo progresso è puramente quantitativo ed è il vero infinito da noi già più addietro considerato, ed il secondo è qualitativo. Entrambi sono due forme pensabili dell'infinito, quantitativa e qualitativa, ma il primo si limita alla costruzione di una realtà non data ed è perciò, come già vedemmo, il vero infinito non mai finito, e il secondo conduce ad una pura possibilità di pensiero.

Ora il problema dell'infinito ha posto proprio nel problema cosmologico della conoscenza razionale, nelle idee reali trascendenti del Wundt, ossia in quel problema che corrisponde al primo dei tre problemi suaccennati di

Kant, quello della totalità della natura (ove pure è discusso l'infinito). Veramente in tutti e tre i problemi, anzi in tutti e tre gli sviluppi, cosmologico, psicologico e ontologico, si possono dare due specie di progresso. L'una conduce ad una totalità infinita, l'altra alla idea di una assoluta unità indivisibile. Entrambe queste idee si acquistano mediante un progresso già cominciato nella esperienza, ma giacciono al di là di ogni esperienza in un punto finale di una serie infinita supposta compiuta, corrispondendo così interamente ai due concetti matematici dell'infinito, dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo. Ciascuno di quei due concetti è applicato nella doppia forma di un infinito regresso incessante e di un infinito regresso giunto a compimento, di cui l'uno presenta un progresso al di là di ogni limite dato, e l'altro, in quanto abbisogna di una idea ultima, presenta a tale progresso una cessazione assoluta. Il concetto cosmologico, poi, comprende da una parte la forma pura della estensione in tempo e spazio, e d'altra parte la materia data in questa forma, cioè la sostanza materiale e la sua azione causale; mentre nelle idee psicologiche e in quelle ontologiche non si può mai astrarre dal contenuto del reale. Il che ha il suo fondamento in ciò, che il mondo esterno (problema cosmologico) ci è dato come una varietà di elementi, in cui possiamo considerare arbitrariamente o la sola forma dell'ordinamento oppure insieme con questa le proprietà e le relazioni scambievoli degli elementi; mentre la esperienza psicologica offre immediatamente certi contenuti di esperienza del carattere di percezioni interne. Insomma le idee cosmologiche posseggono parte una trascendenza reale, parte una trascendenza immaginaria (l'infinito quantitativo appartiene alla prima), in quanto nel primo caso si riferiscono puramente alle proprietà formali dell'universo, e nel secondo al suo contenuto: invece le idee psicologiche e ontologiche cadono nel campo della trascendenza immaginaria. Le proprietà formali del concetto del mondo o della idea

cosmologica son date, come sappiamo, nell'ordinamento spaziale e temporale dei fenomeni naturali, che è una grandezza continua. Per il contenuto del concetto del mondo, alle idee dell'ultimo stato finale (atomo, ecc.) non può attribuirsi un significato reale come alle idee trascendenti del regresso formale; perchè quelle sono puramente ipotetiche e relative.

Ora tutto ciò ci riconduce alle idee più addietro espresse, quando trattammo dell'infinito teoretico. Ciò che qui importa ben fissare è che l'infinito compare come una necessità trascendente del problema del mondo, non data prima di ogni esperienza, ma completante il progresso già cominciato in questa e non mai esauribile realmente nella parte formale quantitativa, mentre è ipotetica in quella qualitativa del mondo reale empirico.

Qui il Wundt fa seguire considerazioni sulle idee psicologiche, e l'intellettualismo e voluntarismo individuali e universali come visioni generali sulla natura dello spirito, riferite o alla rappresentazione o al volere; indi passa all'idea ontologica con riferimento al materialismo, idealismo, e realismo. — Dopo ciò, egli dice, si impone l'esame logico dei concetti fondamentali scientifici e il confronto critico del raggiungimento e applicazione di questi concetti entro le singole scienze, onde si passa alla teoria della conoscenza applicata. Ma i risultati di questa analisi critica e logica sono i fondamenti per una sintesi oltrepassante ogni limite di conoscenza positiva: onde, dopo aver trattato prima del pensiero strumento del conoscere, e poi del conoscere percettivo, intellettuale concettuale, e razionale trascendente, tratta in seguito della necessità di una teoria conoscitiva applicata al sapere positivo; finalmente passa a un campo che può dirsi (in contrapposizione ai sogni fantastici asistematici) anch'esso un'applicazione della teoria della conoscenza, ma che esprime la tendenza trascendente alla unità ultima, dimostrabile sempre però come un impulso conoscitivo immanente alla ragione umana.

Così, dopo il conoscere, vengono i due campi dei concetti intellettivi e delle idee trascendenti (con procedimento affine a quello kantiano). La ricerca del primo considera da un lato il contenuto logico di quei concetti nel suo generale significato scientifico, e dall'altro ricerca le proprietà speciali che questi concetti assumono nei singoli campi principali della scienza. Onde la divisione della generale dottrina della scienza in filosofia della natura e filosofia dello spirito, e poi la necessità della nuova ricomposizione dei due campi diversi mediante completamente trascendenti, preparati mediante le soluzioni dei compiti separati. Per tal modo i due campi della scienza della natura e dello spirito sono per un rispetto diramazioni della generale dottrina della conoscenza, e per un altro procacciano la riunione di essa con la dottrina metafisica delle idee.

Insomma il Wundt segue anche qui il metodo, secondo cui si procede dal pensiero (suoi principi e leggi) al conoscere, concepire e porre i fondamenti, ossia man mano sino al più ampio completamento del conoscere, ponendo in ogni fase di conoscenza i fondamenti della conoscenza superiore successiva, e in questa la giustificazione superiore dei risultati della prima.

Venendo adunque ai concetti intellettivi, anzitutto si presentano le loro forme fondamentali col relativo sviluppo logico. Per ogni conoscenza sono necessarie due parti costitutive: una materia data empiricamente, e una forma imposta a questa materia mediante il pensiero; onde si manifesta l'origine empirica del contenuto materiale e la sovrapposizione dell'analisi e del pensiero formale. Ma esperienza pura e pensiero puro sono finzioni concettuali, concetti limiti, mancanti nella esperienza e nel pensiero reale. E però il contenuto unico, che possiamo concedere al concetto della esperienza pura, consiste nel presupposto di un contenuto di percezione, in cui il lavoro, incessante in realtà, del pensiero è pensato come non ancora compiuto, e quindi son pensate non ancora condotte a termine la separazione di

materia e forma, degli oggetti della rappresentazione fra di loro, e di essi dal soggetto. Di fronte a tal contenuto della esperienza pura sta il puro pensiero come una esigenza ideale, come un'attività espressa nelle leggi del pensiero. Ora, se questa attività trova il suo prossimo substrato nell'originario contenuto di rappresentazione, debbono aver origine tutte quelle differenziazioni, in forza delle quali tale substrato si scinde in una molteplicità di oggetti di rappresentazione, poi in contenuto di sensazione e forma spaziale-temporale, finalmente in soggetto e oggetto, rappresentazione e suo oggetto. Così si hanno varie composizioni dell'originario contenuto rappresentativo, in cui entra la funzione differenziatrice del pensiero collegata con l'attività di relazione, per cui i prodotti della scissione si riconnettono in vario modo: e quindi così, per processi di relazione e di collegamento fondati sui primitivi atti di differenziazione, ha origine la formazione di concetti e il passaggio dalla conoscenza percettiva a quella intellettiva.

Primi entrano qui in scena i concetti della esperienza; poi vengono i concetti astratti. Per i primi è reale punto di partenza per lo sviluppo logico la distinzione del singolo oggetto di rappresentazione. Ma la esperienza pratica della vita, che pure poggia prevalentemente sui concetti empirici del singolo, oltrepassa continuamente questi limiti, in quanto forma concetti generali, che hanno per fondamento i primi, ma non appartengono più propriamente alla esperienza, bensì piuttosto ad un tutto comune ai diversi oggetti e che può solo esser rinvenuto dal pensiero. Così dal concetto del singolo si viene ai concetti generali empirici, formati pel confronto operato dal pensiero dei singoli contenuti percettivi, e destinati a ritenere ciò che in quelle percezioni è riconosciuto come coincidente. Nei concetti generali della esperienza domina una legge, secondo cui lo sviluppo logico dei medesimi comincia con concetti di generalità media, ossia si avvera nelle due direzioni opposte, ovvero in modo divergente, perchè il pensiero paragonante riunisce in sè le

due funzioni del rintracciare le coincidenze tra dati divisi in origine, e del distinguere ciò che era prima connesso, quindi la generalizzazione progressiva e la crescente specificazione dei concetti. Le classi di concetti, in cui vengono ordinati dal pensiero tutti i concetti generali, sono i concetti di oggetto, proprietà, stato, che sono specie di categorie, da cui si differenziano le specie e i modi onde altri concetti possono venir collegati fra loro, vale a dire le forme di relazione dei concetti. Mentre poi i concetti singoli e quelli generali della esperienza designano soltanto determinati oggetti, proprietà o stati, senza prendere in considerazione immediatamente le loro relazioni con altri oggetti di pensiero di egual specie, queste relazioni di diversi oggetti del pensiero fra di loro, giacciono a base della formazione dei concetti di relazione. Sotto questa espressione devon intendersi però anche quei concetti, che emergono dalla formazione di rapporti logici: onde la divisione di concetti di relazione in senso stretto, e in concetti astratti. Così dal concetto empirico singolo, da un lato si viene al concetto generale della esperienza, indi ai concetti astratti e poi ai concetti astratti di relazione, e dall'altro lato ai concetti concreti di relazione e poi di nuovo a quelli astratti e astratti di relazione. — Il limite esterno dell'astrazione poggiata sulle relazioni degli oggetti di pensiero vien raggiunto quando il punto di vista, secondo cui i concetti si formano, consiste solo in una esigenza logica; onde, p. es., nel caso dell' « essere », si astrae dalle diverse proprietà e relazioni e da tutti i mutamenti, e si assume l'oggetto sotto il solo punto di vista che esso « è », e lo si fissa in concetto. Concetti, i quali per tal modo non hanno per contenuto reali relazioni degli oggetti di pensiero, ma relazioni dello stesso pensiero logico, e poi da questo le trasportano su quegli oggetti di pensiero, sono concetti puri di relazione o concetti puri intellettivi. Concetti di relazione in genere sono quelli del formale e del reale, a cui van paralleli quelli del possibile e dell'effettivo. Ora, per le esigenze già ac-

cennate, secondo cui ciò che è costruttibile secondo leggi formali si confonde con ciò che è possibile pel nostro pensiero, e il reale effettivo è connesso con la congiunzione di materia e forma data nella esperienza, si impongono i due grandi campi dei concetti puri di forma e di quelli del reale.

Fra i primi (concetti puri di forma) sono l'unità e la varietà. Quest'ultima può essere considerata sotto il rispetto della proprietà qualitativa del suo ordinamento, oppure in rapporto alle sue proprietà quantitative, e perciò conduce ai nuovi concetti correlati della qualità e della quantità. Per tal modo si passa dall'unità alla varietà, e da questa per un lato alla qualità e per l'altro alla quantità. La qualità, a sua volta, include i due concetti del semplice e del composto, e dall'altro lato la quantità include quello del singolo e della pluralità, che tutti si raccolgono nel concetto generale di numero, che nel corso del tempo è giunto non solo a comprendere ogni sorta di grandezze pensabili a norma delle ampliamenti della matematica, ma ancora ad esprimere la composizione e l'ordinamento delle medesime, come ne sono esempio i numeri complessi. Infine il concetto di numero conduce a un ultimo paio di concetti, in quanto con esso si congiunge, a motivo del nesso dei numeri di un dato sistema numerico, un nuovo concetto di forma, quello di una forma variabile. L'origine di questa si deve al fatto, che ciascun numero di una varietà numerica può esser prodotto mediante determinate operazioni da qualsiasi altro, e specialmente dal concetto iniziale del singolo o del semplice. Così si ottiene il concetto del numero variabile, che a sua volta si scinde in due sotto-concetti, quello di variabile indipendente e di variabile dipendente, che convengono poi entrambi in quello generale di funzione.

Questo per i concetti puri di forma, che sono quelli che qui ci interessano. — Diremo di sfuggita che i concetti puri dalla realtà fanno capo da principio all'essere e al divenire. Dall'essere si viene a quello di sostanza, indi alle due parti distinte di sostanza e accidente. Dal divenire

si giunge alla causalità e alle due componenti di causa ed effetto. Entrambe queste paia di concetti si riuniscono nel concetto generale della forza, il quale a sua volta vale da una parte come causa sostanziale di ogni fatto, e dall'altra come realtà divenuta, ossia come causa trasformata in effetto. Quindi derivano i concetti scambievoli della forza potenziale e della forza attuale, di cui il primo conduce alla causalità sostanziale, e il secondo alla causalità attuale, opposti l'uno all'altro, perchè nel primo ogni fatto causale è considerato un atto di una sostanza persistente, mentre pel secondo ogni causalità consiste in un nesso pensato come necessario tra determinati fatti. Se però la causalità è concepita come sostanziale, è a presupporla la costanza del suo fondamento nel mutamento esteriore delle sue forme: da cui consegue che nei nessi causali questa causa sostanziale deve sempre precedere ogni singolo effetto, onde essa porta al vero concetto di causa nel senso rigoroso della parola; mentre nella causalità attuale, essendo i fatti collegati secondo il principio del fondamento e della conseguenza, è dato sin dall'inizio un principio della determinazione vicendevole, per cui ciascuna conseguenza è considerata come appartenente al suo principio, e viceversa anche il principio come appartenente alla sua conseguenza; di modo che si ha in questo caso una inversione della causalità, cioè il principio del fine o dello scopo.

Adunque concetti puri della forma e della realtà; i primi sono quelli della varietà, del numero, e della funzione; i secondi son quelli della sostanza, della causalità, e del fine. Lasciamo questi ultimi, che conducono poi al concetto di sostanza nella scienza della natura, alle sue trasformazioni, alla soluzione del concetto causale sostanziale mediante la psicologia, quindi alle differenze della causalità spirituale e naturale, allo scopo come inversione della causa, al principio attuale finale, alla volontà produttrice dei fini oggettivi naturali, quindi al principio dello sviluppo finale, alla teleologia dello sviluppo spirituale: ar-

gomenti tutti, che in parte vedemmo sviluppati entro la dottrina psicologica del Wundt e nella parte applicata del suo sistema filosofico, ed ivi maggiormente nella filosofia dello spirito, che segue a quella della natura.

Ora ci importa brevemente ricordare i tre concetti puri della forma, cioè varietà, numero, funzione. Ciascun oggetto di pensiero, in quanto è differenziato da altri oggetti di pensiero, è una unità; e può in generale continuamente esser pensato spezzato in unità più limitate e come appartenente ad unità più vaste. Questo doppio progresso termina in due concetti limiti, di un'unità minima inscindibile, e di una massima non aumentabile. Così, pur designandosi arbitrariamente quei limiti, si ottengono i due concetti seguenti della unità, quello dell'elemento singolo, e quello dell'insieme o del tutto. Se gli elementi di una varietà hanno tra loro differenze qualitative, allora la varietà è intensiva: se hanno egual qualità e solo si differenziano per l'ordinamento vicendevole, allora la varietà è estensiva. Nel concetto generale di questa, bisogna persino astrarre dalla proprietà particolare dei concetti della pura intuizione di tempo e spazio, cioè dalla continuità, che non è contenuta nel concetto generale di varietà. Vi sono poi le varietà miste, come il triangolo dei colori, in cui all'ordinamento estensivo si aggiungono in primo luogo le differenze qualitative. Ma va notato subito che, per quanto nelle varietà intensive e miste si presuppongano differenze qualitative, concettualmente queste, finchè si rimane nel campo dei concetti puri di forma, non possono venir pensate altrimenti che nella forma di varietà estensive, dovendo rinunciare in questo caso a qualsiasi contenuto empirico determinato, soprattutto a qualsiasi qualità di sensazione. Il concetto di varietà estensiva si scinde poi in concetti inferiori riferentisi parte al concetto superiore di unità del vario, cioè al tutto, e parte a quello inferiore, cioè all'elemento, e parte ancora al modo di ordinamento degli elementi. Nel primo caso la varietà è o finita o infinita, secondo che la unità

del tutto è effettivamente raggiunta, oppure si raggiunge solo idealmente nel senso che un progresso incessante si pensi terminato: esempî del primo genere sono una estensione rettilinea limitata o un insieme limitato di punti, e del secondo il tempo, lo spazio, la serie dei numeri interi. Nel secondo caso e dal punto di vista formale, poichè tutte quelle proprietà che non son poste da principio nel concetto non sono pensate entro di esso, il concetto di elemento non appena stabilito provoca la esigenza logica che la unità non debba li considerarsi come un tutto consistente di parti: cioè esso è assolutamente unico e semplice, e le differenze posson solo essere nell'ordinamento degli elementi.

Qui un punto di vista importante è quello che si riferisce al progresso degli aggruppamenti e delle scissioni, degli elementi in varietà e delle varietà in elementi; l'uno sintetico, l'altro analitico, i quali entrambi possono a lor volta essere finiti o infiniti, in quanto cioè la varietà è di grandezza finita o infinita, oppure in quanto il numero degli elementi contenuto in qualsiasi parte finita di quella varietà è presupposto come finito o infinito. Di questi due casi il secondo ha importanza speciale pel fatto che, se la scissione di una varietà finita o di una parte arbitrariamente limitata di una varietà infinita ne' suoi elementi è un processo finito, allora la varietà è discreta ed interrotta. Se invece la scissione o suddivisione di un tutto finito è pensata come un processo infinito, allora o si pensa il processo condotto realmente a termine, oppure mai realmente terminabile: nel primo caso si ha un numero infinito di elementi reali separati e quindi il concetto di una varietà discreta ed ininterrotta. Se la scissione o suddivisione è pensata come realmente interminabile, allora il concetto dell'elemento conserva solo un significato ideale; e piuttosto entra in esso concetto subito la idea di una unità trascendente non raggiungibile nel regresso reale. Il che va preso in seria considerazione, perchè dimostra quel ca-

rattere di trascendenza di un tale infinito matematico, che è un processo relativamente più trascendente e meno realmente terminabile nel pensiero, in confronto di un regresso indefinito a base empirica o anche di un processo infinito di suddivisione pensato come realmente condotto a termine. Da una tal specie di infinito ha origine il concetto della varietà continua, che esclude la separazione di elementi, giacchè in essa non si danno mai due elementi come presupposti assolutamente i più vicini tra loro. Le due forme del continuo e del discreto non si possono ben ricondurre l'una all'altra: e se ciò è tentato, lo è in quanto ci si limita al lato pratico della misurazione, o ci si vede costretti ad aggiungere all'ipotesi di reali elementi ordinati in immediato contatto, delle determinazioni che contengono esclusivamente l'espressione della continuità senza una sua definizione reale. In entrambe le forme, insomma, è interamente diverso il concetto fondamentale dell'elemento.

Ora, se così è della varietà per sè stessa, il numero è la riunione di un vario nell'unità. Nella sua significazione più generale, esprime tanto il modo di varietà cui si riferisce, quanto le speciali proprietà quantitative e qualitative di quella parte che esso fa spiccare nella varietà. Il concetto di numero diviene tanto più semplice quanto più grande è l'astrazione dai suaccennati aspetti della varietà: quindi i numeri più primitivi e più semplici sono anche i più astratti, ed i numeri interi semplici sono quelli che contengono il concetto della varietà discreta esclusivamente dal suo lato quantitativo, separato da tutte le proprietà qualitative. Invece le modificazioni ulteriori derivano in parte da certe determinazioni qualitative, come, per esempio, quando nella opposizione dei numeri positivi e negativi si esprime una differenza di due direzioni, o in genere come allora che si tratta di determinare una pluralità di differenze di direzione spettanti alla medesima varietà, il che è compito del numero complesso. Però si danno trasformazioni non solo qualitative ma anche quantitative,

in quanto si opera il passaggio del concetto di unità dal singolo a tutto l'insieme.

Il numerare essendo successivo, come già vedemmo altrove, il numero vien dedotto anche concettualmente dalla intuizione temporale: anzi psicologicamente esso non può sorgere senza l'atto del numerare, ossia senza una attività nel tempo (così presuppone il tempo anche la proposizione dell'identità, pel bisogno del confronto successivo, ecc.); logicamente però — cioè in modo che la condizione presupposta non possa togliersi dal concetto senza che il concetto stesso si sopprima — il tempo non è più condizione del concetto di numero, essendo il tempo non la varietà in genere, ma una speciale varietà. Ad ogni modo psicologicamente il singolo, come elemento di una varietà, è considerato come unità numerica; e ciascun concetto totale complessivo di unità, espresso mediante qualsiasi numero consistente di più unità, è un concetto di pluralità, donde ha origine la serie dei numeri interi, di cui la prima unità designa l'elemento di una varietà e ognuna delle seguenti comprende in unità un gruppo di elementi. Ma se in senso opposto si considera come unità un tutto, e questa unità pensata come pluralità si scinde in unità della prima maniera, allora hanno origine i numeri frazionari, che, invece di risultare da nesi di unità, provengono da divisioni di unità. Gli interi han d'uopo di un simbolo numerico, e i frazionari di due simboli numerici, di cui uno (il denominatore) designa la pluralità riunita in unità, e l'altra (il numeratore) la quantità delle unità parziali contenute in quella unità complessiva. Il rapporto tra i numeri interi e i frazionari si concepisce anche in modo che nei primi i concetti dell'unità e dell'elemento della varietà numerica coincidono, mentre negli ultimi ciascuna volta l'unità può pensarsi scindibile a piacere in elementi, data la condizione che anche qui la varietà è considerata come discreta, cosicchè la suddivisione può proseguirsi innanzi a piacere, ma non mai in infinito. Sicchè si hanno due specie, quella

dei numeri interi e quella dei numeri frazionari: a queste va aggiunta una terza specie, quella dei numeri irrazionali. Anche questi presuppongono ciascuna unità scindibile in elementi; ma tal suddivisione è pensata come infinita, onde il numero irrazionale corrisponde perfettamente alla varietà continua. Così il numero raggiunge la massima generalità, in quanto le proprietà qualitative della varietà si esprimono nei numeri positivi, negativi e complessi, e quelle quantitative nei numeri interi, frazionari e irrazionali.

A questo punto il Wundt osserva che si è in genere propensi a considerare i numeri negativi e frazionari e ancor più quelli complessi e gli irrazionali, non come forme numeriche indipendenti, ma solo come prodotti di operazioni aritmetiche (cfr. ciò che dicemmo per l'infinito matematico). In realtà i negativi derivano da una sottrazione non eseguita, i frazionari da una divisione non eseguita, gli irrazionali e gli immaginari da certe estrazioni di radici non eseguibili per mezzo dei numeri ordinari: e il Wundt dimostra che appunto la impossibilità di condurre a compimento queste operazioni richiede ampliamenti rispettivi del concetto di numero. Lo stesso Newton vide l'essenza del numero in ciò, che esso è il rapporto astratto di una grandezza con un'altra della stessa specie; il qual concetto di rapporto include tanto i numeri frazionari che gli irrazionali. Tale concetto però, comprendendo queste specie di numeri, sta piuttosto dal lato quantitativo del concetto di numero; per comprendere anche quello qualitativo, occorre la varietà regolarmente ordinata, la quale è fondamento del concetto di numero senza esser esso medesimo. Questo concetto, invece, importa la scissione delle proprietà quantitative e qualitative pensate collegate nella varietà, e poi il loro ricongiungimento in un concetto complessivo. Ciascun numero singolo appartiene anzitutto ad un determinato sistema numerico, in cui è contenuta la sua qualità, poi appartiene ad una determinata specie di numeri, in cui son determinate le relazioni quantitative. Quanto ai numeri irra-

zionali, è impossibile annettere ad essi altre espressioni che non siano quelle numeriche approssimate, perchè ciò è richiesto dall'interminabilità del compito assunto: ed è in essi appunto che il concetto di numero raggiunge la sua generalità completa.

Onde per determinare il loro contenuto, bisogna uscire dai simboli numerici e porre piuttosto la questione del contenuto logico che può esser dato a quei simboli sotto le diverse condizioni della loro applicazione. Insomma il numero singolo si può definire come il rapporto qualitativo e quantitativo tra due parti di una varietà. Ma i membri del rapporto si posson pensare non più come parti costitutive di un singolo concetto di numero, bensì come numeri indipendenti, che divengon scambievolmente dipendenti fra di loro in forza della relazione in cui si trovano. Così si sviluppa il concetto della funzione.

Un processo logico mediante cui due numeri si pensano dipendenti fra di loro nel senso che l'uno è prodotto dall'altro, è la operazione aritmetica; la relazione vicendevole tra il numero originario e quello derivato da esso è l'aggruppamento delle operazioni; tutte le operazioni aritmetiche riposano sull'aggiungere e sul togliere unità. Ma ogni aggruppamento di operazioni contiene una dipendenza reciproca di due numeri, giacchè non vi ha operazione, che non possa pensarsi invertibile; onde in generale è sempre possibile pensare scambiati fra di loro principio e conseguenza. Ora è dall'aggruppamento o annodamento delle operazioni che ha origine il concetto di funzione, non appena che entrambi i numeri in questione (cioè posti in rapporto vicendevole mediante una operazione) si considerano non come costanti, ma come grandezze variabili, di cui l'una indipendente, l'altra dipendente (prodotta) (v. addietro, nella trattazione dell'infinito matematico). Condizione generale dell'applicazione del concetto di funzione è che siano date due serie di numeri, di cui l'una derivi dall'altra o mediante una determinata operazione o mediante una

serie d'operazioni consecutive, in modo che ad un numero di una serie sia ordinato un numero dell'altra. Concetto aggiunto alla funzione è adunque quello della variabilità, che si trasmette anche nella dipendenza reciproca, che diventa così dipendenza tra due variazioni. Un numero è la funzione dell'altro in quanto si muta in conseguenza dei mutamenti del medesimo, secondo una legge determinata e invariata per una funzione data.

Nella sua generalità massima la variazione dev'esser tale da assumere, fra i due limiti entro cui si muove, tutti i valori possibili. Quindi la variazione continua è la più generale, come quella che comprende nei valori percorsi da lei anche tutte le grandezze originate mediante mutamento discontinuo o saltuario. Con lo sviluppo del concetto di funzione si compie quella generalizzazione del concetto di numero, che era cominciata con la creazione dei numeri irrazionali, perchè il considerare i numeri collegati mediante aggruppamenti di operazioni sotto il punto di vista della funzione, conduce ad una concezione del numero, in cui la forma di grandezza più tardi riconosciuta come numero, cioè quella continua, deve apparire come la più generale forma numerica. Ma, come è impossibile produrre da elementi separati una varietà continua, così è facile separare da questa varietà parti discrete, per poterle riunire in un tutto indipendentemente dal continuo che è presente tra di esse. — Quanto alla forma di una funzione, essa è determinata mediante la legge che connette le grandezze variabili dipendenti con le indipendenti; legge che è poi data a sua volta mediante gli aggruppamenti di operazioni sussistenti tra quelle grandezze. Onde le forme fondamentali delle funzioni riconducono alle fondamentali operazioni dell'aritmetica, semplici o ripetute, la cui esecuzione produce da dati numeri interi sempre altri numeri interi: si giunge così alla forma della funzione intera. Se nella legge del collegamento entrano invece le divisioni, nella cui esecuzione avanzano numeri frazionari, ha origine la forma della

funzione frazionaria. Se il collegamento è dato solo mediante un numero infinito di operazioni in forma aritmetica, si giunge alla funzione trascendente. Quest'ultima ha per noi speciale importanza, per il rapporto che qui come altrove in genere è stabilito tra l'infinito e il trascendente. Le tre specie di funzioni suaccennate corrispondono alle tre specie di numeri interi, frazionari, e irrazionali. Se poi il rapporto di funzione è composto, in modo che la grandezza dipendente sia determinata nello stesso tempo da più variabili indipendenti, di cui i valori singoli posson considerarsi come le parti costitutive di un numero complesso, allora ha luogo la funzione di variabili complesse, in cui molto si amplia il concetto generale di funzione, perchè la dipendenza reciproca delle grandezze variabili diviene multivoca (« vieldeutig »). E però questa funzione multivoca è una dipendenza logica unilaterale, in cui non possono scambiarsi fra di loro principio e conseguenza. Essa conduce ad una forma di concetto di funzione, in cui soltanto si mantiene il pensiero generico della dipendenza. L'ultima forma di funzione, la più generale, è la funzione arbitraria. In questa si astrae affatto dal presupposto di un nesso o collegamento di operazioni, mantenendo soltanto il concetto della dipendenza di una serie di numeri da una serie di altri numeri: in essa devono eseguirsi certe operazioni per porre in un nesso aritmetico date serie di numeri, ma il suo naturale campo di applicazione è formato da quei nessi regolari più complicati di fatti numericamente determinabili nella esperienza, e che non possono dedursi da leggi semplici. — Dai concetti originari di funzione posson poi svilupparsi, mediante l'applicazione del concetto della variazione continua, i concetti di funzione derivata. Difatti se una determinata grandezza è connessa, mediante un collegamento di operazioni, con un'altra, ed è considerata come funzione di questa, siccome ciascuna variazione continua della variabile indipendente produce una variazione parimenti continua della variabile dipendente, così anche queste variazioni posson esser rese in un

determinato rapporto di funzione, che a sua volta si pone mediante un nesso di operazioni. — Ciò che importa però è soprattutto questo, che solo nella possibilità di una « infinita » suddivisione, da una parte è dato il criterio della continuità delle variazioni relative delle grandezze, e d'altra parte la variazione continua è una misura generica del rapporto delle variazioni relative. Così le funzioni formate tra le variazioni delle variabili di una funzione sono le funzioni differenziali o funzioni derivate, così dette perchè possono esser derivate dalle funzioni primitive tra le grandezze variabili.

Ma il nesso di operazioni, mediante cui si connettono le variabili della funzione derivata, se dipende del nesso di operazioni espresso nella funzione originaria, ne differisce però in quanto si limita a considerare rapporti di grandezze piccoli a piacere. Onde la necessità di regole di operazione, che si differenziano dalle operazioni aritmetiche applicate a grandezze comuni finite. Insomma le funzioni derivate sono da un lato funzioni di grandezze variabili, e per un altro sono funzioni delle funzioni originarie, con cui le congiunge uno speciale nesso di operazioni, come il calcolo differenziale (dedotto dalle funzioni originarie), e l'integrale. Possono poi aversi le funzioni derivate di secondo ordine, ecc.

Per tal modo — osserva il Wundt — collo sviluppo del concetto di funzioni delle funzioni si esaurisce l'ambito delle applicazioni che può assumere il concetto generale della dipendenza logica nel campo dei concetti puri della forma. Dall'ordinamento semplice univoco di due grandezze pensate come variabili, si viene da un lato alle premesse sulla proprietà delle variazioni di grandezza, e dall'altro alla regolarità di determinate operazioni aritmetiche tra le grandezze tra loro ordinate. Inoltre dalla dipendenza univoca si passa a quella multivoca, la quale ultima adduce nuovamente all'ordinamento arbitrario, in cui il nesso di operazioni delle grandezze dipendenti non è l'origine della funzione, ma al contrario diviene un compito posto mediante

la presenza di quell'ordinamento. La specie più importante e più generale di variazione della variabile è quella continua, la qual forma, in rapporto alla funzione originaria delle grandezze, assume il significato di funzione della funzione. Fra tutte le forme di funzione, quelle delle grandezze continuamente variabili e delle loro variazioni, anche facendo astrazione dal loro significato formale, si possono ovunque applicare nella esperienza al nesso causale dei fenomeni. Onde — spiega il Wundt — esse hanno un valore preparatorio per le applicazioni della proposizione del principio al contenuto totale della nostra esperienza, e quindi servono alla conoscenza della realtà e sono come un grado precedente i concetti puri della realtà (sostanza e causalità), di cui pone subito dopo l'analisi concettuale, per poi passare alla sintesi metafisica e alle idee trascendenti.

A queste ultime si giunge adunque dai concetti puri della forma, a traverso quelli puri della realtà, e più specialmente per l'intermediario della causalità psichica contrapposta a quella naturale, e della teleologia dello sviluppo spirituale. Rispetto a quest'ultimo (di cui ci occupammo più addietro), è da osservarsi che ivi la considerazione può essere progressiva (come nella causalità naturale, ove regna il principio speciale della equivalenza, e dove la direzione progressiva coincide col decorso temporale dei fenomeni) solo a patto che sia preceduta da quella regressiva. Nelle più alte creazioni spirituali, il principio della eterogenesi dei fini amplia il suo campo d'azione, in quanto (come già vedemmo) nella stessa coscienza individuale il successo conseguito diviene un nuovo motivo, e in quanto soprattutto gli atti spirituali più alti sorpassano i limiti di questa coscienza individua per estendersi alla totalità, cui ciascuno appartiene. Nessuna vita — dice il Wundt — è così povera che non agisca concorde su altri e non cooperi, sia pure con scarsa energia, all'immenso lavoro della vita spirituale collettiva. Ora i trasferimenti dell'uno agli altri, di cui si compone quella vita spirituale collettiva,

sono altrettante fonti del moltiplicarsi e dell'accrescersi delle energie dello spirito; cosicchè un acquisto spirituale non può mai rimanere proprietà individuale. Anzi, in quanto trapassa ad altri, pur restando egualmente al possessore primitivo, non solo moltiplica nel passaggio il suo contenuto originario, ma ancora stimola in tutti, cui si comunica, nuove energie spirituali. Ma alle forme della vita individuale e collettiva, in cui si attua empiricamente codesto sviluppo, sono imposti determinati limiti, che coincidono con le condizioni fisiche della vita. D'altra parte i singoli come pure le collettività possono tramontare, ma non cade la considerazione del divenire e del creare spirituale.

In questa guisa si stabilisce una contraddizione tra il fine ideale infinito e la limitazione reale finita della vita dello spirito. Parimenti i punti di partenza empirici dell'attività volitiva finale non sono una risposta soddisfacente (almeno per le esigenze unificatrici della ragione) alla questione dell'origine della vita spirituale. Ed anche la intera divisione in natura e spirito è un segno della distinzione astratteggiante, il quale nel ritorno alla realtà delle cose fa sempre posto di nuovo alla unità degli oggetti della conoscenza. Onde tanto il punto iniziale quanto quello finale degli sviluppi finali dati nella osservazione, conducono alla necessità di dover completare il fatto empirico mediante premesse trascendenti, acconcie a sopprimere le restanti contraddizioni.

Adunque è la unità finale, oltrepassante ogni potere di limitazione empirica o di distinzione logica astratta, che è un compito trascendente. Come tale, essa oltrepassa anche ogni possibilità di conseguimento di tale unità; e questa appare così un processo interminabile, una tendenza insoddisfatta all'ultima sintesi. L'infinito è un trascendente che implica da un lato la unità riposta nella idea di una totalità infinita, dall'altro e soprattutto (poichè questa non può raggiungersi nella illimitata sintesi del singolo) è soltanto il fondamento ultimo di essa sintesi, ma non è un

valore da doversi raggiungere e da potersi quindi paragonare coi singoli. Trascendente ogni limitazione empirica o astratta è l'infinito: ma esso, come vedemmo, è il vero regresso infinito nelle forme pure matematiche, nel tempo e nello spazio, mentre il regresso empirico è in indefinito. Onde si dà almeno un « grado » di codesta trascendenza della idea dell'infinito. Ma abbiamo anche visto che codesta trascendenza va intesa come un progresso incessante « oltre » ogni limite empirico o conoscitivo; perchè proprio dell'infinito è di non essere mai dato, ma di costituire un processo, un divenire incessante, una sintesi sempre attesa e sempre rimandata. E ciò significa che prima di esso e per esso è la sintesi, e che anzi esso è appunto la ultima sintesi non soddisfacente.

Ora ciò che importa è il fatto che l'infinito trascende la sintesi finale, ossia il prodotto più alto e sintetico della tendenza all'unificazione nella coscienza. Esso è così da una parte una tendenza, dall'altra presuppone un grado della sintesi appetita; perchè il tendere è sviluppo spirituale, e questo è un accrescimento, un elevarsi del grado di spiritualità, il che importa anche un grado crescente nell'attività sintetizzante del pensiero astratto. Il fatto stesso di voler presentare l'infinito come un processo trascendente e non come un interminabile attuato, dimostra il rapporto in cui esso si trova col grado del finito, di cui significa la impossibilità definitiva; altrimenti esso sarebbe una costante. Due fatti sono qui fondamentali: l'infinito non è dato prima della conoscenza empirica e dei concetti intellettivi, chè anzi completa le conoscenze acquisite in tali fasi anteriori di sviluppo spirituale conoscitivo e però non è mai conseguito; in secondo luogo esso è ancora la tendenza sempre insoddisfatta alla sintesi più alta e definitiva di tutte le conoscenze, onde esso è veramente tale in quanto va al di là di quella sintesi che sorpassa tutte le sintesi acquisite dapprima nella conoscenza percettiva, intellettuale, e razionale, e poi nei concetti intellettivi puri della forma e della

realtà, applicati in quest'ultima ai campi della natura e dello spirito. Dato quindi il massimo grado di sintesi, l'infinito è la insufficienza e interminabilità trascendente di essa. Ma il fatto che esso si presenta solo a questo punto delle gradazioni del sapere sintetico, per noi significa che esso è relativo al grado raggiunto dalla sintesi. Inoltre il grado massimo di questa non sta per noi nella applicazione dei concetti intellettivi alla materia della realtà, ma nella forma pura in cui essi compaiono per l'astrazione raggiunta. L'applicazione di essi al reale, importa, oltre la distinzione logica e il ricorso alle forme intuitive pure in quanto si astrae in esse dalla materia del contenuto empirico e dalla qualità della sensazione, anche il ritorno al contenuto qualitativo originario indiviso intellettivamente. Onde il grado di sintesi in questo caso essendo non relativo alla pura determinazione astratta ma a tutto il contenuto della esperienza, non può condurre che al trascendente immaginario e non al trascendente reale quantitativo. Difatti il regresso kantiano delle antinomie dinamiche è un processo subordinato a quello delle antinomie matematiche, ove le forme di intuizione sono private del contenuto materiale empirico. Così il processo dell'infinito è un processo interminabile, e quindi attivo, delle sintesi ossia dei finiti astratti, ed è relativo al grado di determinazione sintetica astratta dei medesimi, di cui è la inesauribilità trascendente ogni possibilità di conclusione. Per questo i concetti puri della forma, che poco sopra esaminammo nel Wundt, ci sembrano appunto quelli da cui trae origine la vera idea dell'infinito che è quella dell'infinito matematico; perchè in essi la limitazione e la sintesi sono le più rigorose, poggiando sulle idee di varietà, di numero, di funzione, che hanno già superato i concetti intellettivi che abbracciano la realtà. La sostanza e la causalità non sono più forme pure, ma concetti applicati al contenuto qualitativo della esperienza.

La causalità psichica è l'ultimo dei concetti reali a cui si giunge con l'analisi intellettuale, tenuto conto del

punto di vista della esperienza immediata, che completa quello della esperienza mediata sorretta dalle astrazioni fondate sulla applicazione dell'intuizione e dei concetti al contenuto empirico. La concezione dello sviluppo spirituale volontario, è quindi anch'essa nel campo del sapere reale, come quella della determinazione matematica lo è nel campo formale, il grado più alto del sapere sintetico, che trova la sua applicazione scientifico-sistematica nella filosofia dello spirito, e prelude anch'essa al trascendente non reale ma immaginario.

Ora a noi sembra che, se lo sviluppo delle creazioni spirituali va a finire nel trascendente, ciò è subordinato al fatto che lo sviluppo ossia il grado della sintesi concettuale astratta (formale) è il fondamento essenziale del processo infinito trascendente. La vera sintesi è quantitativa, non qualitativa, e tende sempre più a divenire formale e ad assumere l'aspetto quantitativo, limitativo, precisante. I concetti puri della forma, sotto questo aspetto quantitativo, corrispondono al più alto grado di complessità concettuale e di analisi logica. Anche la sintesi metafisica finale non mira, in fondo, che all'unità suprema del tutto, cioè alla determinazione quantitativa più sintetica, e perciò non può essere dopo quei concetti formali, ma rientra in questi in quanto ha d'uopo di determinarsi. Siccome poi essa deve essere la sintesi finale, il fine sta appunto nel grado ultimo possibile di determinazione e di sintesi, cioè nel massimo rigore formale a cui essa, come comprensione di ogni esperienza e di ogni divenire, assurgerà. Quindi la sintesi metafisica è formale e concettuale, ed è tanto più trascendente e interminato il suo processo esplicativo quanto più quel rigore è raggiunto. Ora, questo processo è interminato non nel senso che esso si ripete in modo costante, ma nel senso che è progressivo, sempre più rapido, meno rappresentativo, sempre più astratto, abbreviativo e rapido, più spiccato nel suo carattere di tendenza all'accrescimento del potere di sintesi. Come tale, è più un compito da porsi

che uno già posto, e la successione delle sintesi è più interminabile. Ma un processo incessante e progressivo dello sviluppo spirituale in rapporto alla conoscenza concettuale formale, ha, appunto per queste sue proprietà, la caratteristica di essere un processo attivo, volitivo. Anzi è proprio del processo volitivo quella tendenza al progressivo accrescimento spirituale. Ora, il vero carattere di processo spirituale volontario si afferma, dal punto di vista della esperienza immediata, soltanto dopo che la conoscenza si è elevata al grado di concetto intellettuale e di separazione logica del campo formale e di quello reale naturale o spirituale, e dei relativi punti di vista adottati per necessità sistematiche, ed è soltanto allora riconosciuto in grazia della cresciuta capacità di determinazione. Onde per noi la tendenza progressiva (già inerente ad ogni grado di conoscenza inferiore) alla crescente determinazione sintetica astratta dei dati, segna essa soltanto un progresso dall'indefinito al sempre più definito e alla corrispondente idea complementare dell'infinito, la quale si afferma in modo progressivo come un trascendente e una impossibilità finale di esaurimento, ed appunto nell'accentuarsi di questa caratteristica diviene un processo più intenso di tendenza autoconscia e di volere; il quale è tanto più insoddisfatto quanto più sollecito di conseguimento della miglior possibile determinazione sintetica.

In fondo, l'infinito è, come dicemmo più volte, un processo di pensiero; ed è, come tale, interminabile in quanto è un processo spirituale volontario attivo: ma il carattere di volontarietà diviene tanto più evidente quanto più i membri costitutivi di quel processo sono rigorosamente sintetizzati e determinati in astratto. Sicchè l'infinito non è solo un processo attivo illimitato, ma è una tendenza attiva alla intensificazione del processo stesso, ossia è una forma di accrescimento spirituale sotto il rispetto concettuale sintetizzante. La sua essenza sta quindi nell'elevare sempre più volontariamente il grado di quella tendenza

alla sintesi, alla determinazione finale, che così vien più rapidamente conseguita e poi di nuovo appetita.

Il concetto volontaristico dell'infinito scaturisce per noi adunque dall'intensificarsi del processo di tendenza alla sintesi astratta di ogni contenuto empirico, e non è un postulato necessario di essa. Postulato è invece, se postulato si può dire, la pura tendenza originaria alla determinazione quantitativa di ogni esperienza. In quanto questa tendenza è progressiva, si fa più rapido e intenso il processo di correlazione del finito e dell'infinito, che relativamente assurge a un grado sempre crescente di attività spirituale volontaria. Onde la trascendenza dell'infinito, come sintesi finale desiderata, e la concezione dello sviluppo spirituale volontario secondo noi si integrano nella idea di uno sviluppo spirituale volontario della idea sintetica del finito e nel relativo sviluppo del processo trascendente dell'infinito: crescente tendenza alla determinazione e crescente determinazione della tendenza. — Tre sono per noi i punti, che meritano, per la soluzione del problema, una speciale considerazione. Anzitutto nulla si dà per noi che non sia determinato sinteticamente, sotto il riguardo quantitativo, nella coscienza; onde la tendenza originaria a questa determinazione. In secondo luogo, vi ha un grado crescente di questa tendenza attiva. In terzo luogo, l'accrescimento della tendenza importa uno sviluppo massimo e però non terminato di essa, che si traduce nel rendersi sempre più volontario e rapido il processo delle determinazioni sintetiche, le quali così rivestono ogni volta più il carattere di opposizione del finito e dell'infinito o inesauribile. Onde, in ultima analisi, l'infinito si risolve per noi nel progressivo sviluppo spirituale del volere.

INDICE

L' INFINITO

I. Cenni storici	<i>pag.</i>	1
II. L' infinito nella natura e nella scienza	»	68
III. L' infinito teoretico-conoscitivo	»	206
IV. L' infinito matematico	»	263
V. Conclusioni	»	420
